Metoda konečných prvků

Stabilita

Ing. Petr Lehner

Co se dnes dozvíte?

Eulerovo řešení.

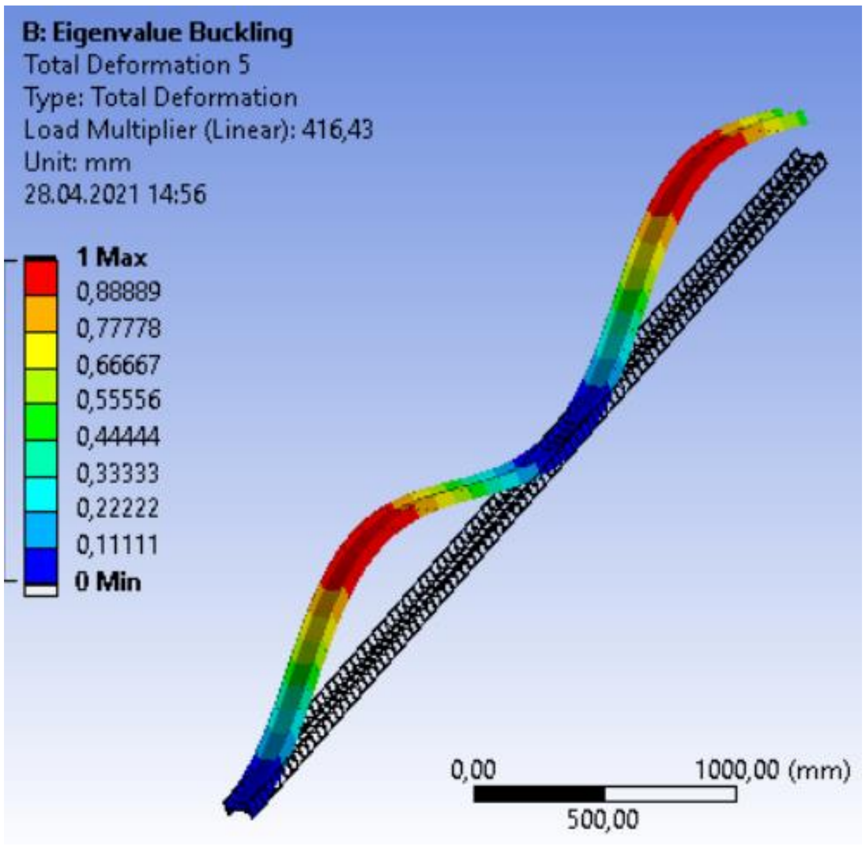
Stabilita v MKP.

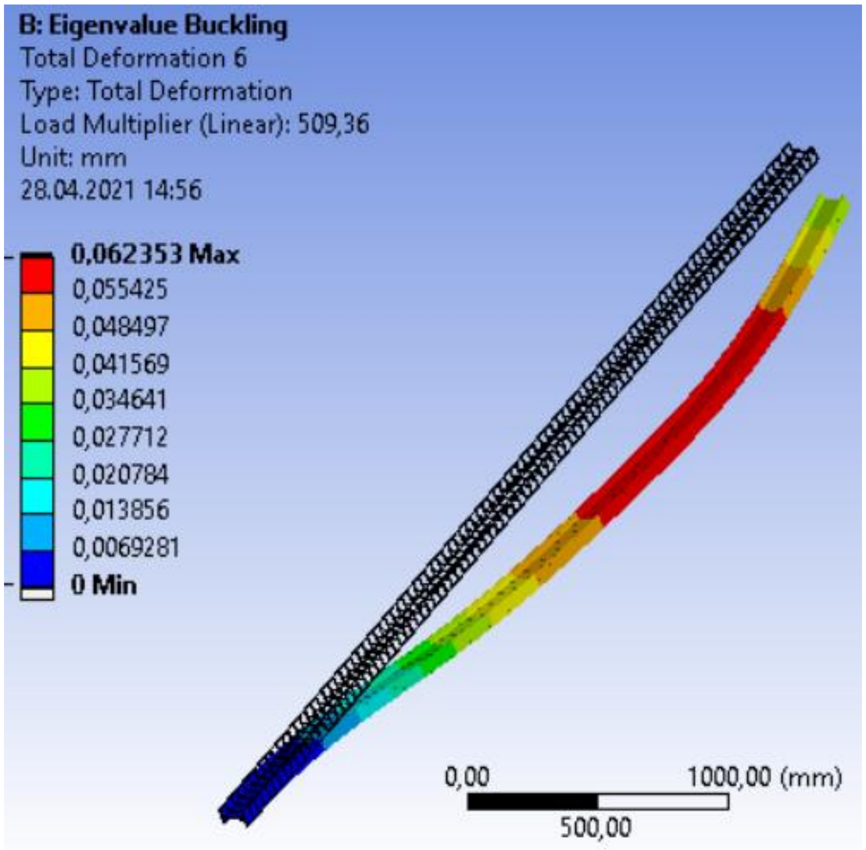
Typy úloh.

Praktické ukázky.

Stabilita ve statice

Schopnost konstrukce zachovat (odolat) nebo obnovit původní rovnovážný stav (tvar) soustavy bez samovolného narůstání deformace.



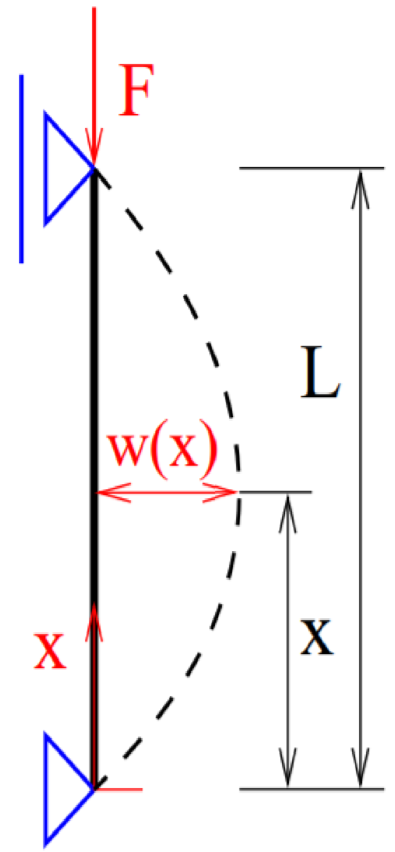


Teorie ideálního prutu – Eulerovo řešení

Diferenciální rovnice ohybové

čáry normálového zatížení:

$$EIw'' = -M = -F \cdot w(x)$$



Aproximace: $w(x) = A\sin\frac{\pi x}{l} \Rightarrow w''(x) = -A\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$

Po úpravě: $\left(-\frac{\pi^2}{l^2}EI + F\right)A\sin\frac{\pi x}{l} = 0$

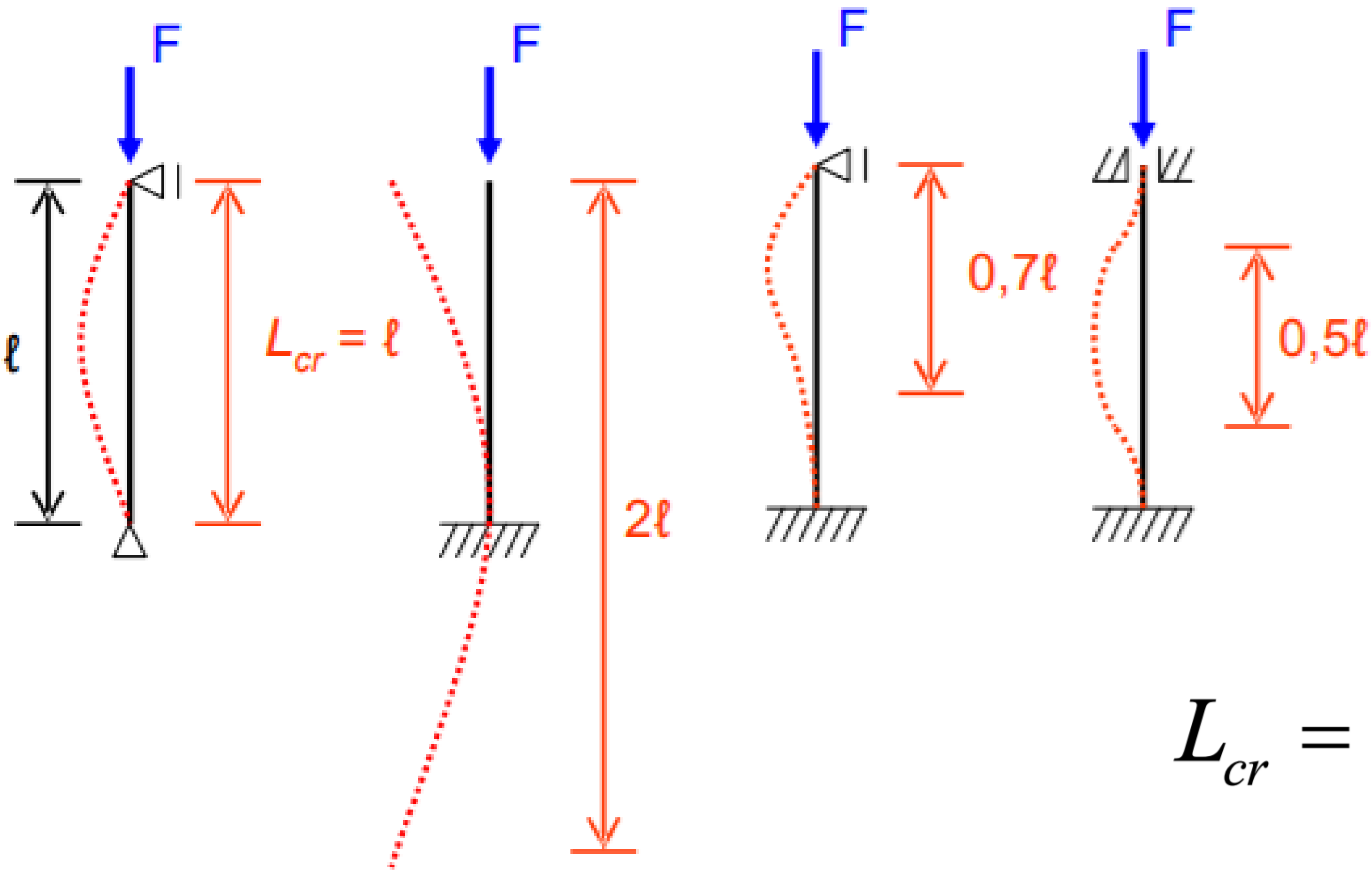
Řešení: $F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = F_{crit}$ Eulerova kritická síla

http://mech.fsv.cvut.cz/~leps/teaching/ankc/cviceni_08.pdf

Vzpěrné délky prutu

Souvisí s okrajovými podmínkami.

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = F_{crit}$$

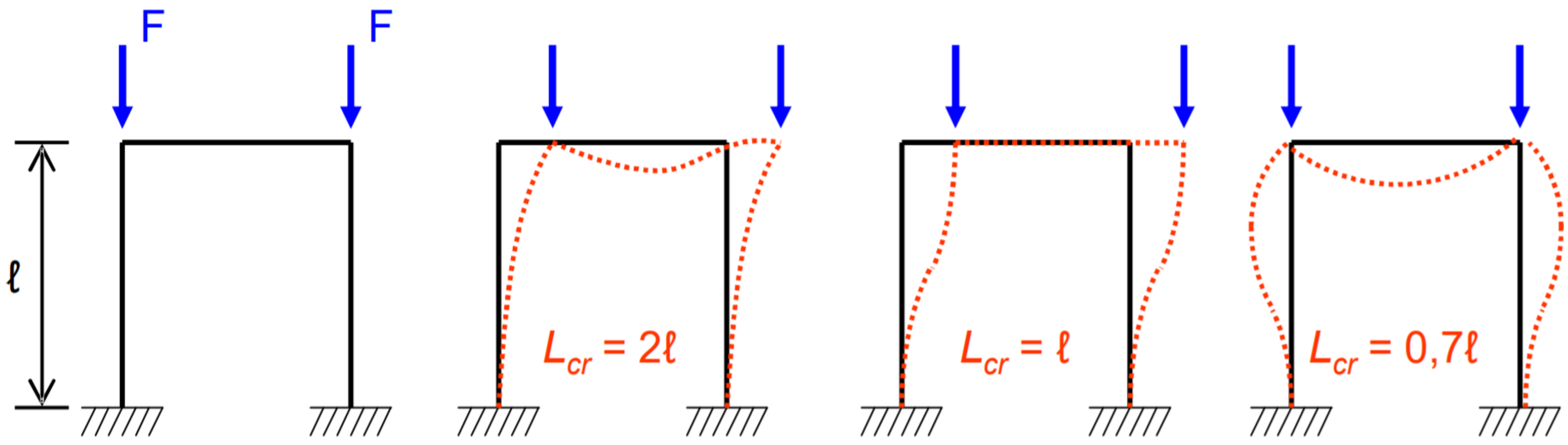


$$L_{cr} = \pi \sqrt{\frac{EI}{F_{crit}}}$$

http://mech.fsv.cvut.cz/~leps/teaching/ankc/cviceni_08.pdf

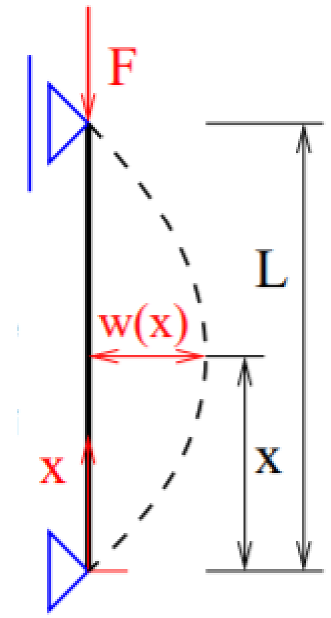
Vzpěrné chování konstrukce – lineární stabilita

- analýza kritického břemene na celou konstrukci,
- výpočet vzpěrných délek jednotlivých prutů,
- různé tvary vyboření stejné konstrukce,
- hledá se tvar s nejnižší kritickou silou.



http://mech.fsv.cvut.cz/~leps/teaching/ankc/cviceni_08.pdf

Ritzova metoda pro stability



Aproximace průhybu:

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Potenciální energie:

$$\Pi_e = -F\, u_b = -\frac{\pi^2}{4L} F a_1^2$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^L EI(w'')^2 dx = \frac{1}{2} EI A_1^2 \frac{\pi^4}{L^4}\int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L} dx = \frac{\pi^4}{4}\frac{EI}{L^3} a_1^2$$

Celá soustava:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \left(-\frac{\pi^2}{4L}F + \frac{\pi^4}{4}\frac{EI}{L^3}\right) a_1^2 \quad (+\Pi_N)$$

Minimum:

$$\frac{\Pi}{a_1} = \left(-\frac{\pi^2}{4L}F + \frac{\pi^4 EI}{4L^3}\right) 2a_1 = 0$$

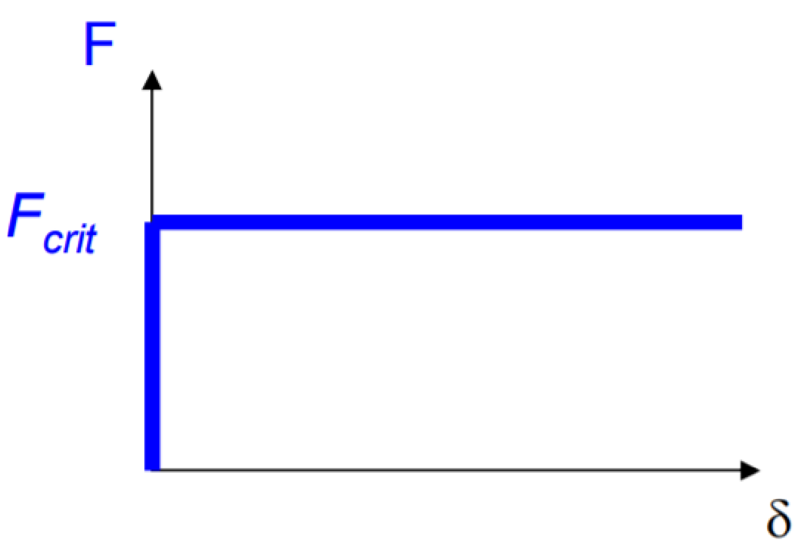
Řešení:

$$-\frac{\pi^2}{4L}F + \frac{\pi^4 EI}{4L^3} = 0$$

Ideální versus imperfektní prut

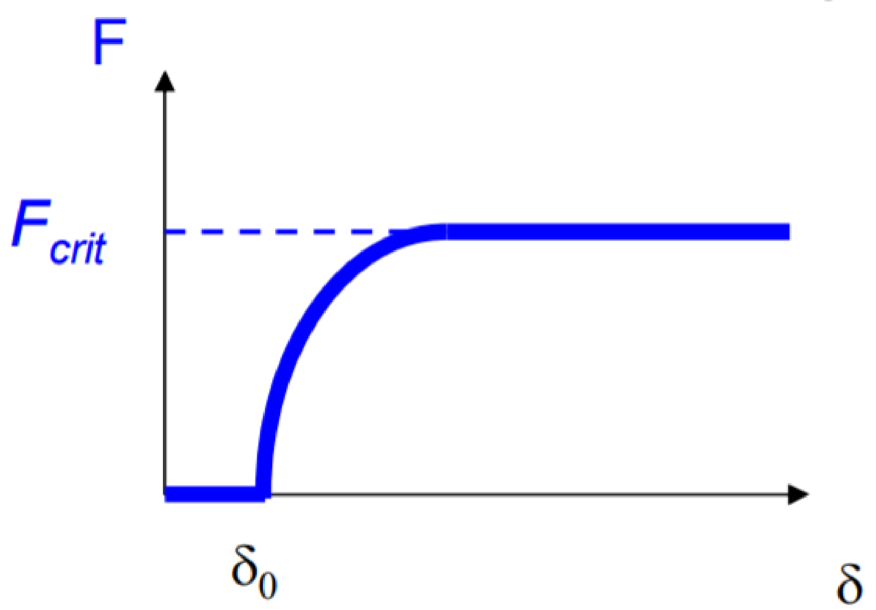
Ideální prut

Deformace se při zatížení nemění a po dosažení kritické síly se prut skokově deformuje.



Imperfektní prut

Deformace prutu narůstá postupně před kritickou silou a po jejím dosáhnutí pokračuje.



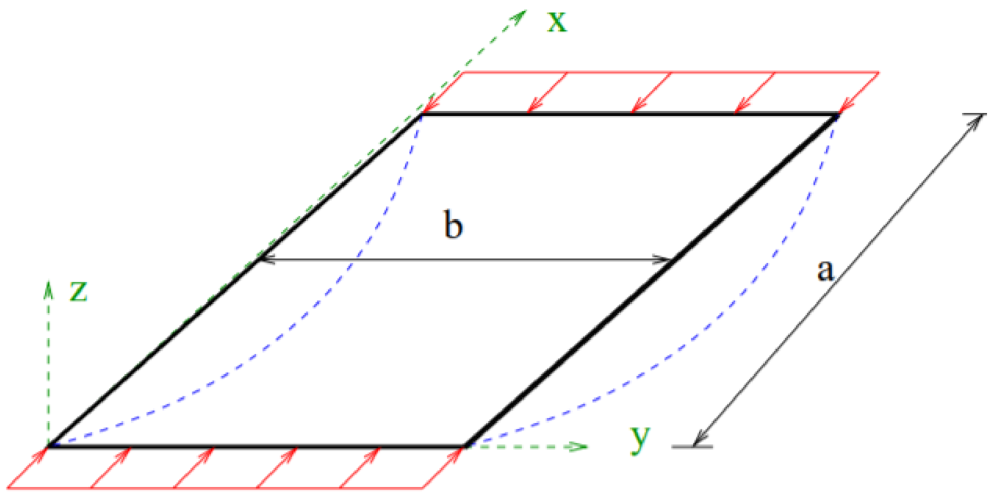
http://mech.fsv.cvut.cz/~leps/teaching/ankc/cviceni_08.pdf

Stabilita stěno-desek

Kombinace zatížení v rovině

(jako u stěny) a deformace

kolmo na rovinu (jako u desky).



Rovnice pro desku v rovině x-y:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Základní desková rovnice: $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Deska na všech okrajích prostě uložená

Hledané řešení:

$$w(x,y) = \delta \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m,n = 1,2,3,\ldots$$

Po dosazení:

$$\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = \frac{p}{D}\frac{n^2}{\pi^2 b^2}$$

Zbývá určit vhodná m, n. Doporučeno $m = 1$

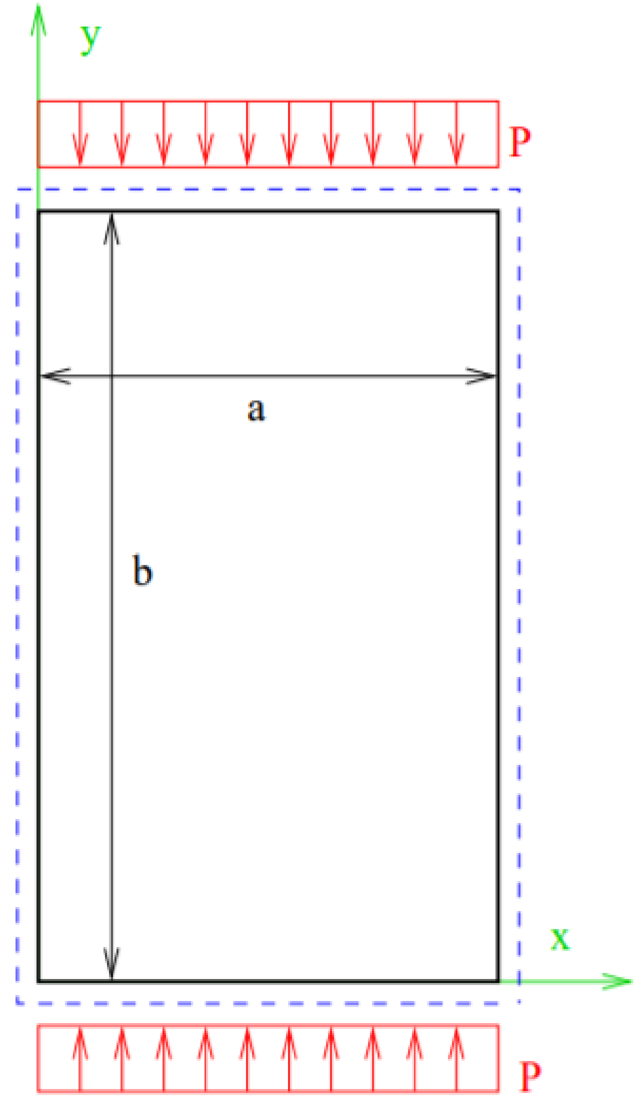
Protože P má být minimální $\frac{\partial P}{\partial N} = 0$:

$$D\pi^2 b^2 \left(\frac{1}{na^2} + \frac{n}{b^2}\right)\left(-\frac{1}{n^2 a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

Vyjde: $n = \frac{b}{a}$

$$P = \frac{4D\pi^2}{a^2} = \frac{Eh^3\pi^2}{3(1-\nu^2)a^2}$$

Což je hodnota hledaného kritického zatížení (pozor na to, že dle výchozích předpokladů musí být n celé číslo!).



Deska na 3 okrajích prostě uložená

Okraj $y = 0$:

$$w = 0, \quad m_x = 0 : -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$$

Okraj $y = b$:

$$m_x = 0 : -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$R_y = 0 : -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0\right)$$

kde R_y je svislá reakce na volném okraji.

Z okrajových podmínek pro $y = 0$:

$$C_1 = -C_2, \quad {}_3 = 0$$

A dále:

$$w = f(y) = A\sinh\alpha y + B\sin\beta y$$

Z okrajových podmínek pro $y = b$:

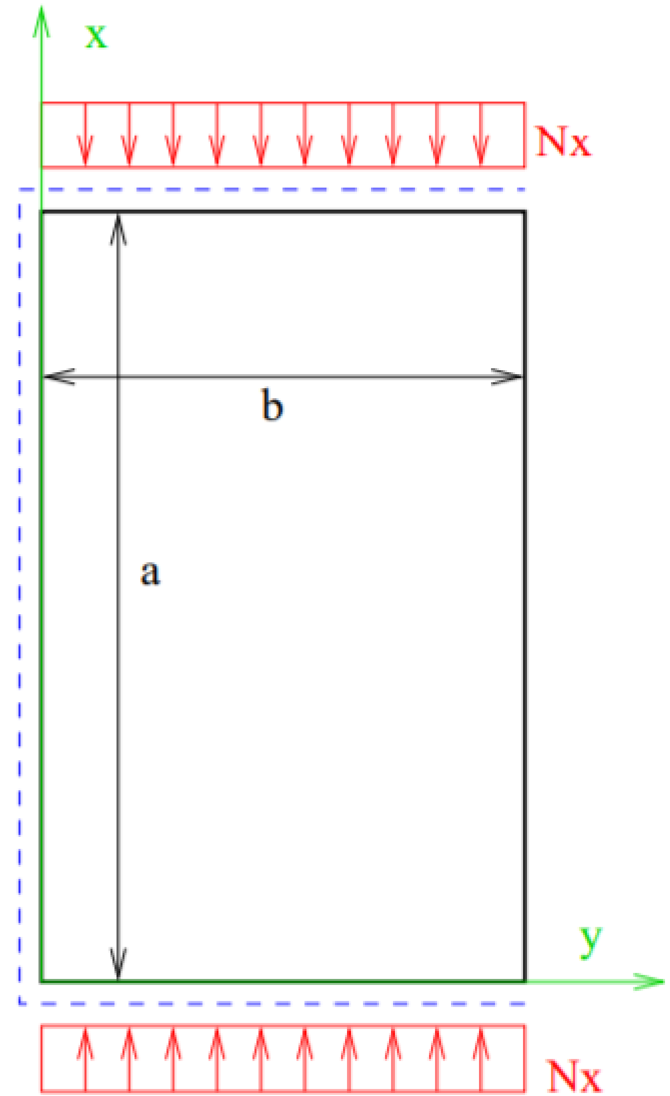
$$A\left(\alpha^2 - \nu\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\sinh\alpha b - B\left(\beta^2 + \nu\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\sin\beta b = 0$$

$$A\alpha\left(\alpha^2 - (2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\cosh\alpha b - B\beta\left(\beta^2 + (2-\nu)\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\cos\beta b = 0$$

Protože je třeba, aby $A \neq 0$ a $B \neq 0$:

$$\beta\left(\alpha^2 - \nu\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\tanh\alpha b = \alpha\left(\beta^2 + \nu\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\tanh\beta b$$

Výrazy α a β obsahují N_x, řešení lze najít numerickými metodami.

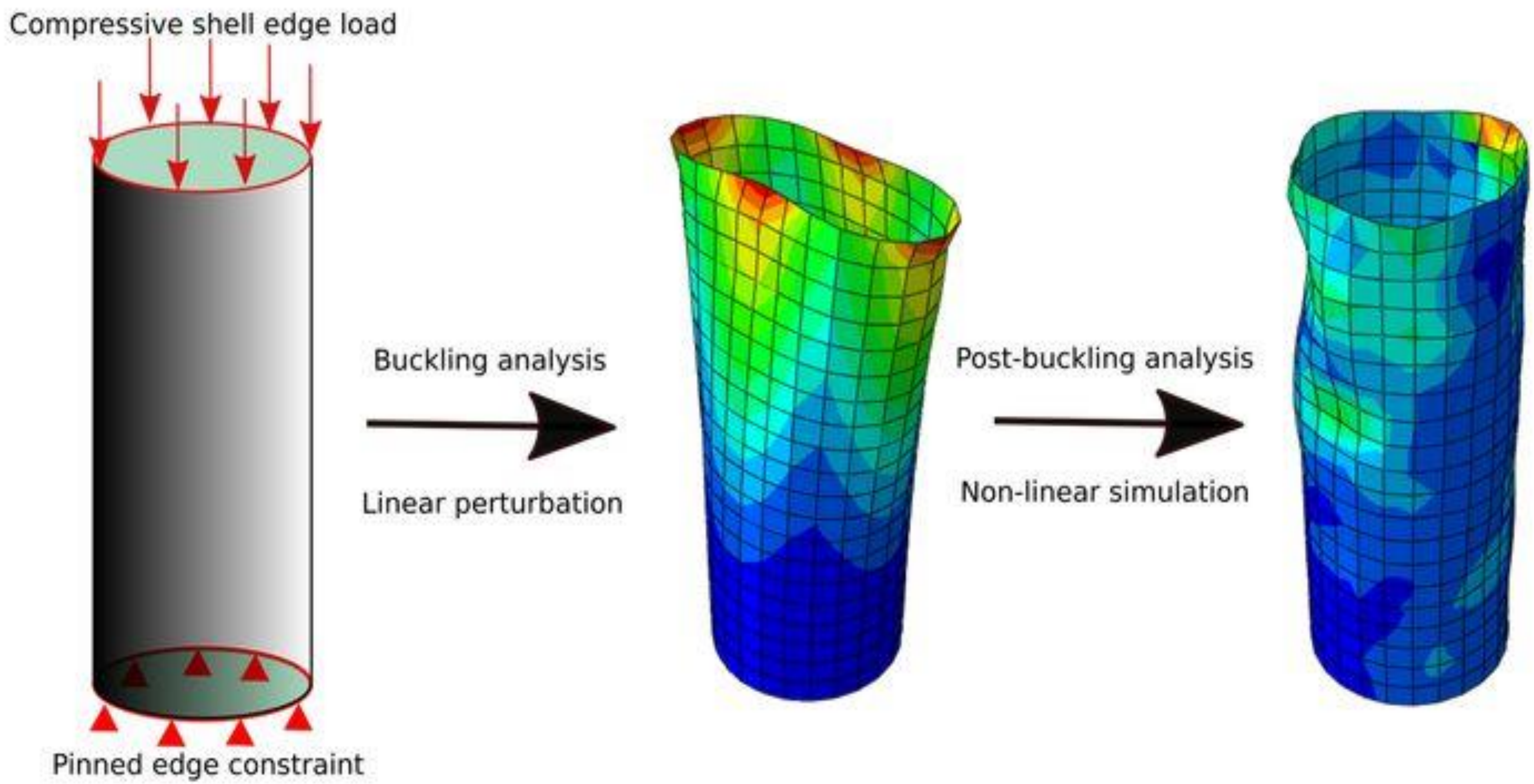


Praktické ukázky - železobeton

Praktické ukázky - ocel

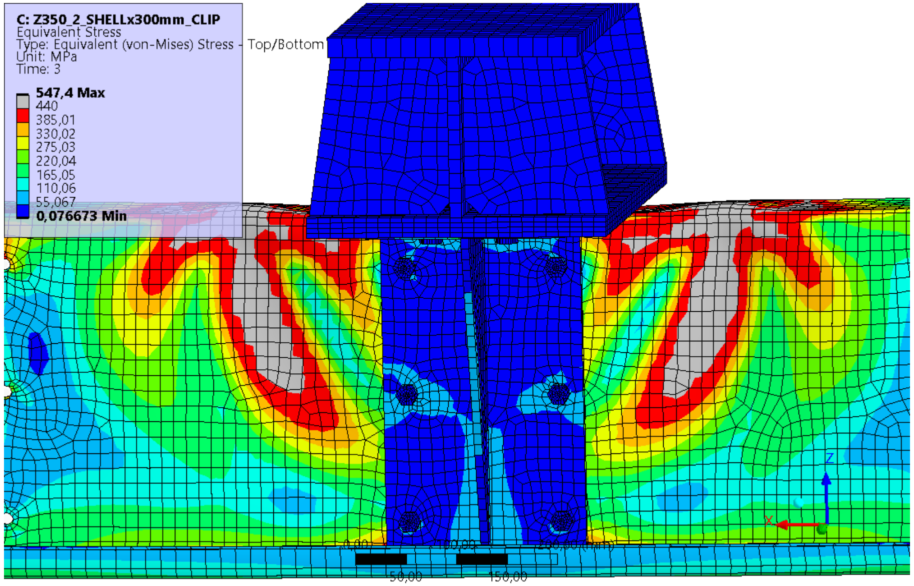
https://www.researchgate.net/publication/285908293_Experimental_Behaviour_of_Steel_Joints_under_Natural_Fire/figures?lo=1

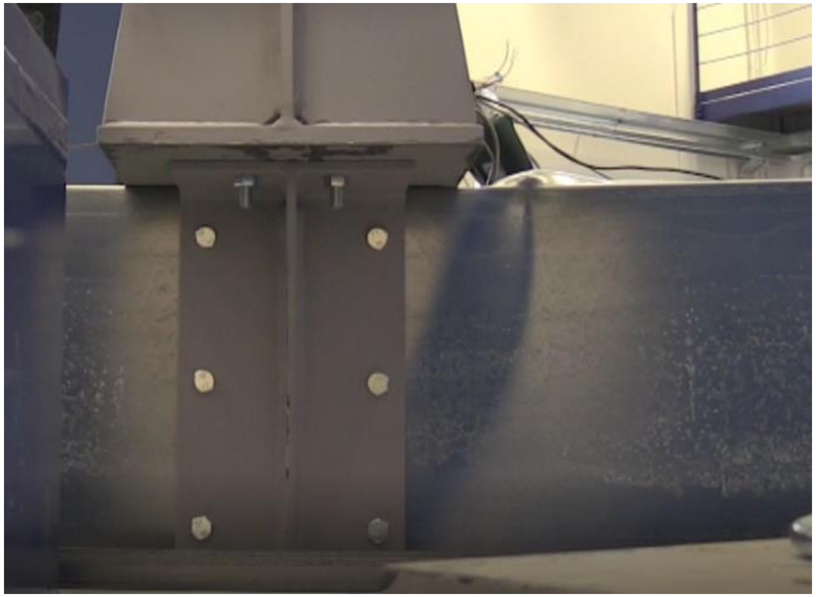
Praktické ukázky – tenkostěnný sloup

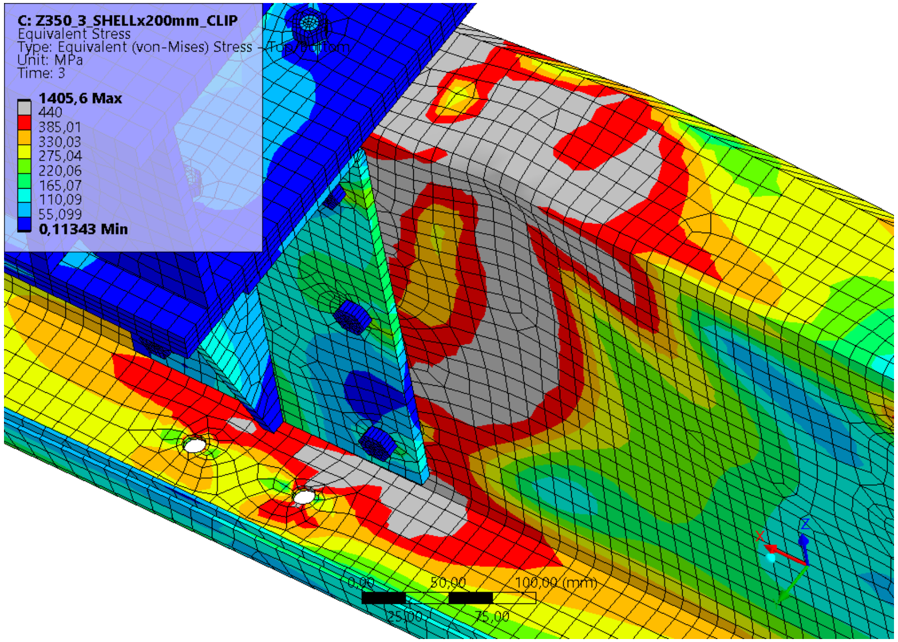


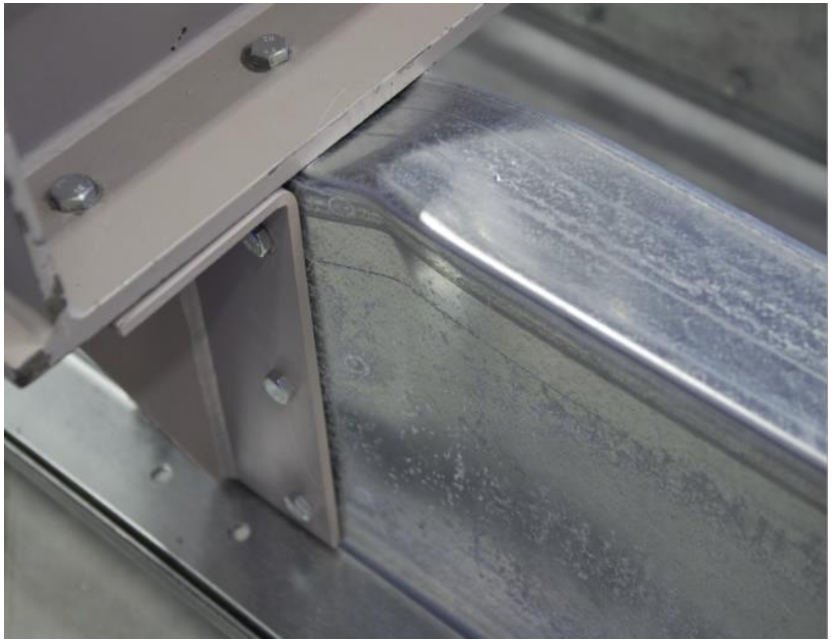
https://learnsharewithdp.wordpress.com/2017/10/04/fea-in-abaqus-buckling-analysis-of-cylindrical-shell/

Praktické ukázky – tenkostěnná vaznice









Pařenica 2021, disertační práce

Co nás čeká příště?

Základní předpoklady dynamiky.

Typické zatížení.

Kmitání a harmonické kmitání.

MKP a dynamika.

Explicitní a implicitní řešení.