

# Metoda konečných prvků

## Nosné desky

Ing. Petr Lehner

# Co se dnes dozvíte?

*Nosné desky.*

*Kirchhoffova a Mindlinova teorie.*

*Odvození konečného prvku.*

*MKP vs. metoda náhradních nosníků.*

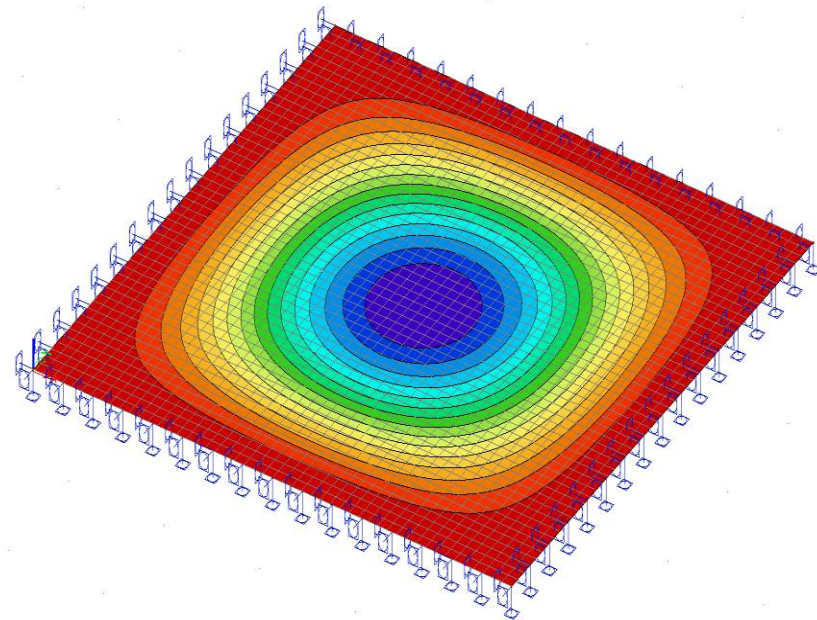
*Praktické poznatky ŽB desek.*

# Nosné desky

Deska je objemové těleso, které má jeden rozměr významně menší než zbývající dva.

Předpokládá se podepření a zatížení v ose nejmenšího rozměru (kolmo na plochu).

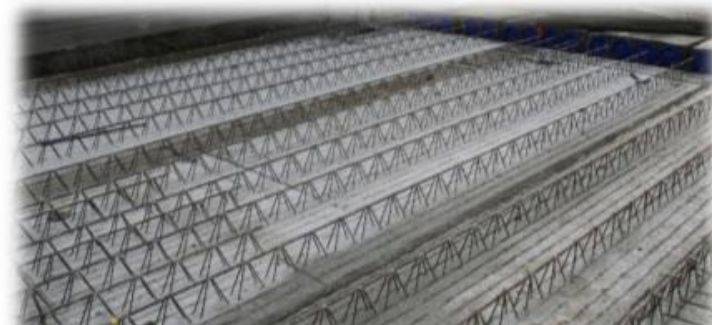
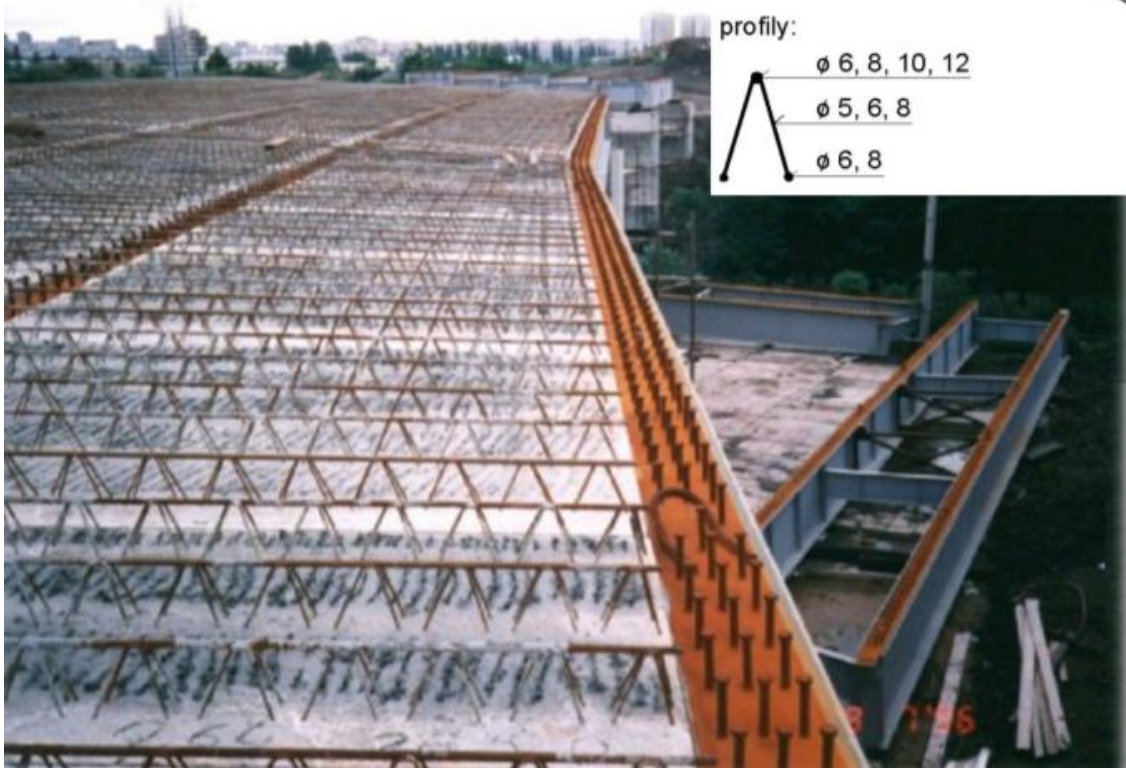
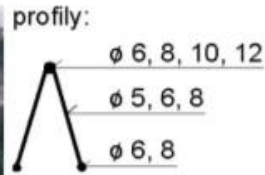
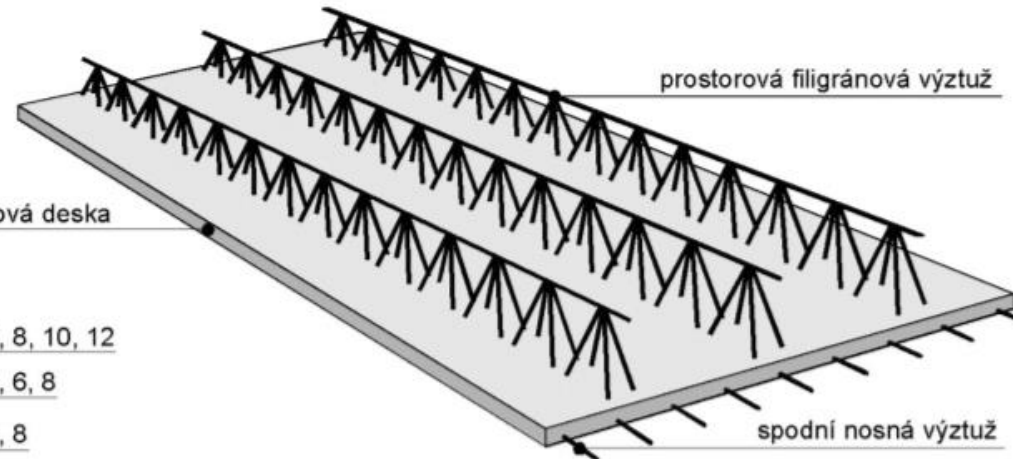
Většinou se bavíme o monolitickém nebo prefabrikovaném železobetonu.



# Příklady – ŽB při montáži



# Příklady – Filigránové ŽB spřažené desky

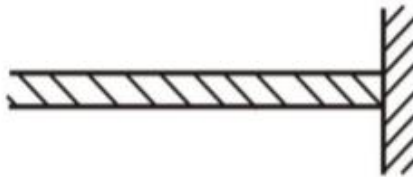


# Idealizované podepření

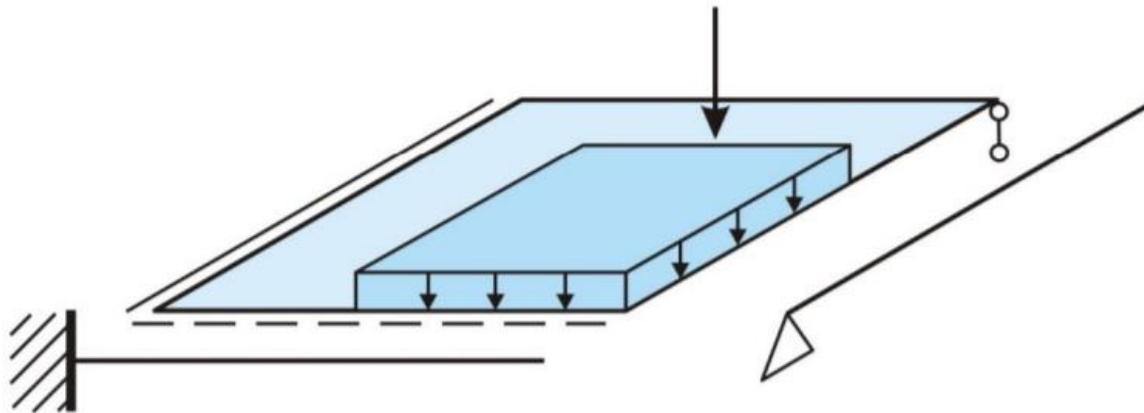
Kloub



Vetknutí



Volný konec



# Rozdělení desek

Podle rozměrů	
membrány	$h/l < 1/80$
velmi tenké desky	$h/l < 1/50 \times 1/80$
tenké desky	$h/l < 1/10 \times 1/50$
hrubé desky	$h/l < 1/5 \times 1/10$
prostorová tělesa	$h/l < 1/5$

# Rozdělení desek

## Podle deformace

s malými deformacemi

$$w_{\max} < l/300$$

$$w_{\max} < h/4$$

$$\varphi_{\max} < \pi/60$$

se středními nebo velkými deformacemi (nelineární úloha)

$$w_{\max} > l/300$$



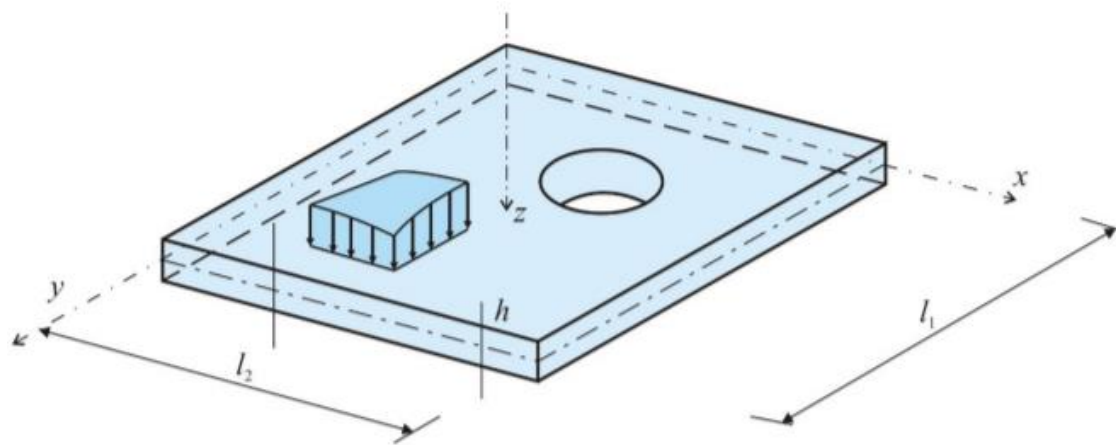
# Deskové teorie

Kirchhoffova teorie

Tenké desky:  $h/L > 1:10$

Mindlinova teorie

Tlusté desky:  $h/L < 1/5$



# Kirchhoffova teorie

Deformace střednicové plochy jsou malé

Normálová napětí  $\sigma_z$  jsou v porovnání s  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  napětím malá

a zanedbávající se.

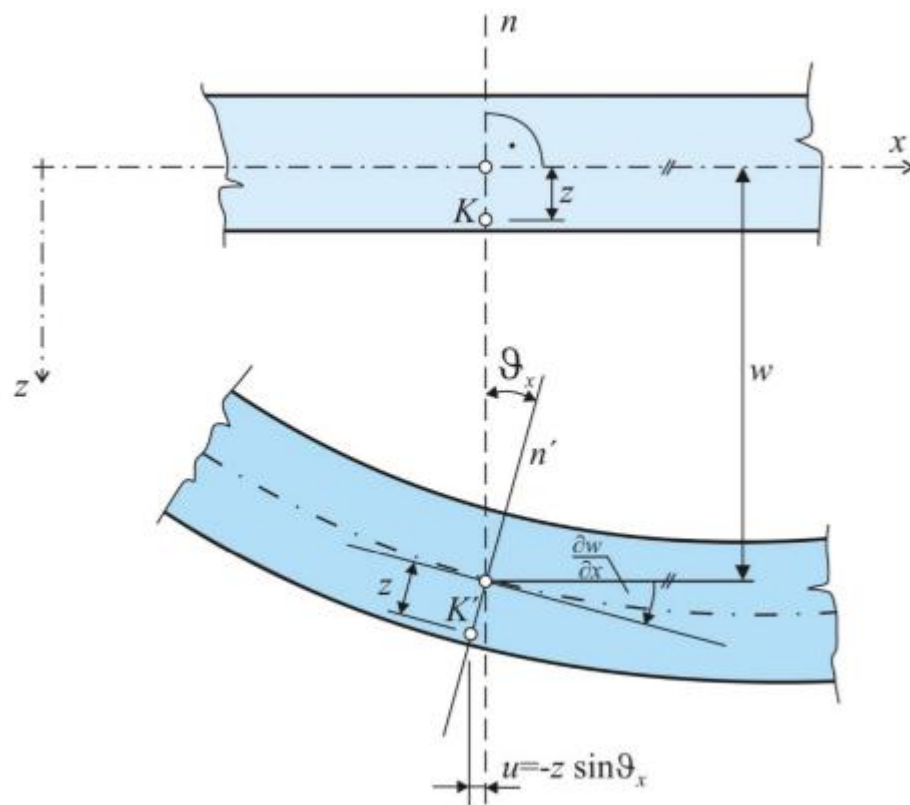
Body ležící před deformací

na normále ke střednici leží

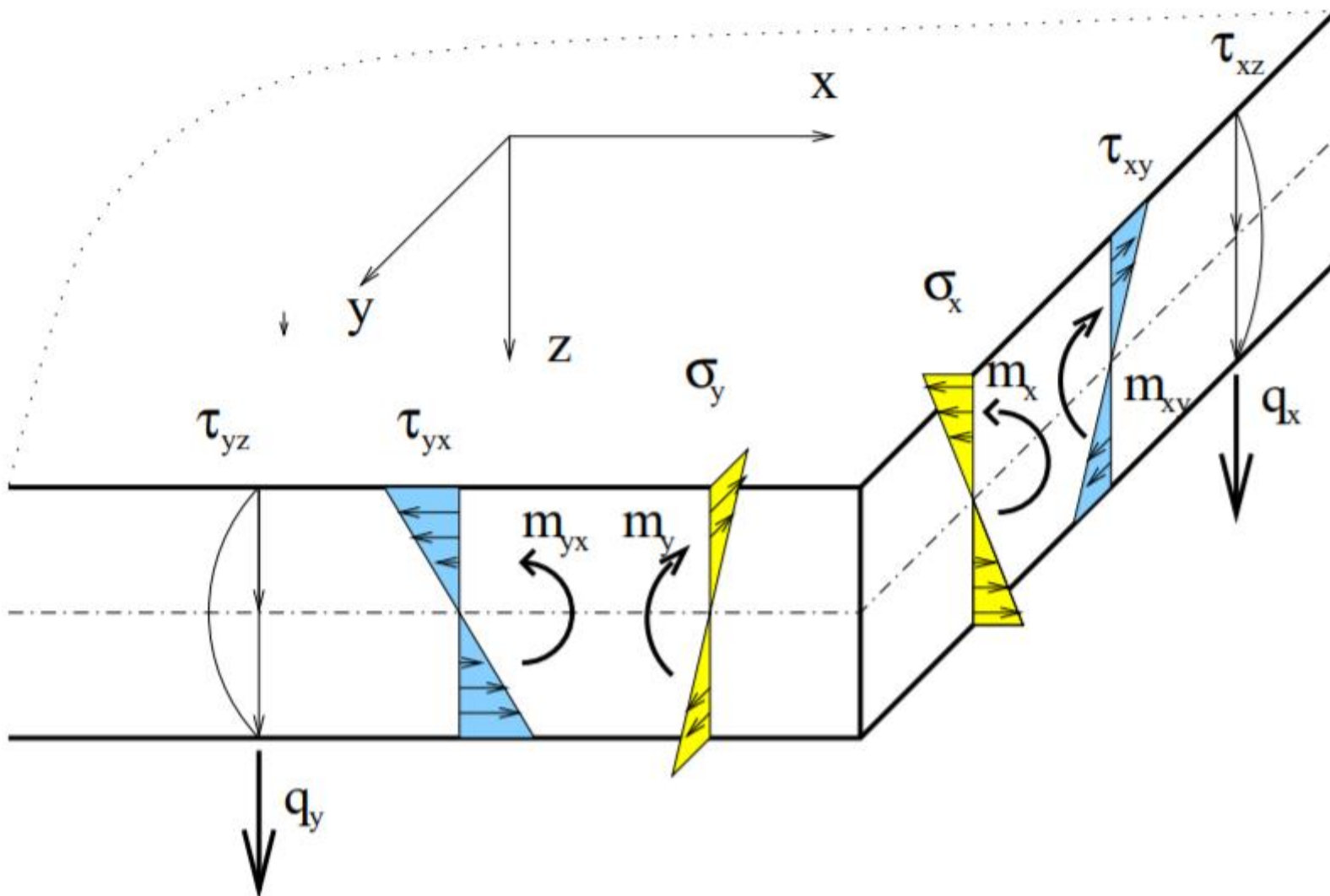
na ní i po deformaci.

Body na střednicové ploše desky

mají nulové normálové napětí.



# Kirch.: vnitřní síly



# Kirch.: vnitřní síly

Posunutí a pootočení :  $w, \varphi_x, \varphi_y$  [ $m$ ]

Napětí:  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  [ $Pa$ ]

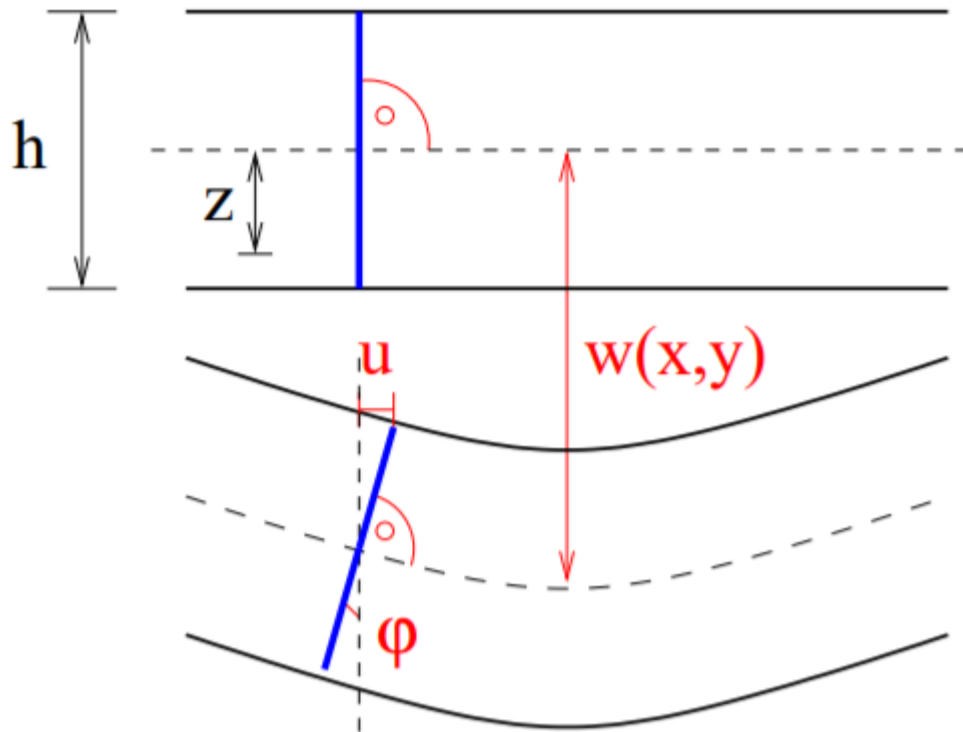
Poměrné deformace:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  [—]

## **Měrné vnitřní síly:**

Měrné momenty:  $m_x, m_y$  (ohybové),  $m_{xy}$  (krouticí) [ $\frac{N \cdot m}{m}$ ], [ $N$ ]

Měrné posouvající síly:  $q_x, q_y$  [ $\frac{N}{m}$ ]

# Kirch.: deformace a poměrné deformace



$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

# Kirch.: fyzikální rovnice a vnitřní síly

Fyzikální rovnice:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

(Hookeův zákon)

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma = -\frac{E}{2(1 + \mu)} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Měrné momenty:

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = -D \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Měrné posouvající síly:

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

# Kirch.: desková rovnice

Element desky – podmínky

rovnováhy:

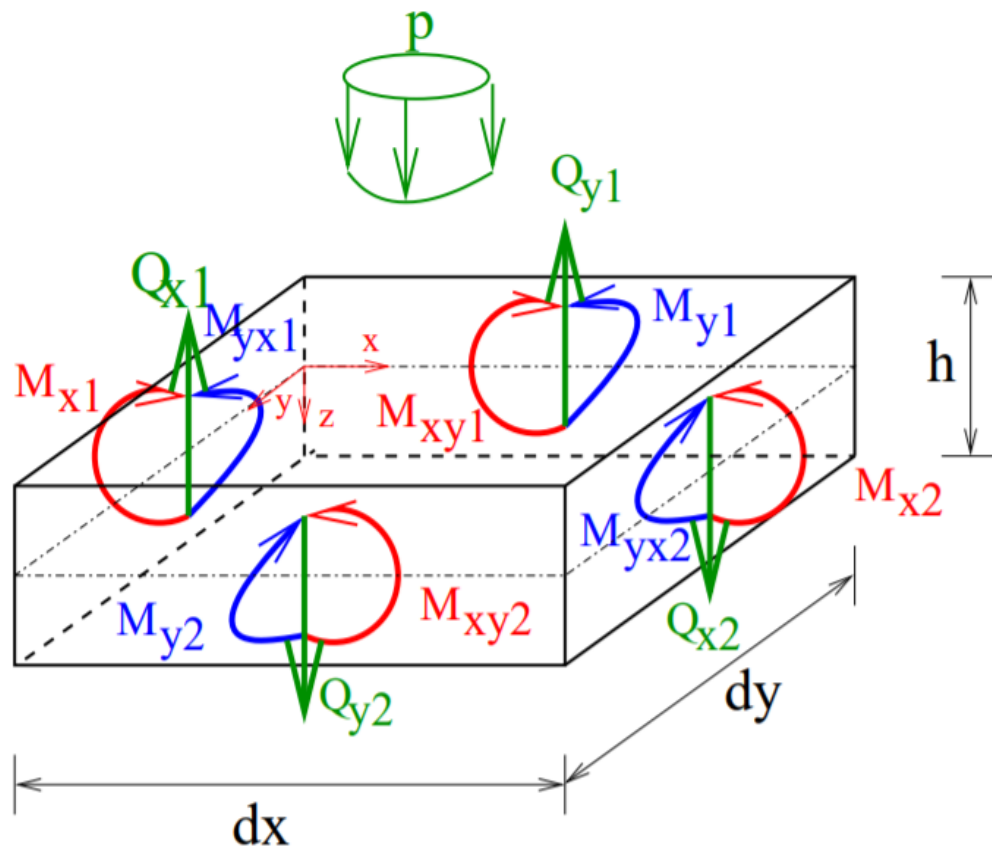
(aplikace všech momentových

a silových podmínek

rovnováhy a úprava)

Desková rovnice po úpravě:

Desková tuhost:



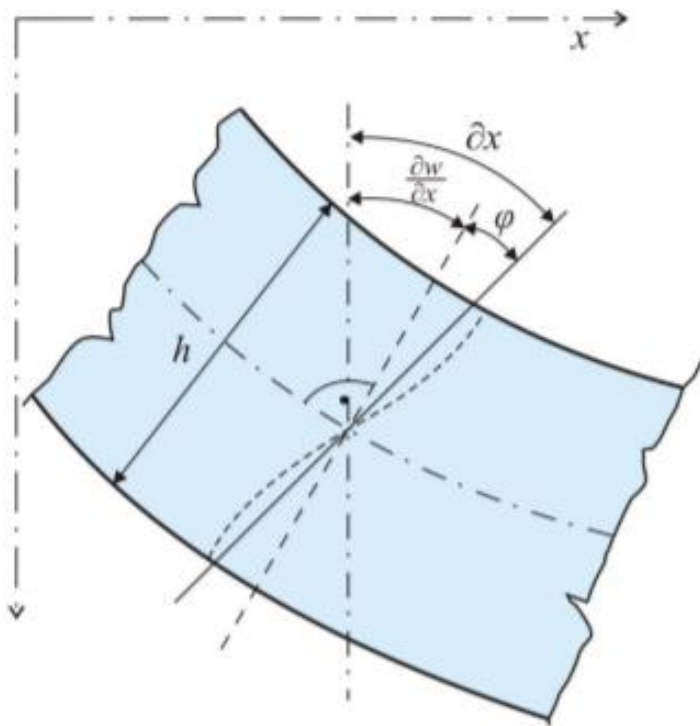
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

$$D = \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

# Mindlinova teorie

Předpoklady  $\sigma_z = \varepsilon_z = 0$  a  $u(x,y,0) = v(x,y,0) = 0$  zůstávají v platnosti.

Body normály ke střednicové rovině zůstávají po deformaci na přímce. Ta již obecně není normálou ke střednicové rovině.



Platí:

$$\vartheta_x(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x(x,y)$$

$$\vartheta_y(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y(x,y)$$

Vedle neznámé  $w$  je potřeba stanovit také hodnoty  $\varphi_x$  a  $\varphi_y$ , resp.  $\vartheta_x$  a  $\vartheta_y$ .

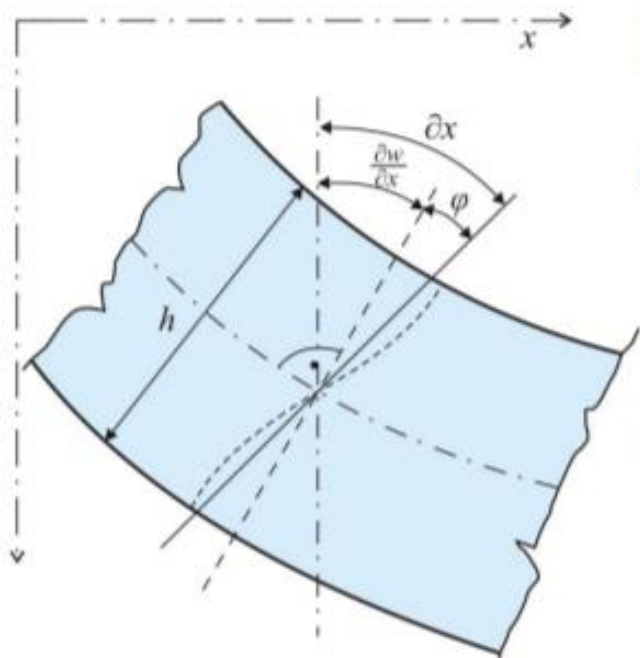


# Mindlinova teorie

Při výpočtu podle Mindlinovy teorie se místo jedné neznámé musí stanovit tři neznámé parametry.

U tenkých nosných desek se momenty určovaly:

$$m_x(x,y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad m_y(x,y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad m_{xy}(x,y) = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



Pro tlusté nosné desky se stanoví:

$$m_x = -D \left( \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} \right) \quad m_y = -D \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \right)$$
$$m_{xy} = -\frac{1-\mu}{2} D \left( \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right)$$

Měrné posouvající síly jsou:

$$q_x = \frac{Gh}{1,2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x \right) \quad q_y = \frac{Gh}{1,2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y \right)$$

# Mindlinova teorie

Místo jedné deskové rovnice, v níž vystupovala jediná neznámá  $w(x,y)$  se v daném případě z podmínek rovnováhy získají tři rovnice:

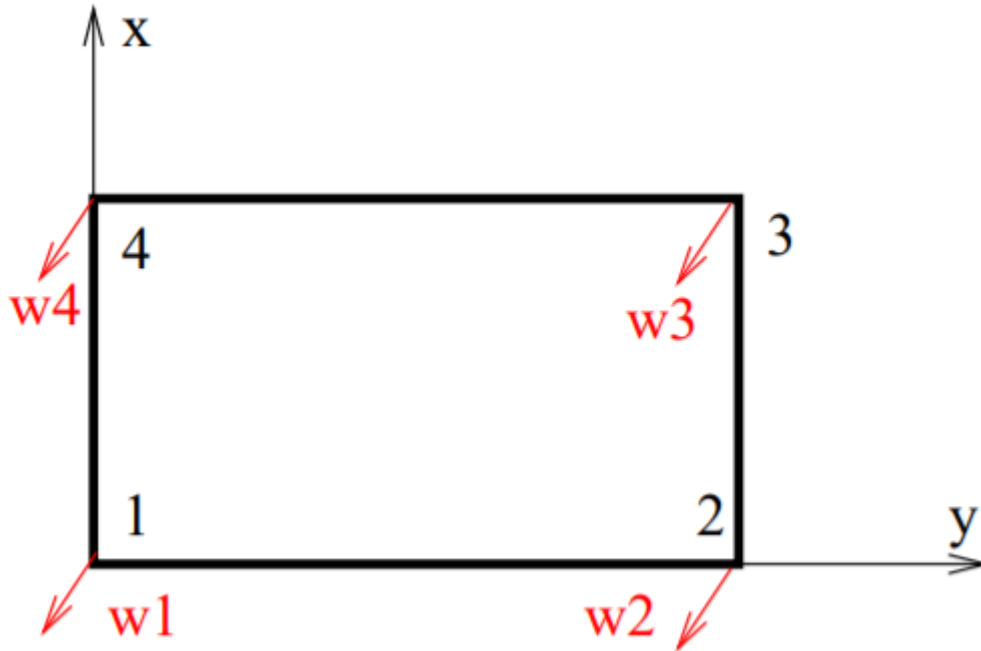
$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}\right) + (1+\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{Gh}{0,6D}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x\right) = 0$$

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2}\right) + (1+\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{Gh}{0,6D}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \Phi = -\frac{1,2}{Gh} p$$

kde  $\Phi = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}$

# Odvození konečného prvku – deska (1)



Neznámé parametry deformace:

$w, \varphi_x, \varphi_y$  v každém uzlu

(posun + pootočení x a y).

Celkem 12 neznámých.

$$r = \{w_1, \varphi_{x,1}, \varphi_{y,1}, w_2, \varphi_{x,2}, \varphi_{y,2}, w_3, \varphi_{x,3}, \varphi_{y,3}, w_4, \varphi_{x,4}, \varphi_{y,4}\}$$

$$\varphi_{x,i} = \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \varphi_{y,i} = \frac{\partial w_i}{\partial y}.$$

# Odvození konečného prvku – deska (2)

Geometrické rovnice:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{ w \}$$

Fyzikální rovnice:

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Aproximace neznámých parametrů:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\ + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3$$

$$\varphi_x = a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 3a_7 x^2 + 2a_8 xy + a_9 y^2 + 3a_{11} x^2 y + a_{12} y^3$$

$$\varphi_y = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 + a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2$$

# Odvození konečného prvku – deska (3)

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS.$$

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}$$

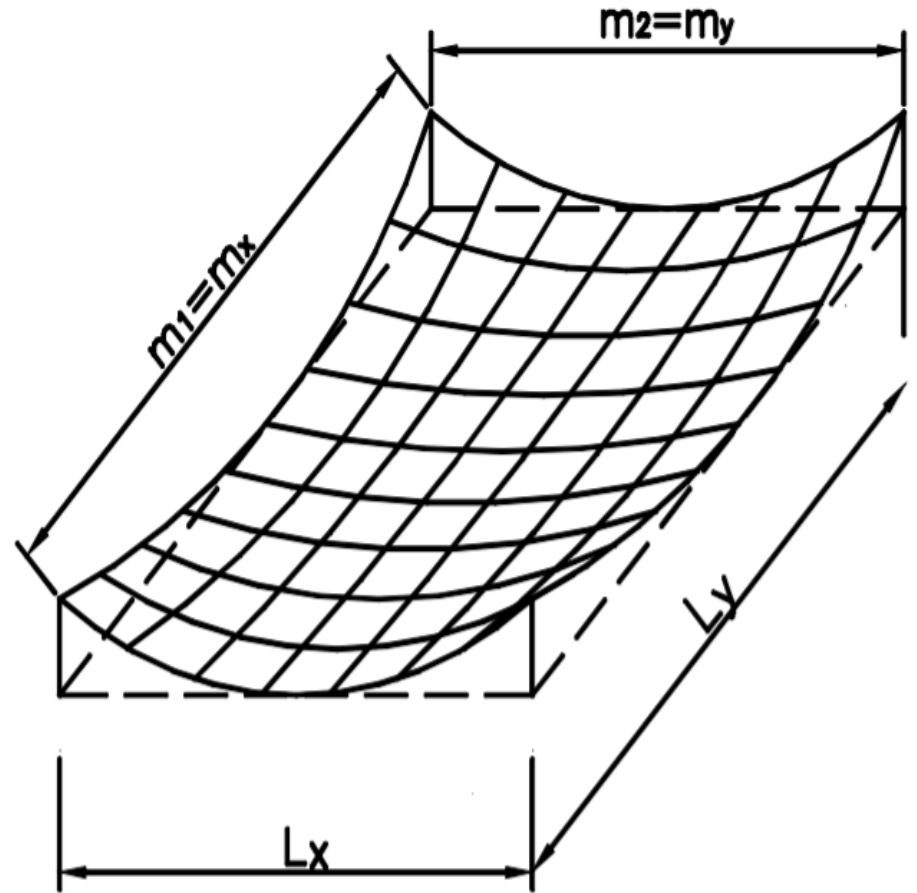
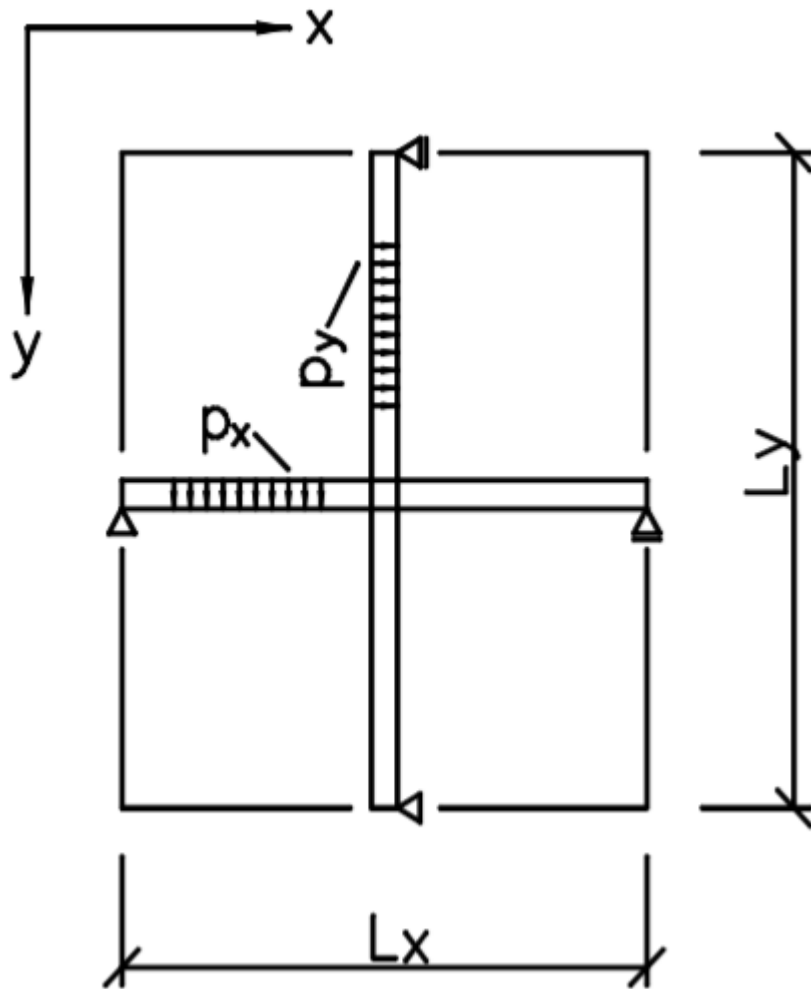
Matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV,$$

Zatěžovací vektor konečného prvku:

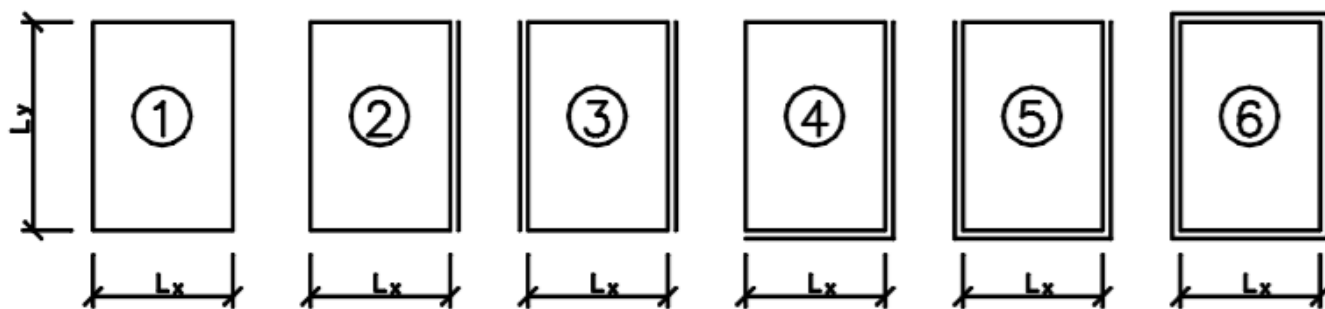
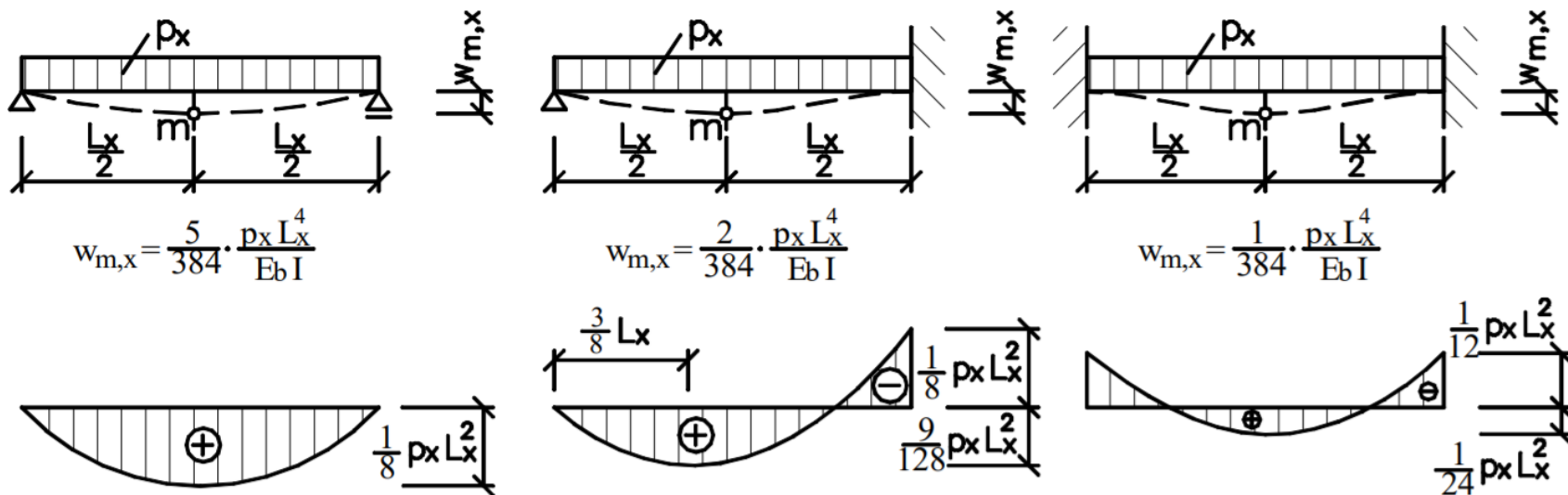
$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS.$$

# MKP vs. metoda náhradních nosníků



# MKP vs. metoda náhradních nosníků

Průhyb a ohybové momenty náhradního nosníku:



$$C_{x,1} = \frac{1}{\lambda + 1}, C_{x,2} = \frac{1}{\frac{2}{5}\lambda + 1}, C_{x,3} = \frac{1}{\frac{1}{5}\lambda + 1}, C_{x,4} = \frac{1}{\lambda + 1}, C_{x,5} = \frac{1}{\frac{1}{2}\lambda + 1}, C_{x,6} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

# MKP vs. metoda náhradních nosníků

MKP	Náhradní nosníky
Použitelné na jakýkoli tvar	Obdélníkové desky
Můžeme zahrnout otvor	Bez větších otvorů
Proměnné zatížení	Rovnoměrné zatížení
Proměnná tloušťka	Konstantní tloušťka
Výpočet vnitřních sil kdekoli	Výpočet podporových momentů



# Praktické poznatky – lokální podepření

Při použití plošných prvků (deska, skořepina) pro stropy a prutů pro sloupy nelze pomocí MKP určit vnitřní síly nad podporami – sloupy. Důvodem je singularita vznikající na styku bodové podpory (prutu) a desky.

**Pozor nepomůže zjemnění sítě – chyba může narůstat.**

Řeší se několika postupy

- například oddělením výsledků kolem sloupů,
- aplikací jiných meto v oblasti podpor atd.

# Praktické poznatky – jednosměrná deska

Použití desky s jednou delší stranou.

Případně chceme

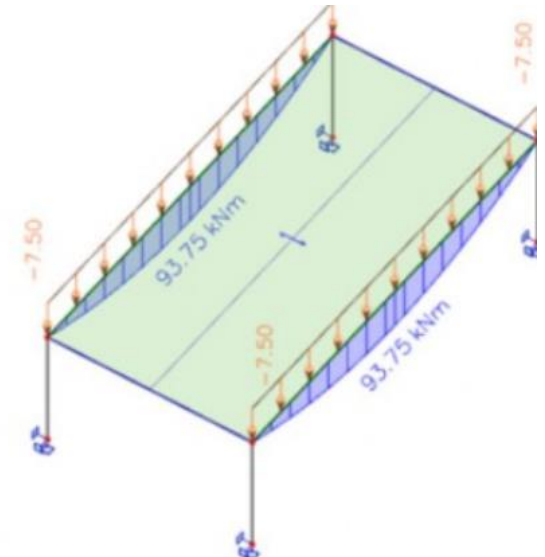
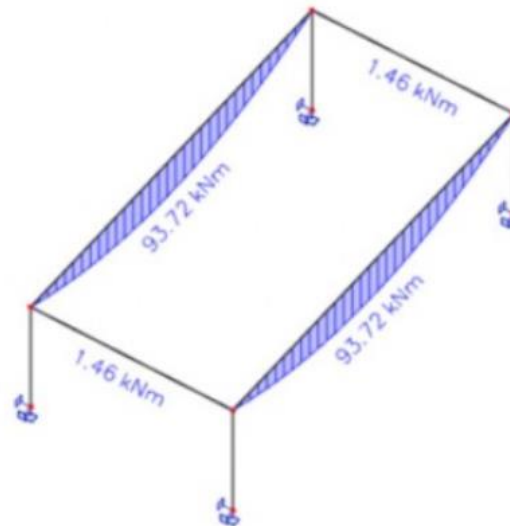
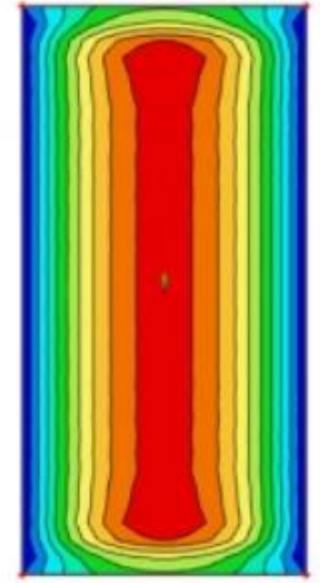
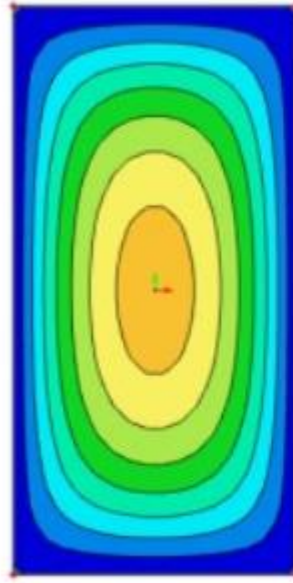
zatěžovat jen v jednom

směru.

Možnost nastavit

ortotropní řešení přímo

ve Scia engineering.



# Co nás čeká příště?

*Kontaktní úlohy.*

*Typické příklady.*

*Tření v kontaktu.*

*Přístup k řešení kontaktů.*

*Nastavení kontaktů – Ansys.*