

Metoda konečných prvků

Vedení tepla

Ing. Petr Lehner

Co se dnes dozvíte?

Vedení tepla pomocí MKP.

Stacionární úloha.

Nestacionární úloha.

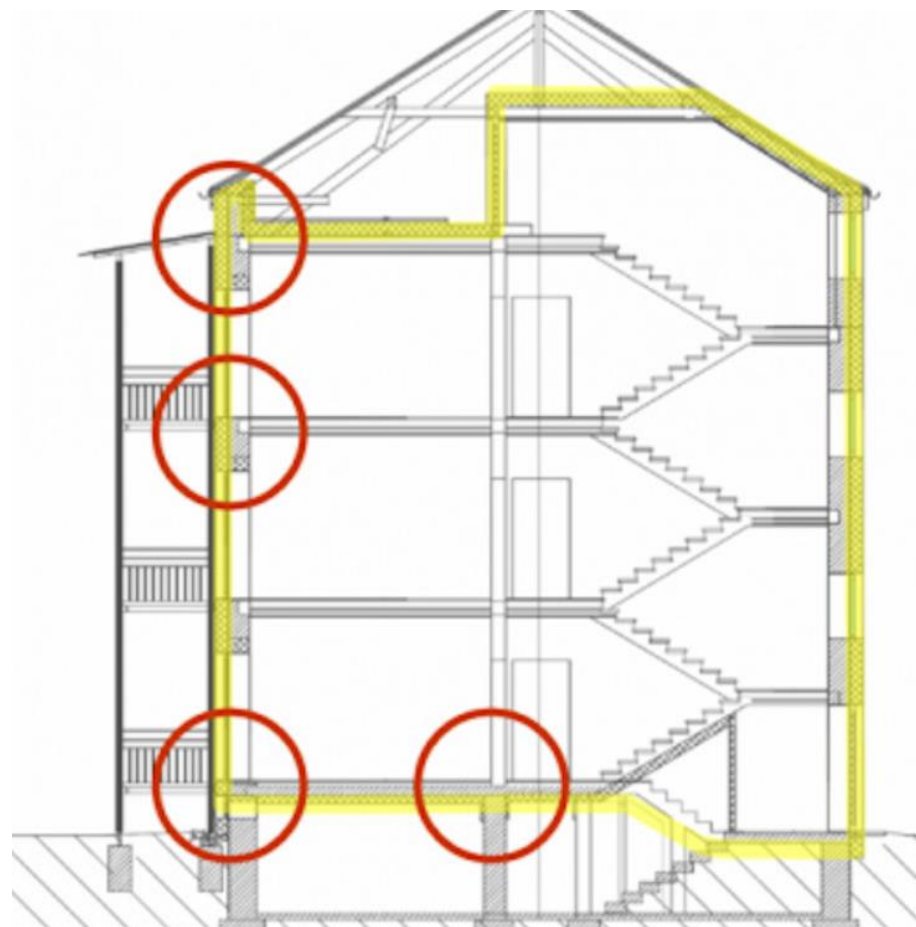
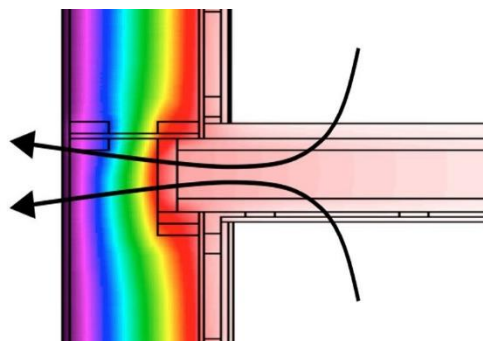
Difuzní úlohy v MKP.

Teplotní úlohy prakticky.

Řešení úloh vedení tepla

V kombinaci s MKP se využívá na:

- hledání tepelných mostů,
- posouzení izolačních vlastností,
- aplikace zatížení teplotou na statickou úlohu .



Lze aplikovat na šíření vlhkosti nebo jiných látek v pevném skupenství.

Souvislost vedení tepla a ostatních úloh



stacionární teplotní úloha

základní statické úlohy

nestacionární teplotní úloha

dynamická úloha mechaniky

Základní rovnice vedení tepla

$$E_{in} + E_{gen} = \Delta U + E_{out}$$

E_{in} . . . teplo vstupující do úlohy ($[W h]$, $[J]$),

E_{gen} . . . teplo generované vnitřním zdrojem ($[J]$),

ΔU . . . změna energie ($[J]$),

E_{out} . . . vystupující teplo ($[J]$).

Základní rovnice vedení tepla

$$q_x A dt + Q A dx dt = \Delta U + q_{x+dx} A dt$$

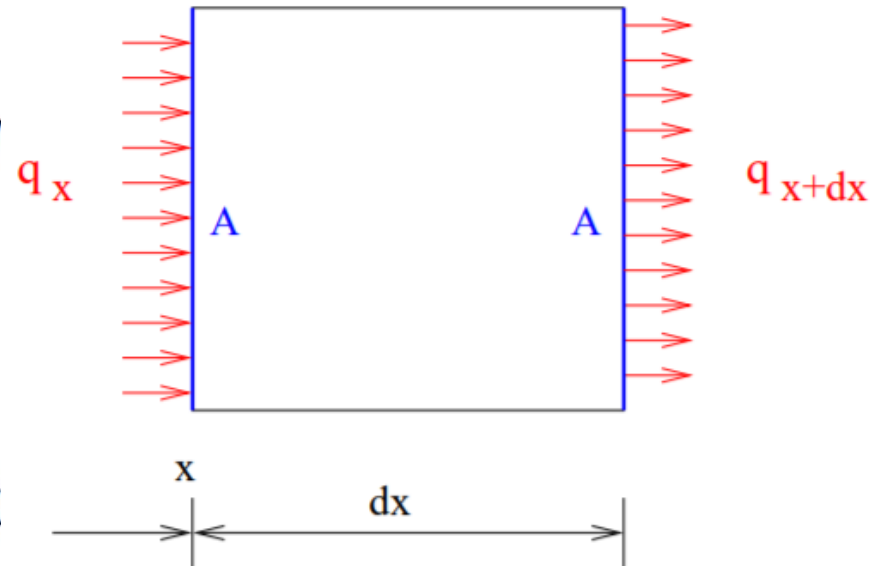
q_x ... teplo vstupující do úlohy na okraji x (*tepelný tok*), ($[W/m^2]$),

q_{x+dx} ... teplo vstupující do úlohy na okraji $x + dx$ ($[W/m^2]$),

t ... čas ($[s]$),

Q ... vnitřní zdroj ($[W/m^3]$),

A ... plocha kolmá na tepelný tok ($[m^2]$).



Fourierův zákon

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

q_x . . . tepelný tok (teplo vstupující do úlohy), ($[W/m^2]$),

λ_x . . . tepelná vodivost [$W/(m K)$]

T . . . teplota

$\frac{\partial T}{\partial x} = g_x$. . . tepelný gradient [$K m^{-1}$]

Fourierův zákon a aplikace Taylorova rozvoje

$$q_{x+dx} = - \left[\lambda_x \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dx \right]$$

Změnu energie ΔU můžeme zapsat jako

$$\Delta U = c (\rho A dx) dT$$

c . . . měrná tepelná kapacita ($[(W \ h)/(kg \ K)]$)

ρ . . . objemová hmotnost (kg/m^3)

Stacionární a nestacionární vedení tepla

Dosazením výrazů

$$\Delta U = c (\rho A dx) dT$$

a

$$q_x + dx = - \left[\lambda_x \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dx \right]$$

do základní rovnice

$$q_x A dt + Q A dx dt = \Delta U + q_{x+dx} A dt$$

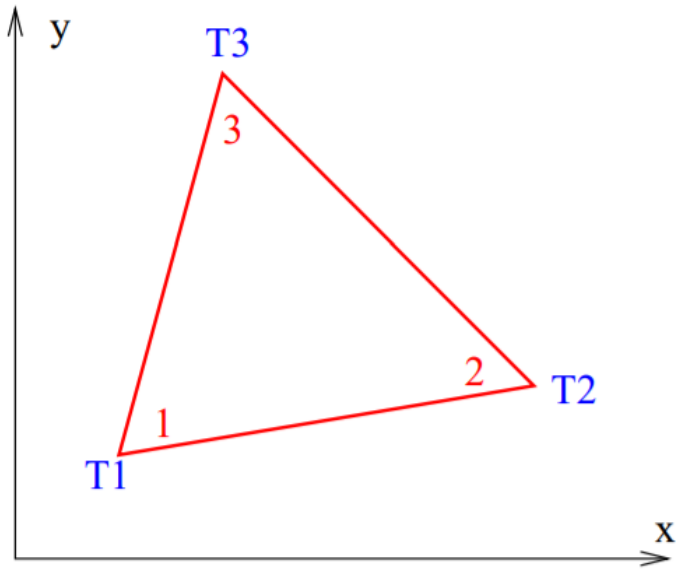
získáme **rovnici nestacionárního vedení tepla:**

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) + Q = \frac{c\rho dT}{dt}$$

získáme **rovnici stacionárního vedení tepla:**

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0$$

Odvození prvku (1)



$$\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, \}^T$$

Aproximace neznámých teplot:

$$T(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3$$

Maticově ($\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{a}$):

$$\{ T \} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Odvození prvku (2)

V uzlech 1, 2, 3 můžeme napsat aproximace teplot ($\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$):

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{T}$ a $\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{a}$ vznikne $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}$, kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{U}$

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix},$$

tedy:

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Odvození prvku (3)

Z $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$ plyne: $\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$, kde \mathbf{S}^{-1} má tvar:

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}}{x_1 - (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)},$$

Pak: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}}{x_1 - (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Odvození prvku (4)

Potenciální energie „vnitřních sil“:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

Po dosazení z jednotlivé matice je možné psát:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r}^T$$

Stručně:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r}$$

Odvození prvku (5)

Potenciální energie „vnějších sil“:

$$\Pi_e = \int_V \mathbf{Q}^T dV,$$

kde \mathbf{Q} je vektor tepelných toků:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Odvození prvku (6)

Můžeme napsat známý vztah

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F},$$

kde \mathbf{F} je vektor zatížení a \mathbf{K} . . . matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV.$$

Protože všechny matice v integrálu obsahují jen konstanty, můžeme psát:

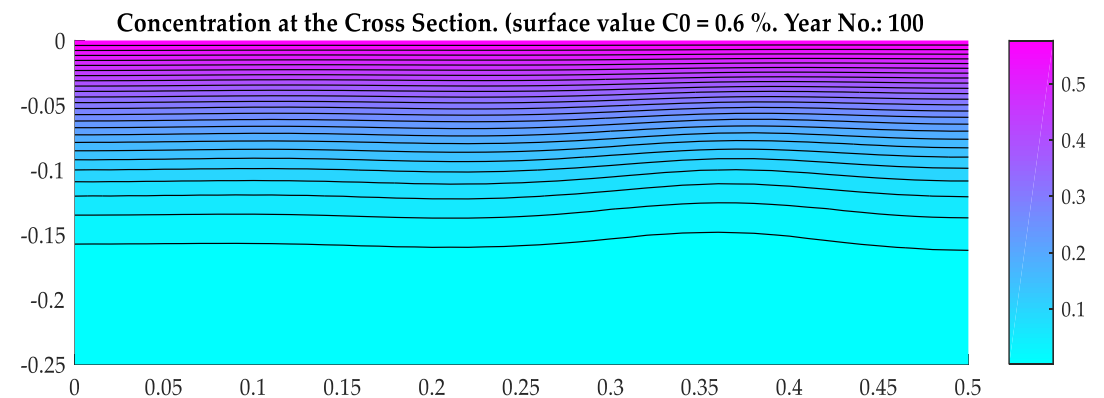
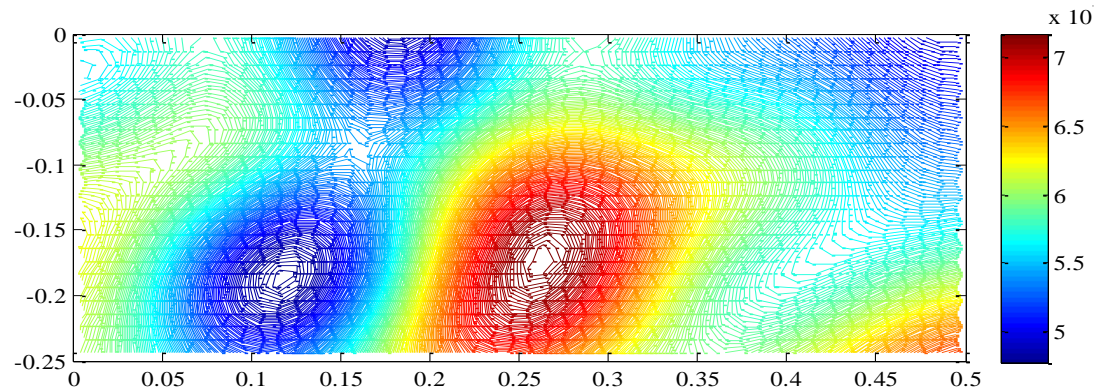
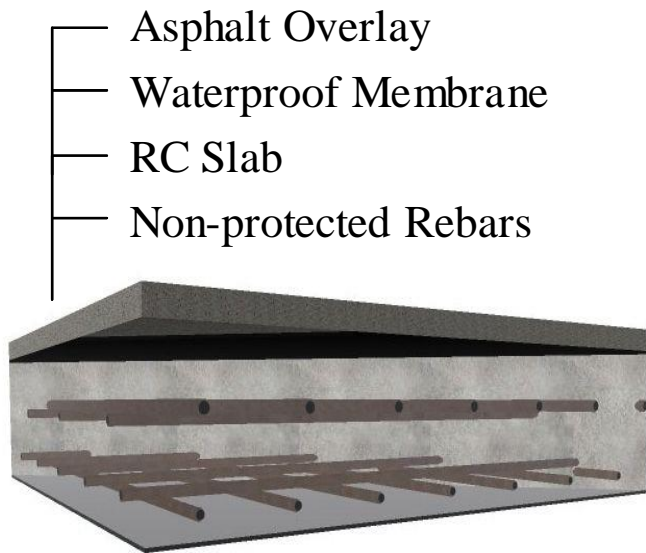
$$\mathbf{K} = t A \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1},$$

kde t . . . tloušťka konečného prvku.

Numerické modelování difuze chloridových iontů

Pravděpodobnostní odhad doby do iniciace koroze železobetonových mostovek

- využití analytických a vlastních numerických nástrojů,
- několik variant zohledňujících trhliny v krytí betonu, hydroizolaci, epoxidovou ochranu výztuže, alternativní betonové směsi apod.



Teplotní úlohy prakticky

Teplotní analýza
požárního úseku

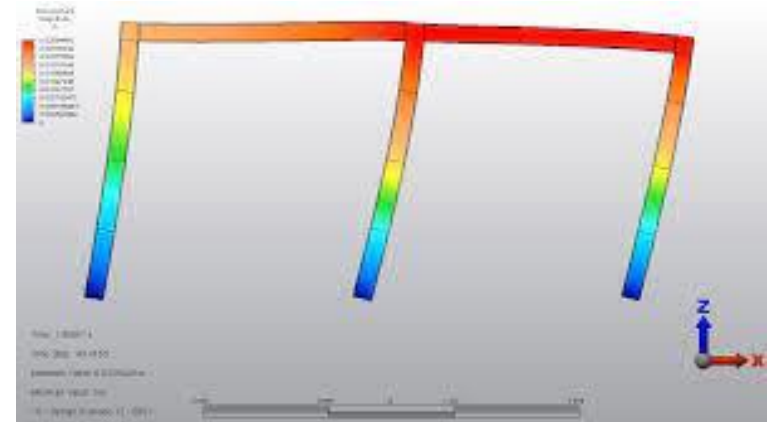
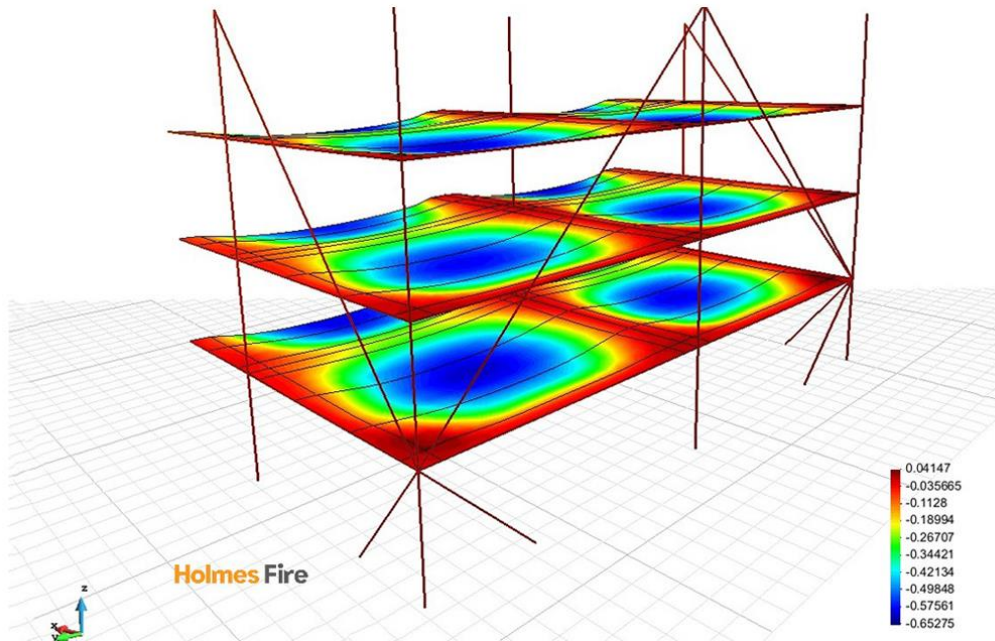
Přestup tepla
do konstrukce

Návrhový model

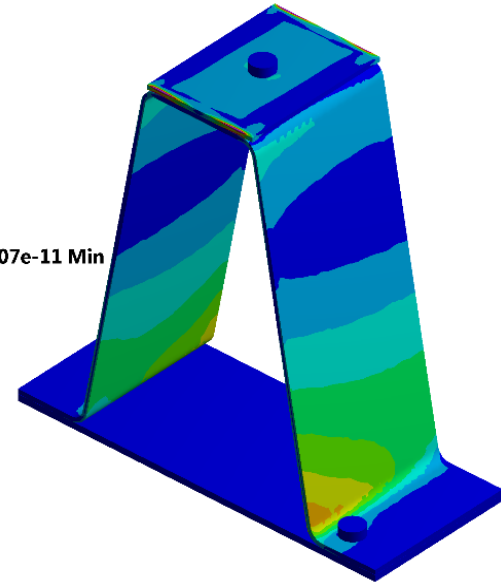
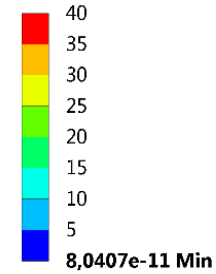
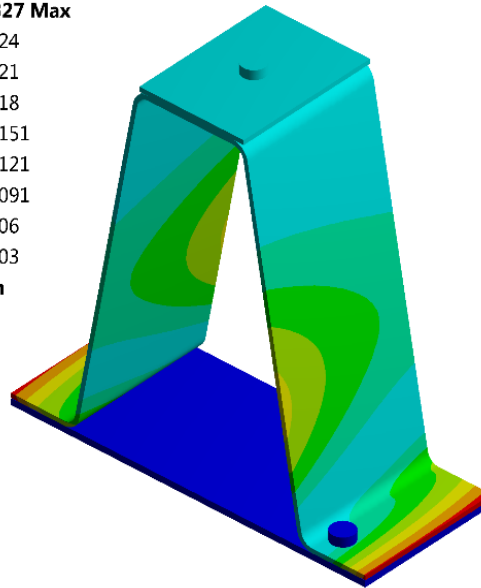
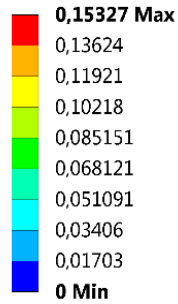
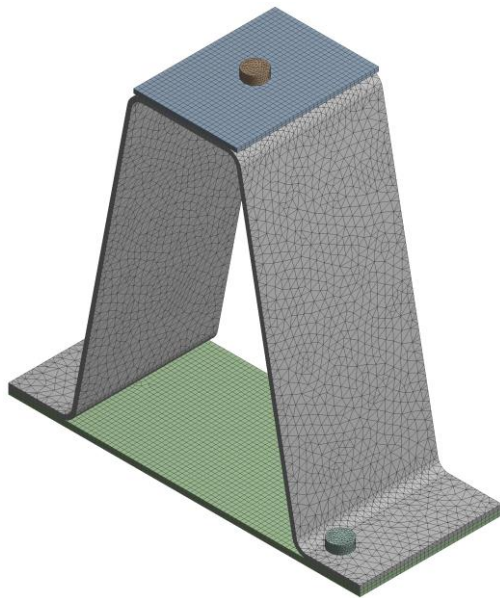
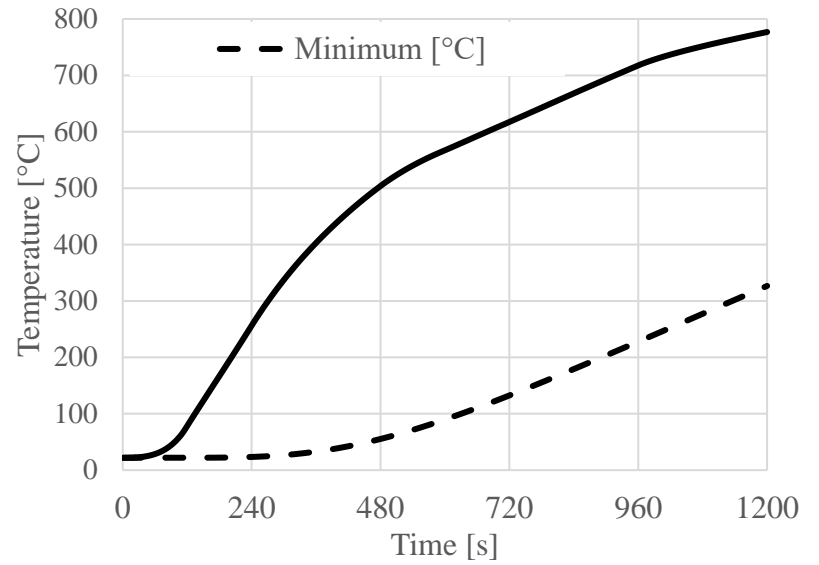
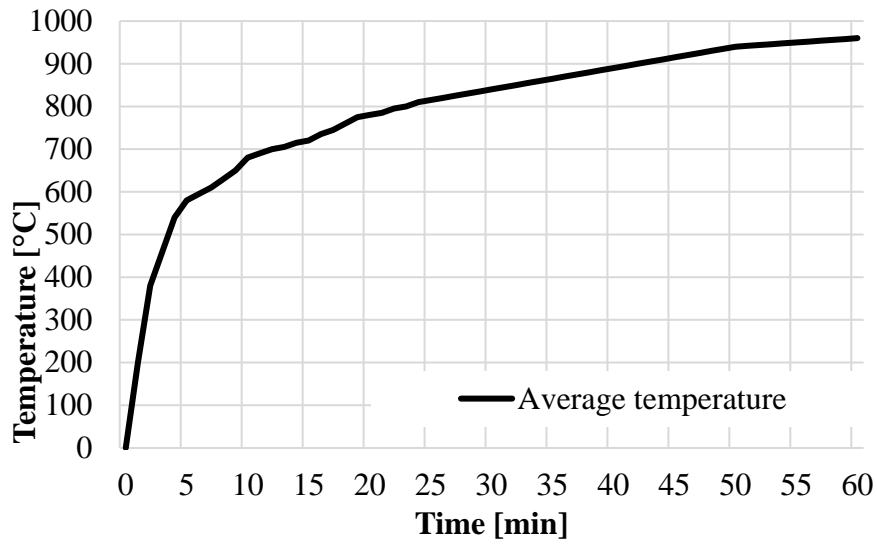
Normy ČSN 73 0802

ČSN P ENV 1991-2-2

ČSN P ENV 199x-1-2



Teplotní úlohy prakticky



Co nás čeká příště?

Nosné desky.

Kirchhoffova a Mindlinova teorie.

Odvození konečného prvku.

MKP vs. metoda náhradních nosníků.

Praktické poznatky ŽB desek.