

# Metoda konečných prvků

## Stěna – rovinný problém

Ing. Petr Lehner

## Co se dnes dozvíte?

*Odvození pro rovinný problém – stěny.*

*Hlavní napětí.*

*Analýza stěny pomocí Ansys.*

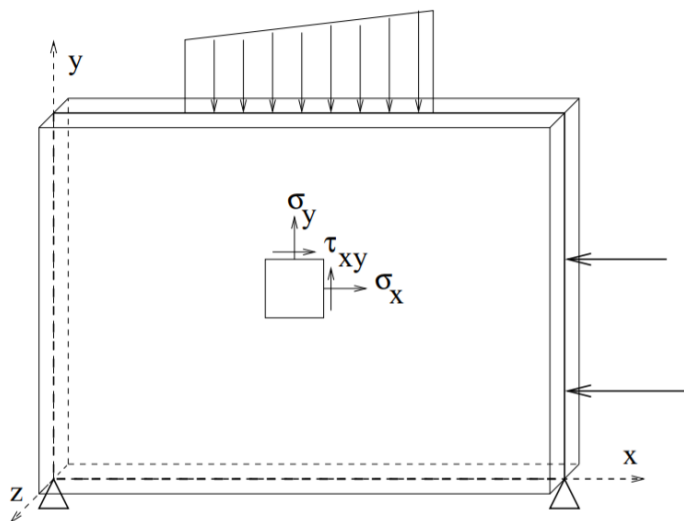
*Rozdíly při různém nastavení.*

*Betonové stěny, na co si dát pozor.*

# Rovinný problém - typy

- Řešíme plošné konstrukce v jejich střednicové rovině.

## Rovinná napjatost

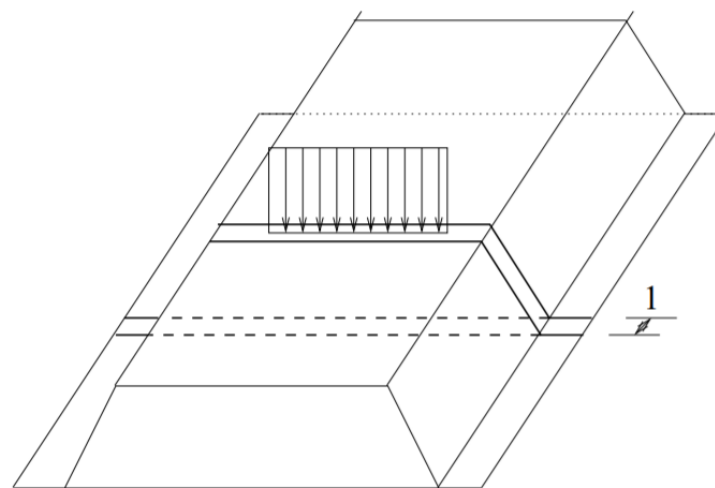


$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}\}^T$$

Konstrukce se **může** volně deformovat ve směru osy Z – v této ose máme **nenulové** deformace.

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

## Rovinná deformace



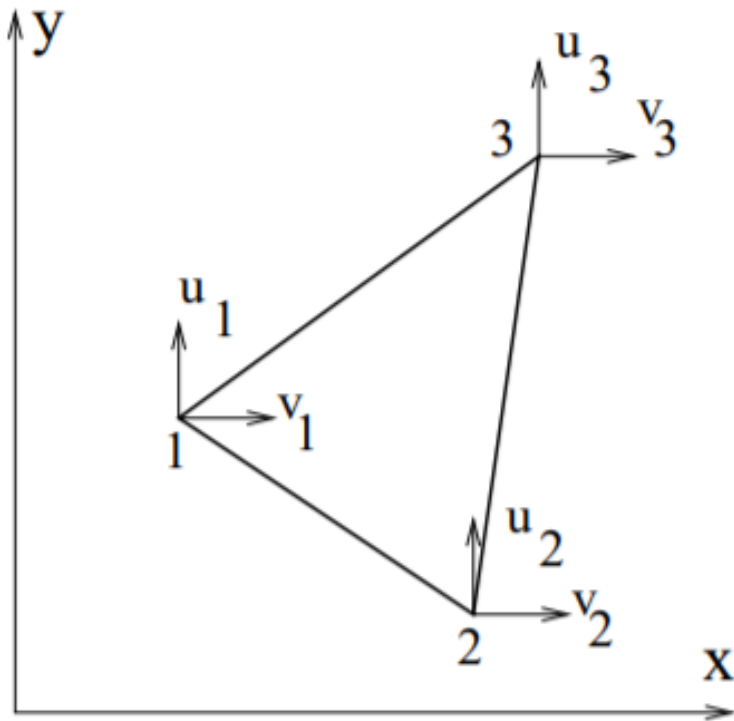
$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

Konstrukce se **nemůže** volně deformovat ve směru osy Z – v této ose máme **nenulové** napětí.

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}\}^T$$

# Rovinný problém – odvození (1)

- 3-uzlový prvek



$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Maticově ( $\varepsilon = \partial^T \mathbf{u}$ ):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

# Rovinný problém – odvození (2)

- Fyzikální rovnice pro rovinnou napjatost

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}$$

Maticově ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$ ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Rovinný problém – odvození (3)

- Fyzikální rovnice pro rovinnou deformaci

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu) \varepsilon_x + \mu \varepsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [\mu \varepsilon_x + (1 - \mu) \varepsilon_y]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \gamma_{xy} \frac{1}{2}(1 - \mu)$$

Maticově ( $\sigma = \mathbf{D} \varepsilon$ ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

# Rovinný problém – odvození (4)

Aproximace neznámých uzlových posunutí:

$$u(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3$$

$$v(x, y) = a_4 x + a_5 y + a_6$$

Maticově ( $\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$ ):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

## Rovinný problém – odvození (5)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \right\}$$

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS.$$

Po dosazení za  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a vytknutí  $\mathbf{r}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}.$$



## Rovinný problém – odvození (6)

Aplikací Lagrangeova variačního principu ( $\partial \Pi = \min.$ )

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F},$$

kde  $\mathbf{K}$  . . . matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV,$$

$\mathbf{F}$  . . . zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV - \int_S \mathbf{p}^T dS.$$

# Hlavní napětí

Vypočte se z normálových a smykového napětí v rovině:

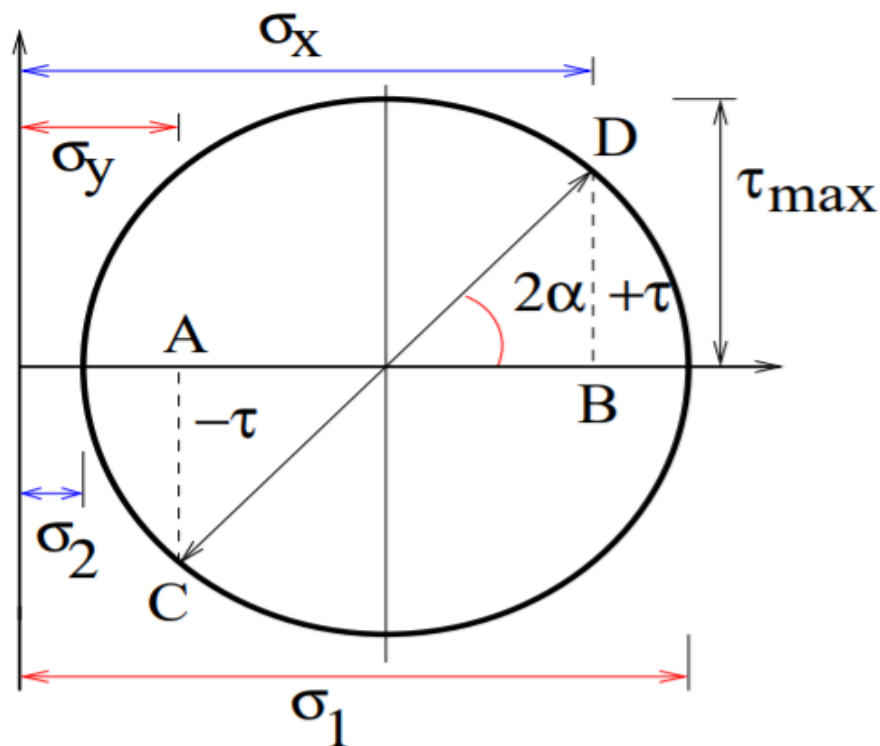
$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right]$$

extrémní napětí vztažené k určitému úhlu – slouží např. k návrhu výztuže.

**Mohrona kružnice:**

(vyjadřuje geometrickou

závislost hlavní napětí)

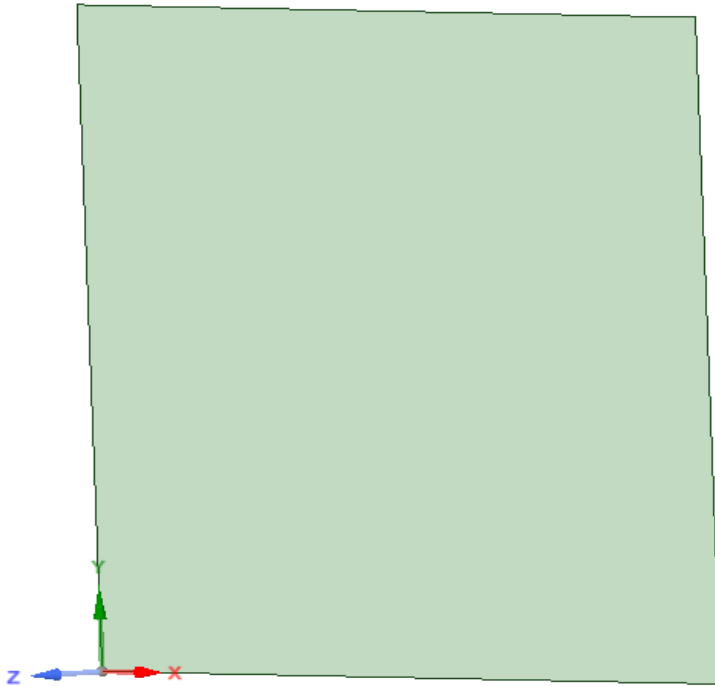


# Ansys – analýza stěny – geometrie

Stěna 4 x 3 m, beton, tl. 150 mm

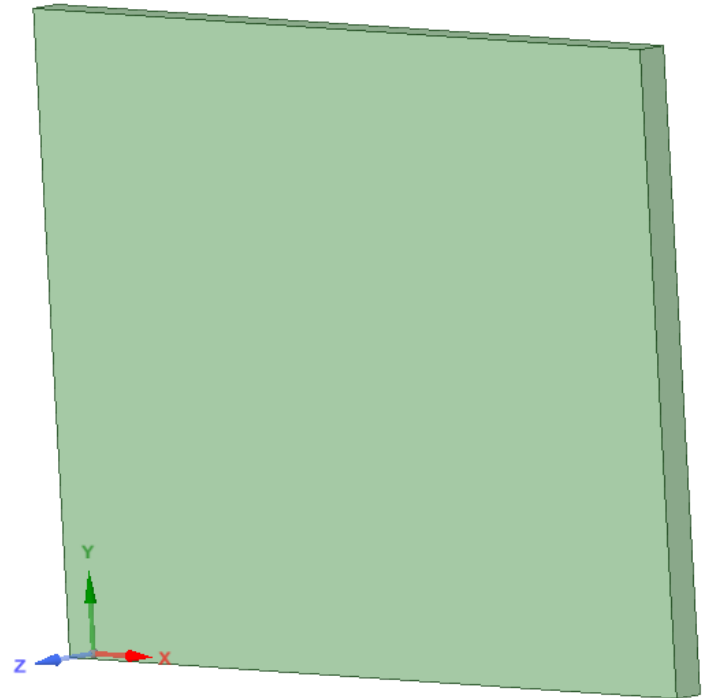
2D prvky

surface = plocha



3D prvky

solid = objem



# Ansys – analýza stěny – příprava analýzy

2D prvky

3D prvky

*Zatížení: stejné – spojitě na horním okraji,*

*Podpory: stejné – pevné podpory na spodním okraji,*

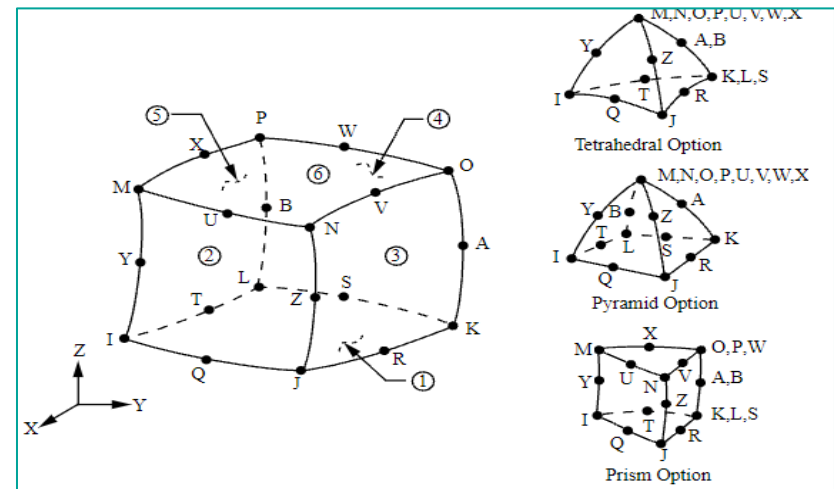
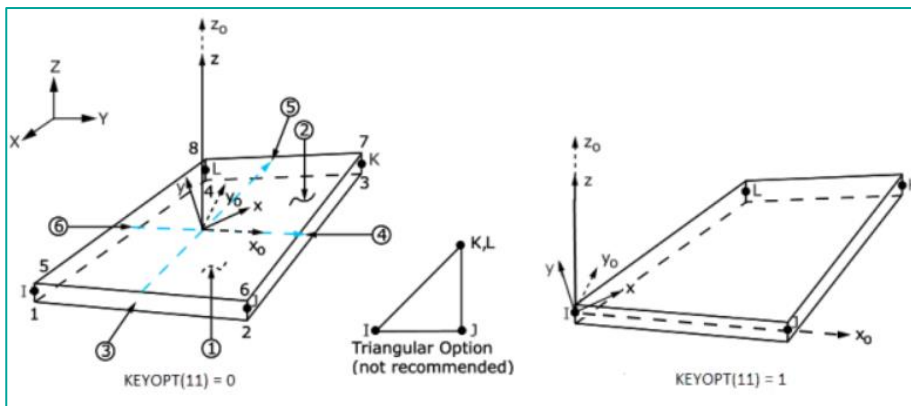
*Výběr prvku se nastaví automaticky (jde změnit):*

**SHELL181**

**(4 uzly)**

**SOLID 186**

**(20 uzlů)**

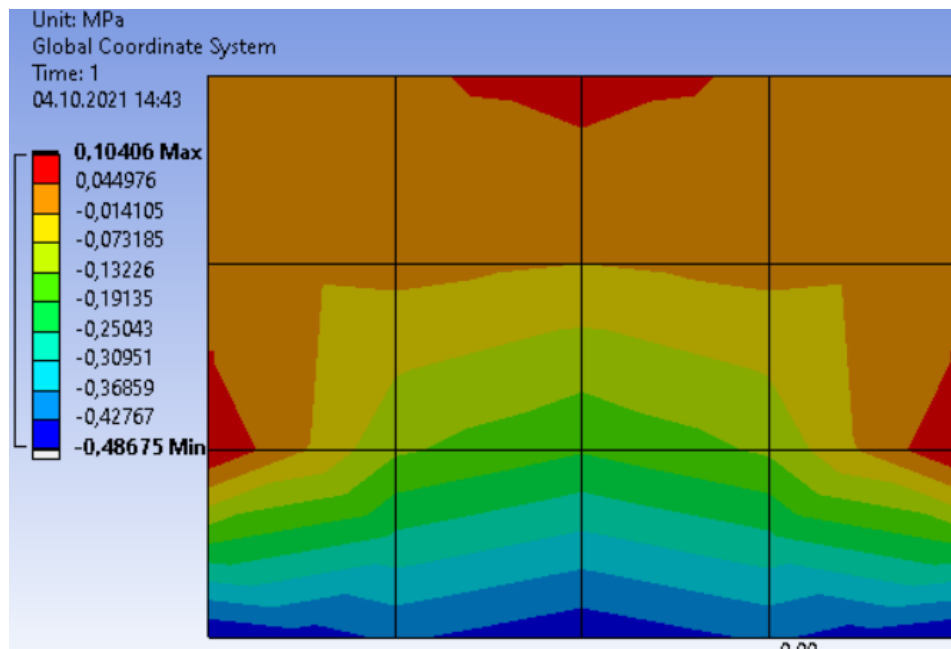
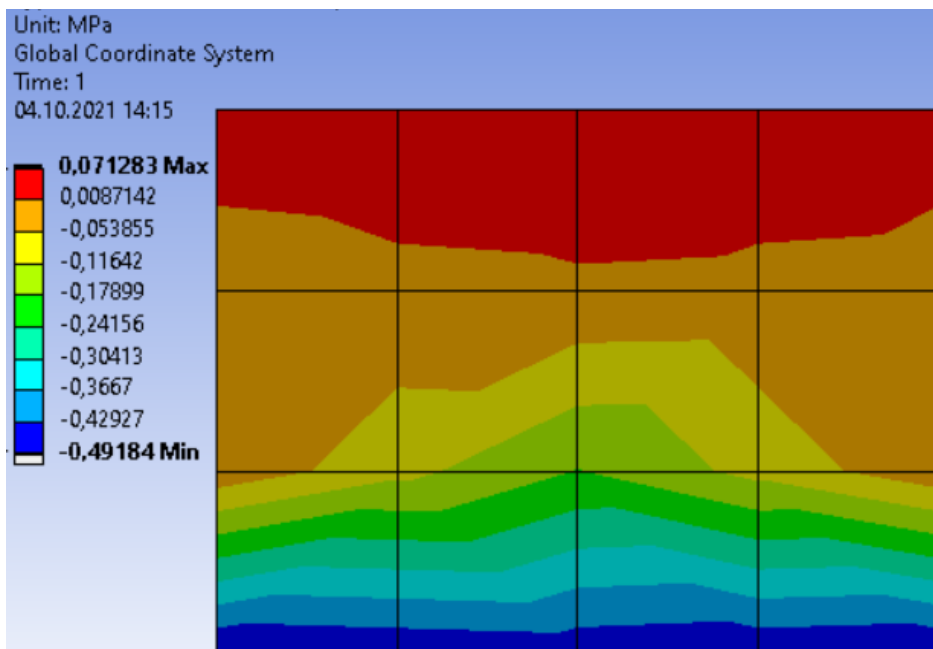


# Ansyes – analýza stěny – výsledná napětí

Nastavení sítě na 1 m.

2D prvky

3D prvky

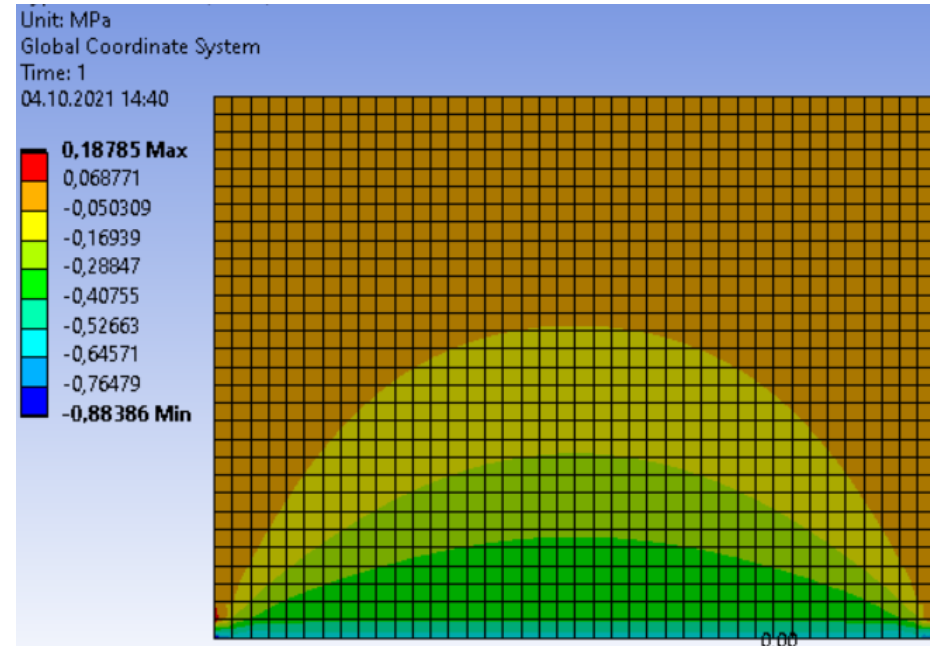
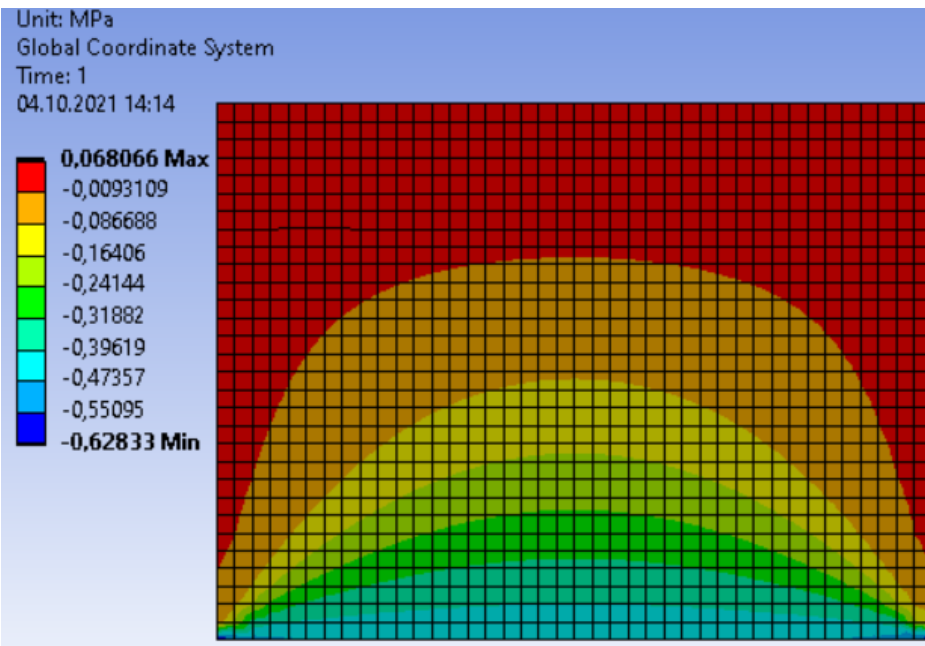


# Ansyes – analýza stěny – výsledná napětí

Nastavení sítě na 10 cm.

2D prvky

3D prvky

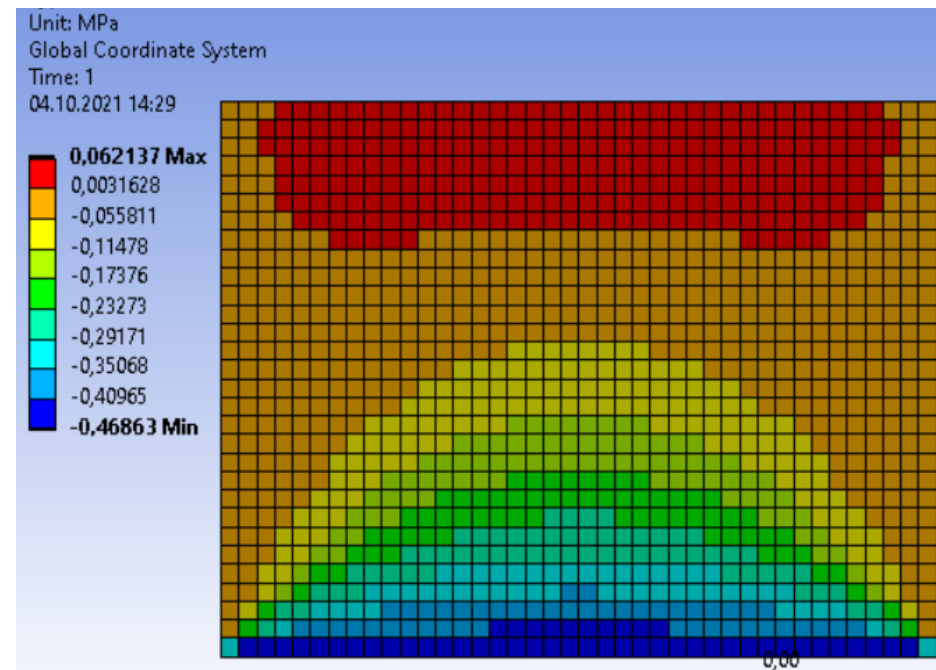
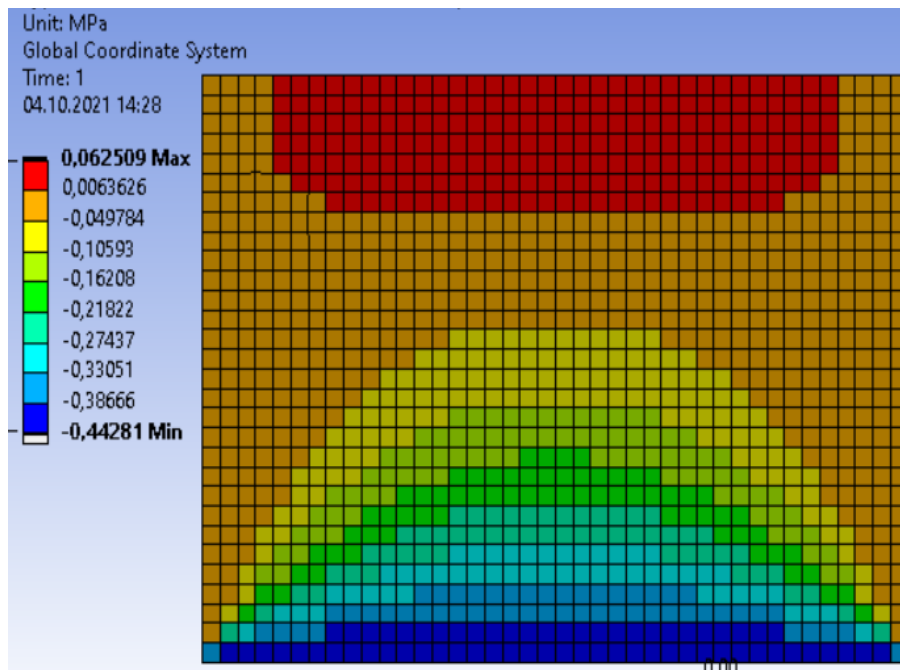


# Ansys – analýza stěny – výsledná napětí

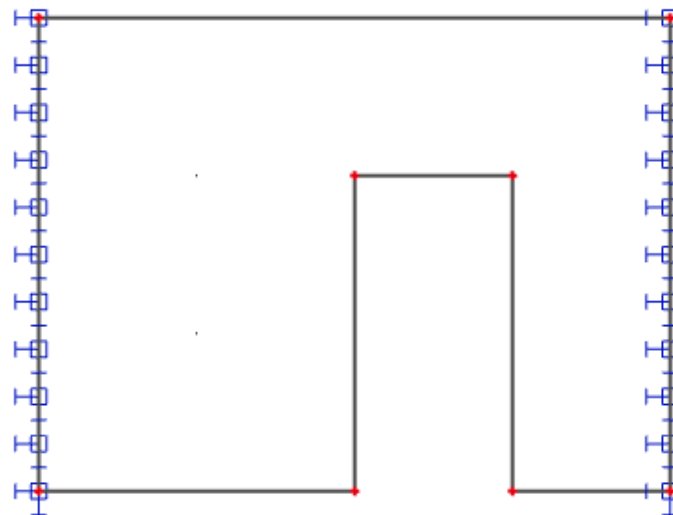
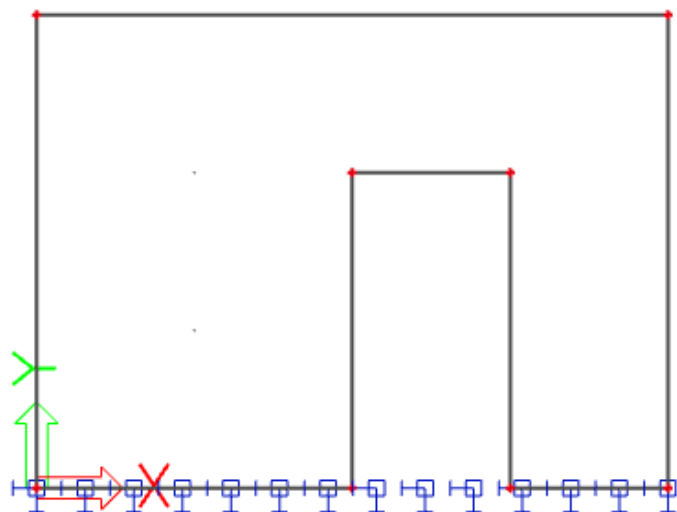
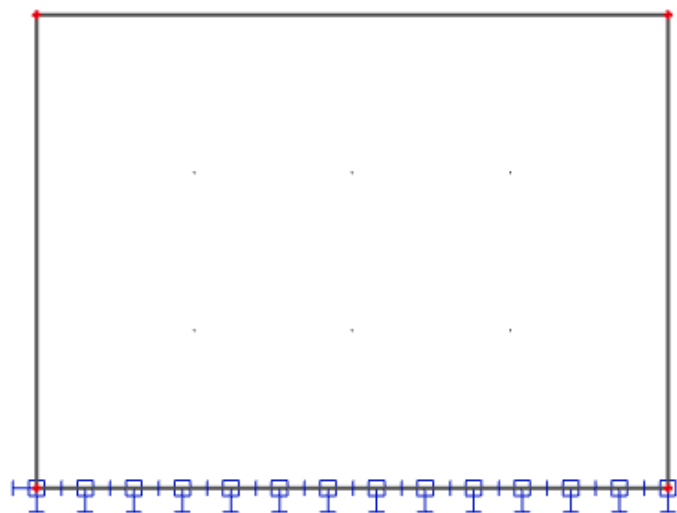
Nastavení na průměr na jednom elementu.

2D prvky

3D prvky

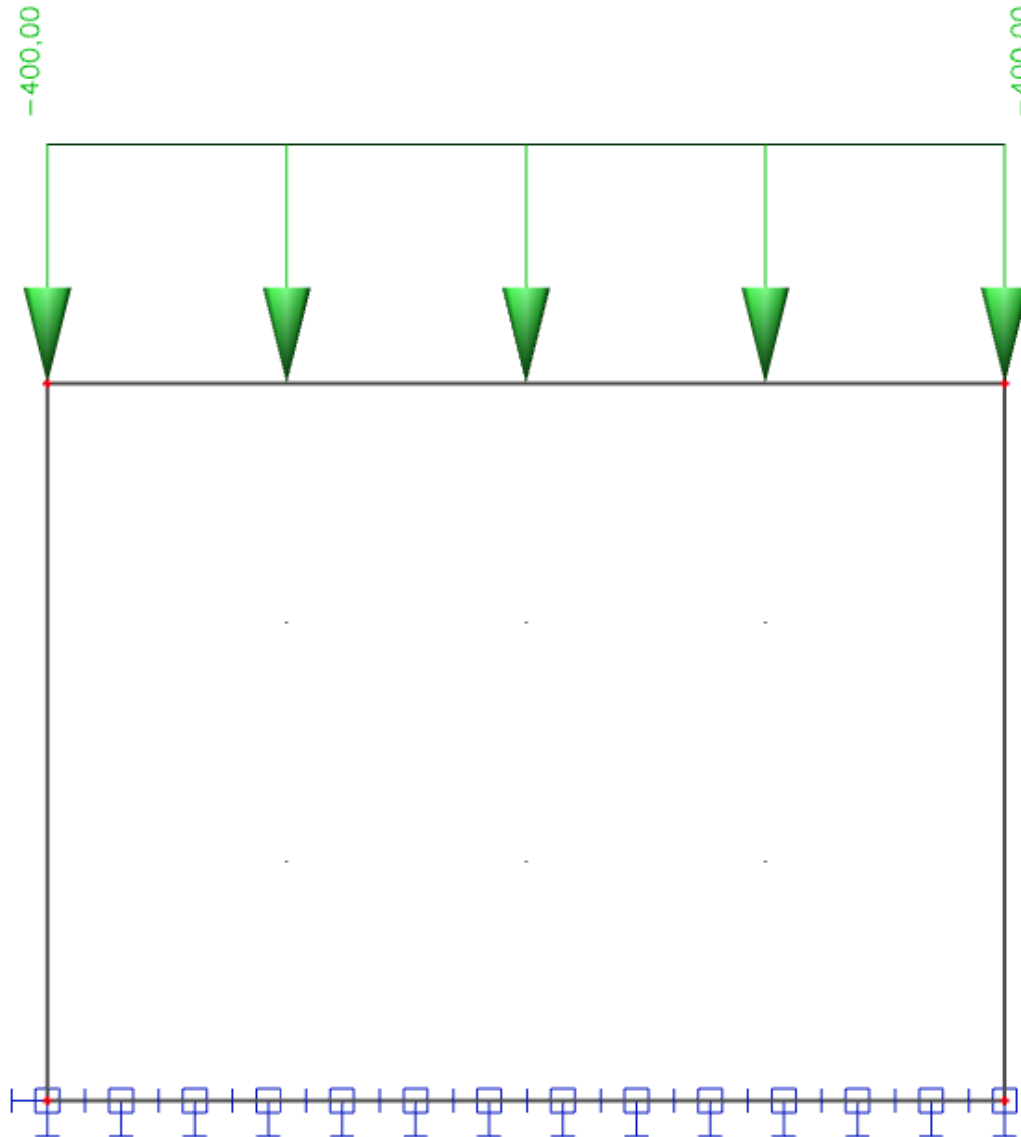


# Betonové stěny – 4 x 3 m, bez a s otvorem





# Betonové stěny



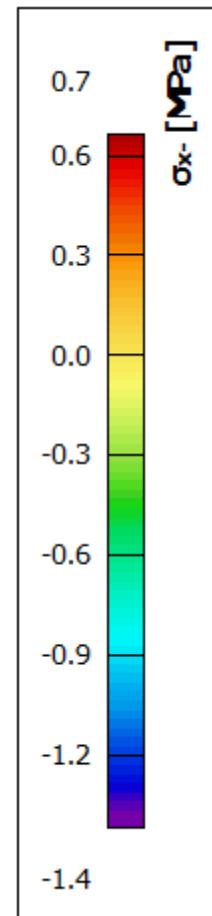
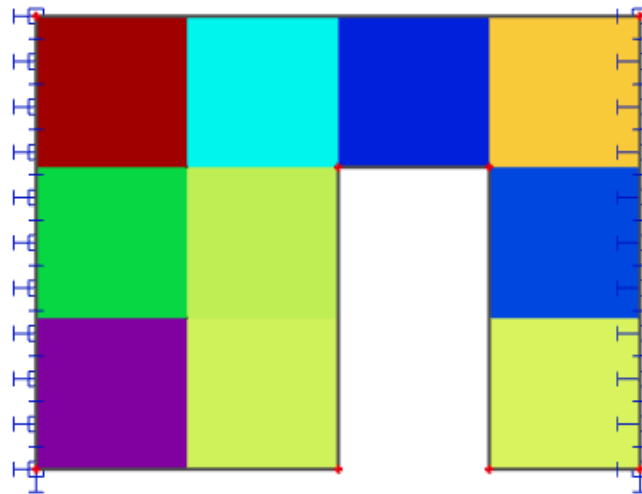
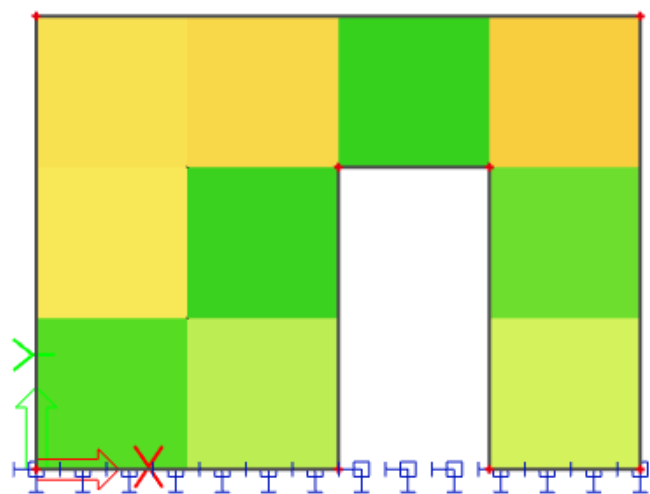
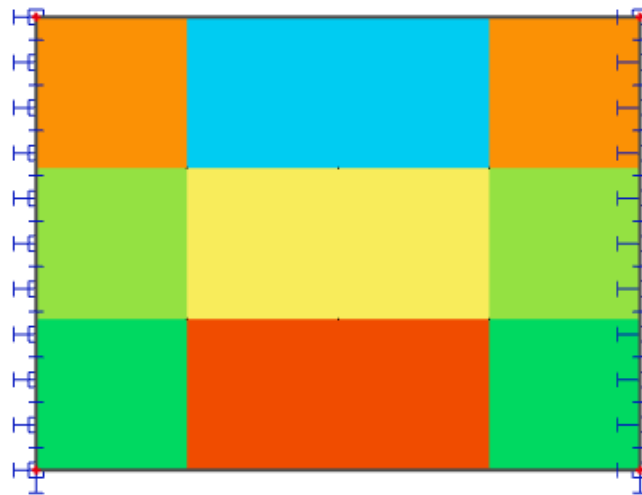
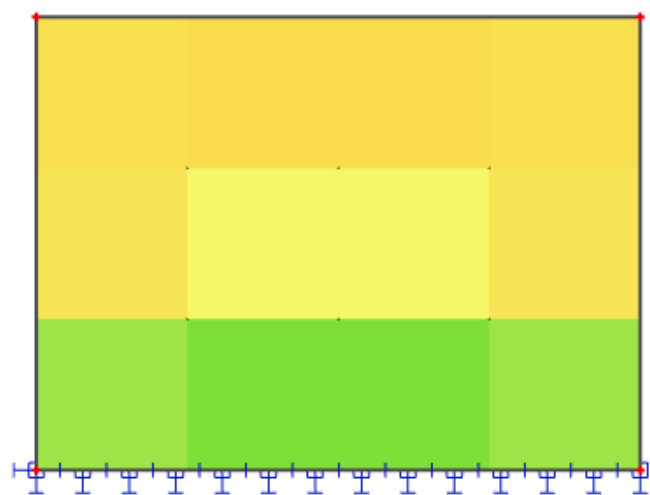
Zatížení odpovídá 1.NP v  
8 patrovém panelovém  
domě.

C 16/20 ( $f_{ck} = 16$  MPa,  
 $f_{cd} = 10,67$  MPa)

**Nutno zkontrolovat  
návrhovou pevnost v  
tlaku. Výztuž se řeší  
samostatně na tah !!!**

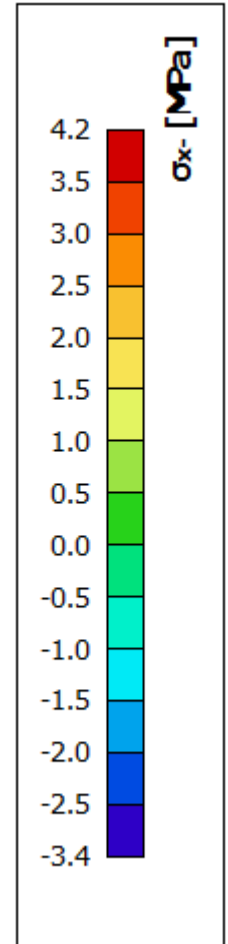
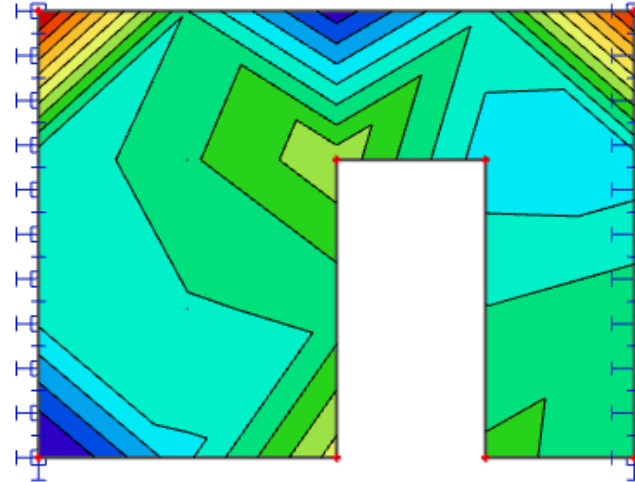
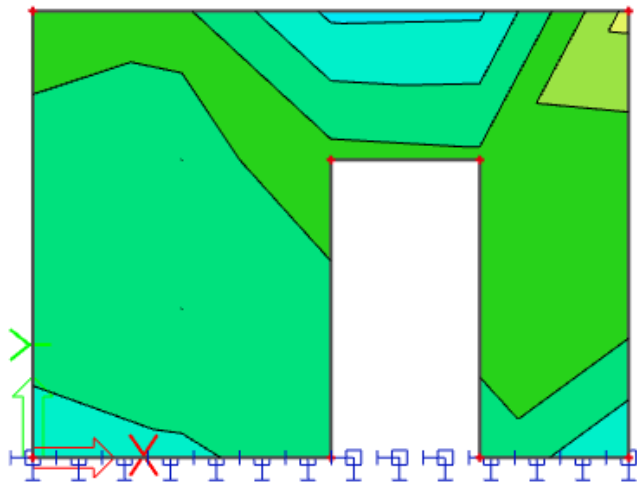
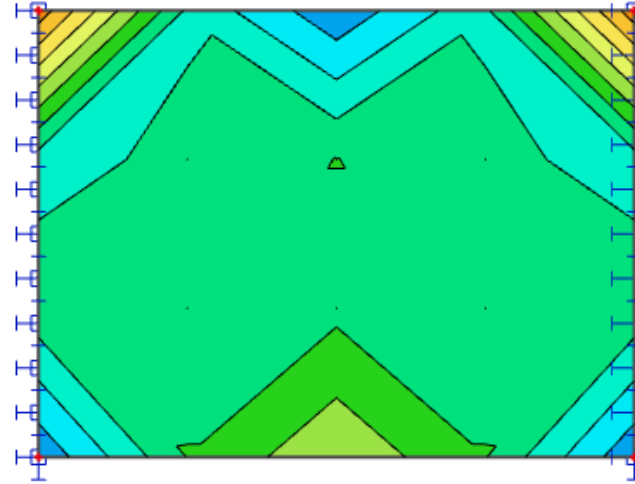
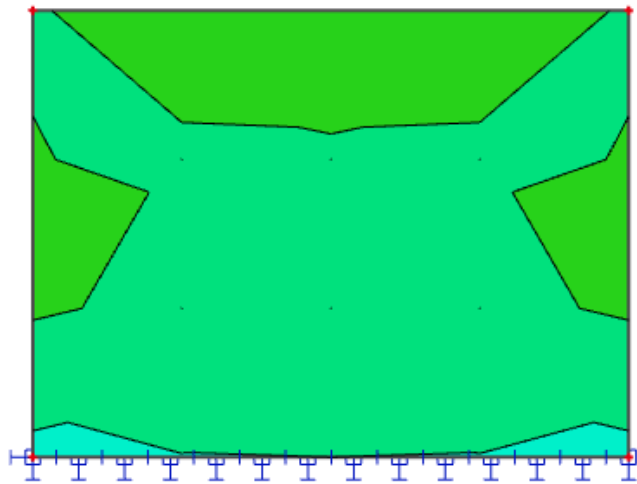
# Betonové stěny – Scia – normálové napětí

Nastavení sítě na 1 m, hodnota v těžišti prvku



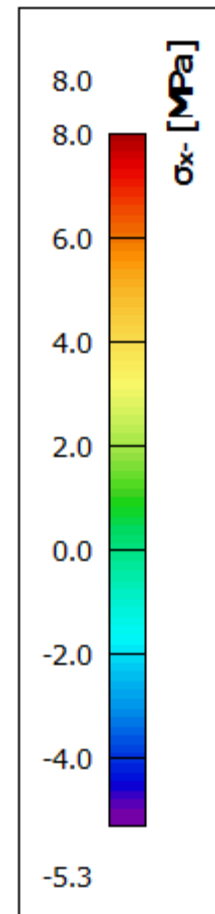
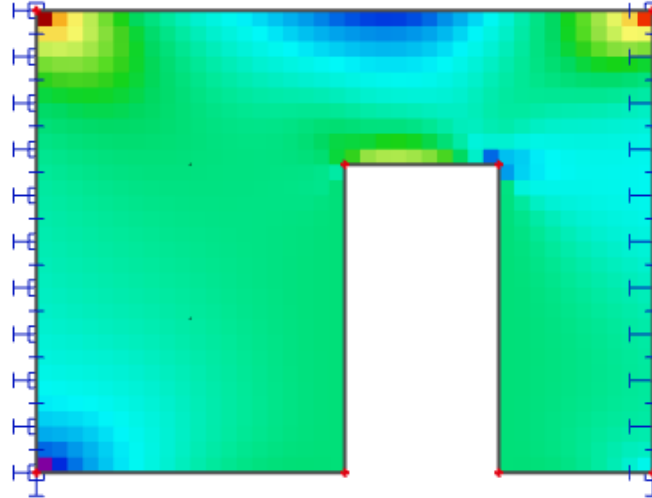
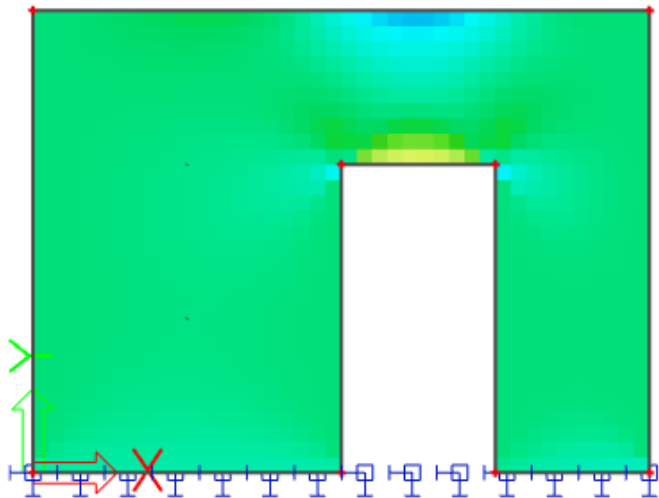
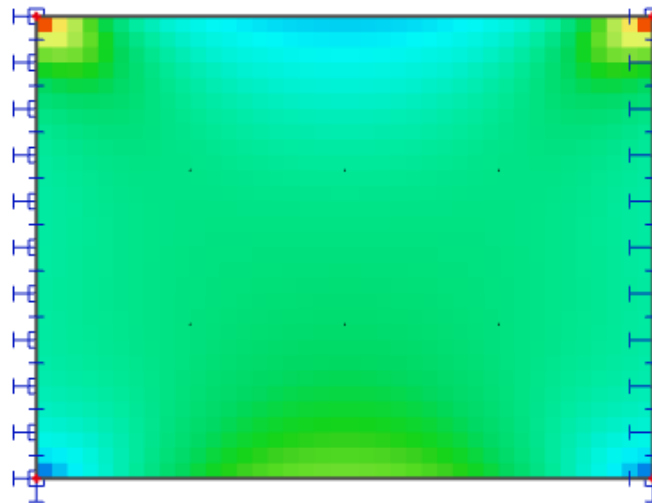
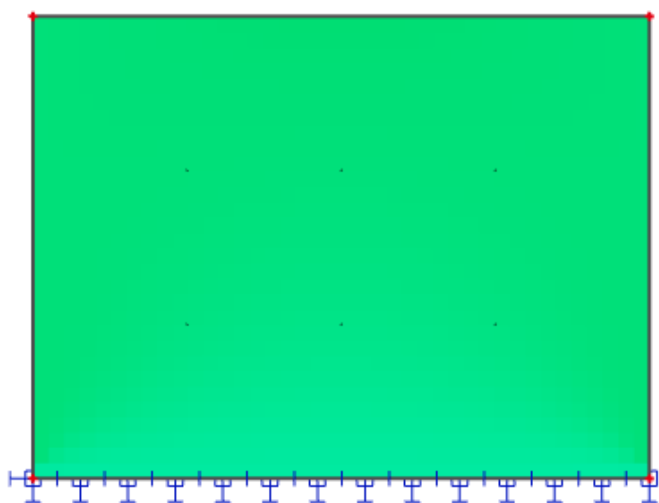
# Betonové stěny – Scia – normálové napětí

Nastavení sítě na 1 m, průměrné hodnoty z uzlů



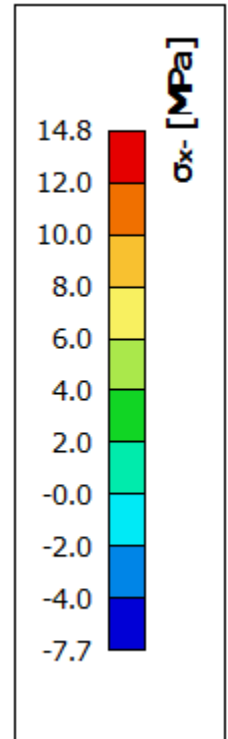
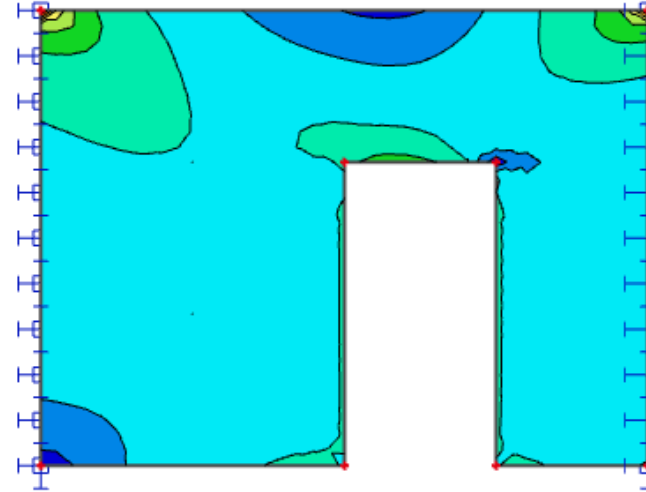
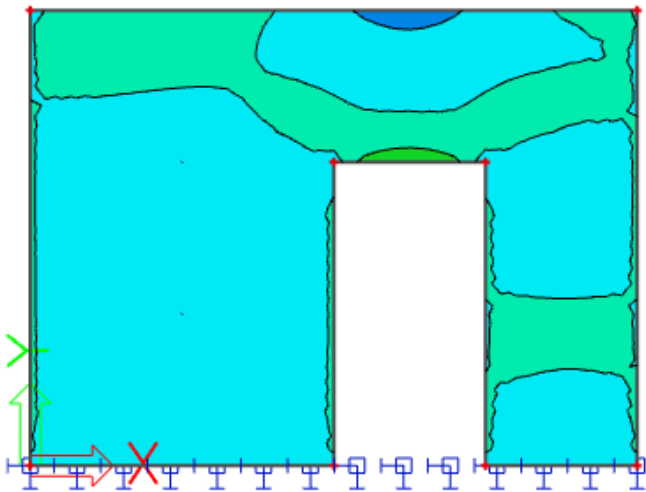
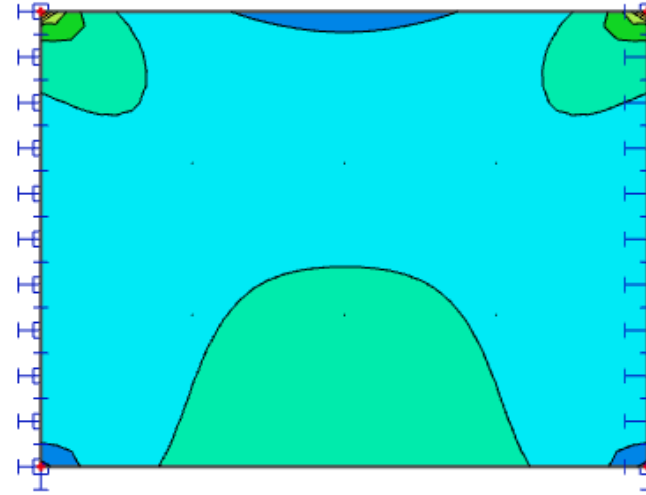
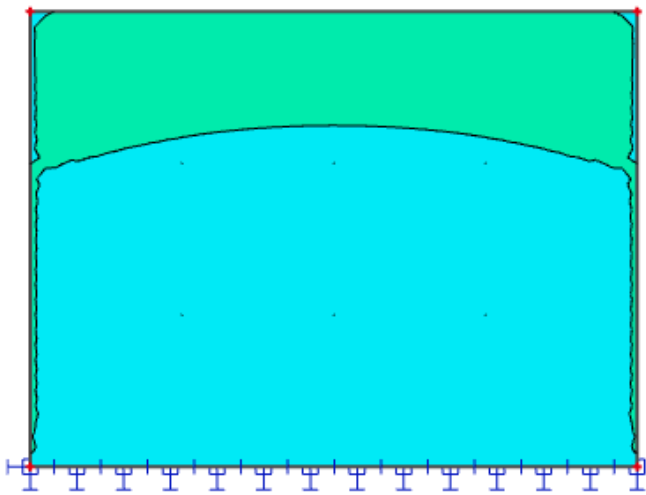
# Betonové stěny – Scia – normálové napětí

Nastavení sítě na 10 cm, hodnoty v těžišti prvku



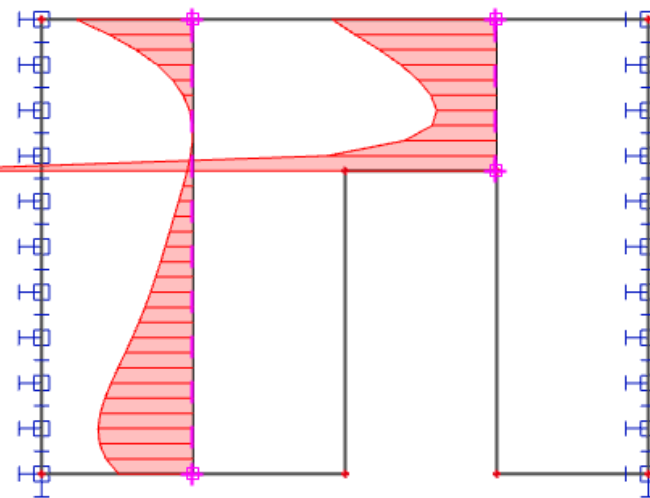
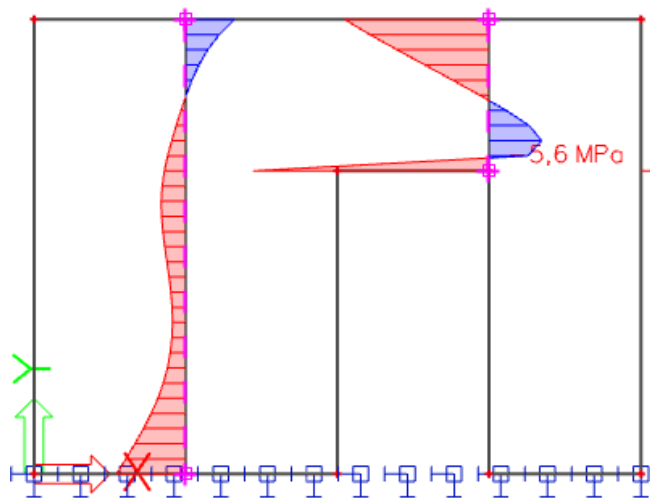
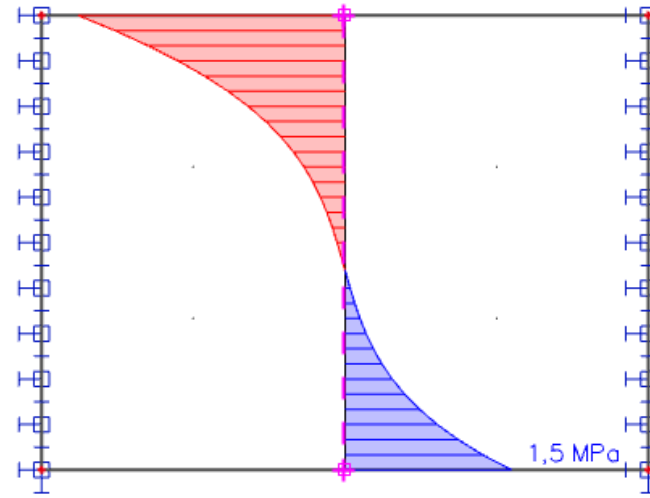
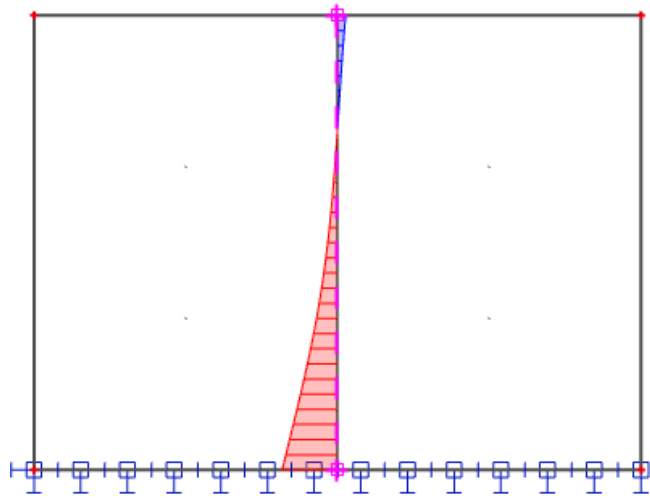
# Betonové stěny – Scia – normálové napětí

Nastavení sítě na 10 cm, průměrné hodnoty z uzlů



# Betonové stěny – Scia – normálové napětí

Nastavení sítě na 10 cm, průměrné hodnoty z uzlů, řezy



# Betonové stěny – pár rad závěrem

- nelze aplikovat předpoklad základní statiky – nutno řešit nelineárně a podrobně,
- krom základní analýzy únosnosti betonu a výztuže je potřeba řešit trhliny, dotvarování a stabilitu,
- při hodnocení vnitřních sil a napětí si dávat pozor na extrémní hodnoty a nebezpečná místa.

# Betonové stěny – pár rad závěrem

- při výpočtu metodou konečných prvků a při použití elastického materiálového modelu dochází k nárůstu napětí při zjemňování sítě – napětí diverguje.
- napětí v singulárním bodě nelze přímo použít pro dimenzování. V reálném materiálu se díky plasticitě napětí „otupí“ a redistribuuje se po okolí.



# Co nás čeká příště?

*Vedení tepla pomocí MKP.*

*Stacionární úloha.*

*Nestacionární úloha.*

*Difuzní úlohy v MKP*

*Teplotní úlohy prakticky.*