

Metoda konečných prvků

Základní odvození MKP

Ing. Petr Lehner

Co se dnes dozvíte?

Ritzova metoda.

Základní princip MKP.

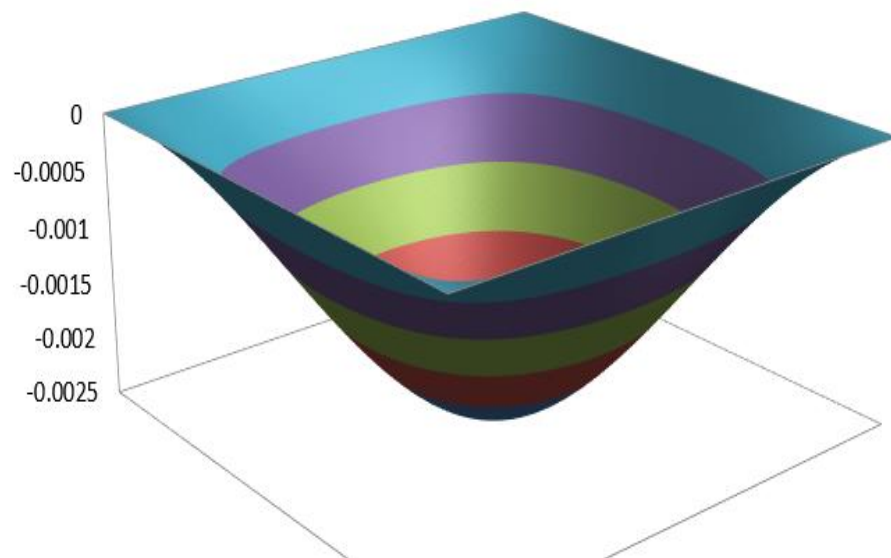
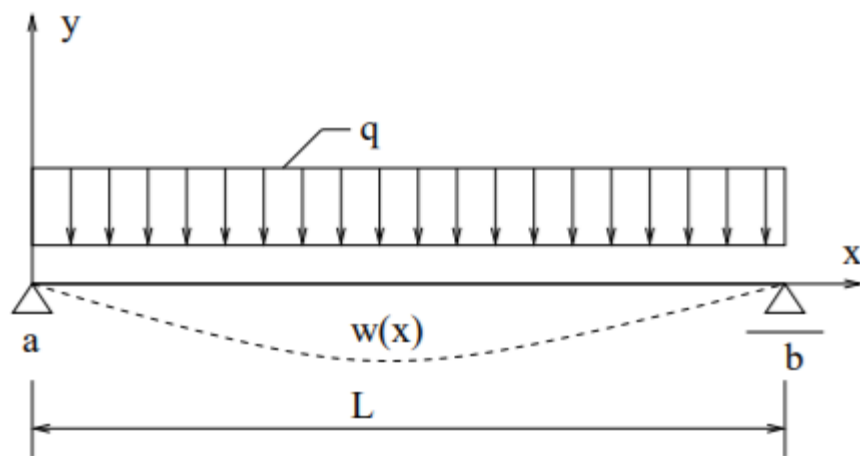
Matice tuhosti.

Odvození konečného prvku příhrady.

Jak přesná je analýza konečných prvků?

Ritzova metoda

- Aplikace variačního počtu: hledání hodnoty funkce nebo funkcionálu v prostoru.
- Ve stavební mechanice např. pro **určení průhybu nosníku nebo desky.**



Ritzova metoda - postup

1. Volba aproximačních funkcí:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i,$$

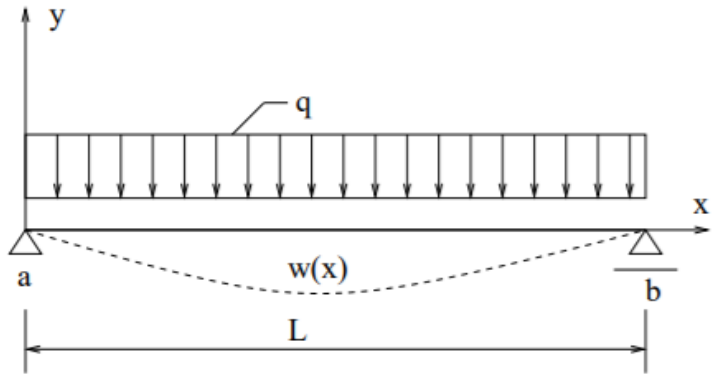
kde a_i je neznámá konstanta a ψ_i aproximační funkce.

2. Vyjádření Π pomocí $w_n(x)$.

3. Sestavení a vyřešení n rovnic: $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0.$

4. Dosazení vypočtených hodnot a_i do aproximační funkce.

Ritzova metoda - příklad



$$w(x) = a_1 \psi_1 = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

$$w(a) = w(x=0) = 0 \dots \psi_1(a) = \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{L}\right) = 0$$

$$w(b) = w(x=L) = 0 \dots \psi_1(b) = \sin\left(\frac{\pi L}{L}\right) = 0$$

$$\Pi_e = - \int_0^L q w(x) dx = - \frac{2 q L}{\pi} a_1 \quad \Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L E I w''^2 dx = \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} a_1^2$$

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = - \frac{2 q L}{\pi} a_1 + \frac{\pi^4 E I}{4 L^3} a_1^2 \quad \longrightarrow \quad a_1 = \frac{4 q L^4}{\pi^5 E I}$$

$$w(x) = a_1 \psi_1 = \frac{4 q L^4}{\pi^5 E I} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$w_{max} = \frac{5 q l^4}{384 E I}$$

Souvislost MKP a Ritzovy metody

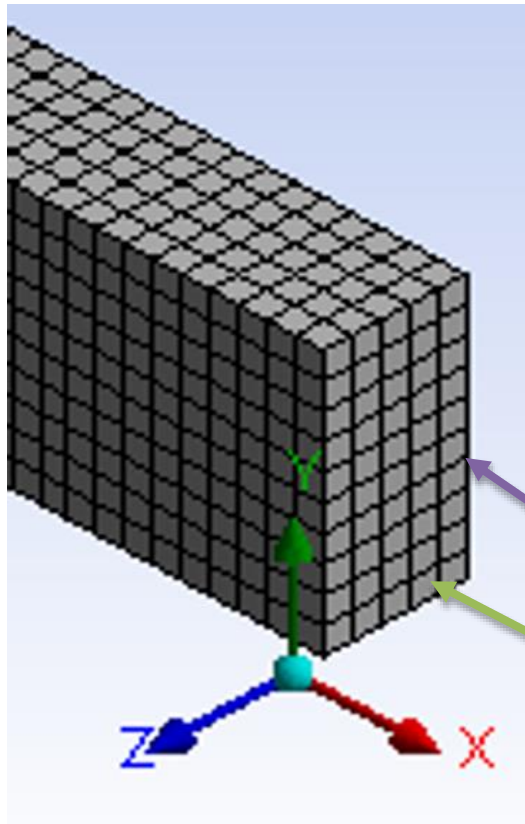
- Variační metody nejsou vhodné pro složitější tvary konstrukcí, komplikovanější zatížení a okrajové podmínky,
- MKP je principiálně **variační počet na každém konečném prvku**, který vznikne **rozdělením konstrukce**:

$$\Pi = \sum_{j=1}^n \Pi_j$$

Varianta MKP	Neznámé veličiny	Variační princip
Deformační	deformační	Lagrangeův
Silová	silové	Castigliánův
Smíšená	silové a deformační	Hellinger–Reissnerův

Analýza konečného prvku

- Označení postupu souvisejícího s typem úlohy, geometrií, zatížením, okrajovými podmínkami atd.
- Rovnice zapisujeme maticově: $\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}$



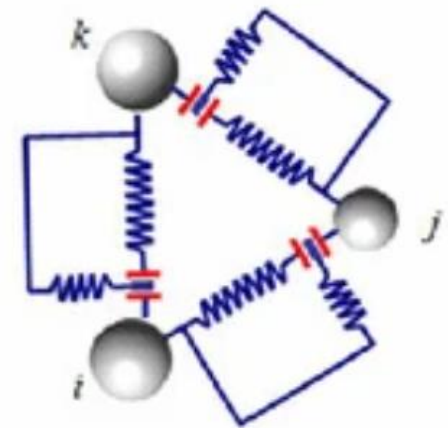
\mathbf{F} = zatěžovací vektor,

\mathbf{r} = vektor neznámých (deformací).

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

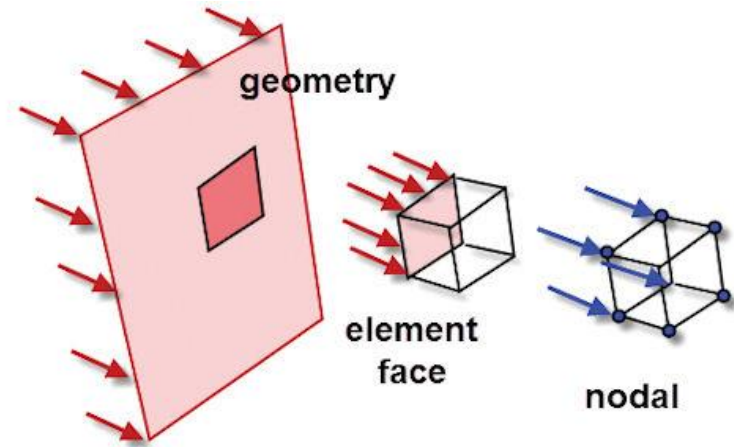
Uzel (node)

Prvek (element)



Analýza konečného prvku – zatížení, okrajové podmínky, materiál, geometrie

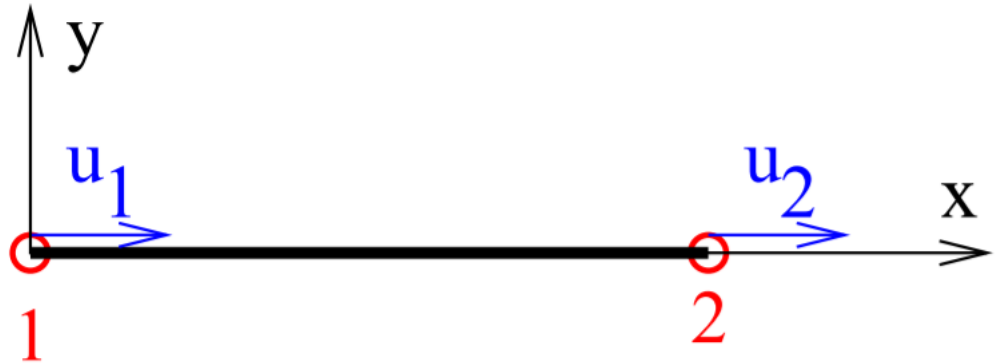
- Výhradně v uzlech prvků,
- síly pracují na posunech ,
- momenty pracují na pootočeních.



- Pružné podpory – přidání tuhosti,
- Pevné podpory – nulové deformace, neznámé síly,
- Popuštění podpor – známé síly, neznáme deformace.
- Materiál a geometrie je obsažena v matici tuhosti prvku.

Odvození přímého prvku (1)

Model



Neznámé (posuny):

$$\{u_1, u_2\}^T$$

Geometrické rovnice:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ u \right\}$$

obecně:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u}$$

Odvození přímého prvku (2)

Fyzikální rovnice:

$$\sigma_x = E \times \varepsilon_x$$



$$\left\{ \sigma_x \right\} = \left[E \right] \left\{ \varepsilon_x \right\}$$

obecně: $\mathbf{D} =$ matice tuhosti materiálu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Obecná aproximační funkce:

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$



$$\left\{ u \right\} = \left[1 \quad x \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}$$

obecně: $\mathbf{U} =$ matice zvolených funkcí

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$$

Dosazení neznámých posunů:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}$$

obecně: $\mathbf{S} =$ matice souřadnic

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{a}$$

Odvození přímého prvku (3)

Vyjádření vektoru poměrných deformací:

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ u \right\} \quad \left\{ u \right\} = \left[1 \quad x \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$
$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \left[1 \quad x \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Obecně:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{u} \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{a}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{U} \mathbf{a}$$

Zjednodušení:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T \mathbf{U} \mathbf{a}$$

$B =$ matice tvarových funkcí

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \left[0 \quad 1 \right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}$$

Odvození přímého prvku (4)

Matice souřadnic \mathbf{S} (a inverzní matice souřadnic):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix}$$

Vyjádření neznámých koeficientů (obecně):

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r} \quad \mathbf{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}$$
$$\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{r}$$

$$\left\{ \varepsilon_x \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\}$$

Odvození přímého prvku (5)

Potenciální energie vnější sil

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS.$$

Potenciální energie vnitřních sil

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

Celková energie systému

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{X}^T \mathbf{r} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} dS$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV \mathbf{r} - \int_V \mathbf{X}^T dV \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T dS \mathbf{r}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}$$

Odvození přímého prvku (6)

Celková energie systému

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F}^T \mathbf{r}$$

Aplikace Lagrangeova principu

$$\mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

nebo

$$\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

kde matice tuhosti konečného prvku

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} dV$$

a zatěžovací vektor

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T dV$$

Jak přesná je MKP analýza?

Je stejně přesná jako její uživatel !!!

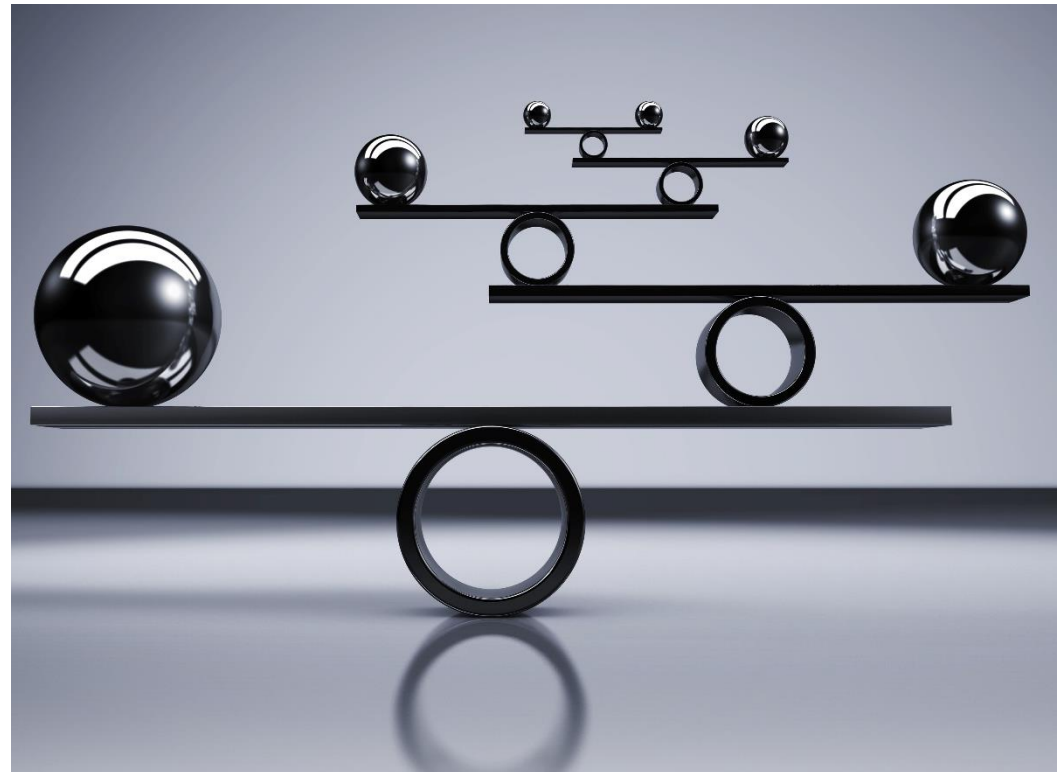
- Naučte se adekvátně využívat software.
- Pochopte problém, který chcete analyzovat.
- Získejte dostatek informací.



***„Pokud neumíte odhadnout výsledek ručně,
možná byste neměli problém analyzovat
pomocí MKP.“***

Co se může na modelu pokazit

- Nevhodný konečný prvek (špatný výběr úlohy),
- moc zjednodušená úloha kvůli urychlení,
- špatná geometrie,
- chyba v podporách,
- nevhodné zatížení,
- špatná síť.



Hledání vhodné velikosti prvků

- Příliš hrubá síť může vést k výsledkům s velmi velkými chybami.
- Analýza hustoty sítě pomáhá při rozhodování, jak by měla vypadat.
- Snižte velikost prvků v místech, kde dochází k velkým deformacím/napětím/nestabilitám.



Co nás čeká příště?

Odvození pro rovinný problém – stěny.

Hlavní napětí.

Analýza stěny pomocí Ansys.

Rozdíly při různém nastavení.

Betonové stěny, na co si dát pozor.