VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ | KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY

Metoda konečných prvků

Energetické principy

Ing. Petr Lehner

Co se dnes dozvíte?

Opakování obecných předpokladů.

Teorie pružnosti.

Silová a deformační metoda.

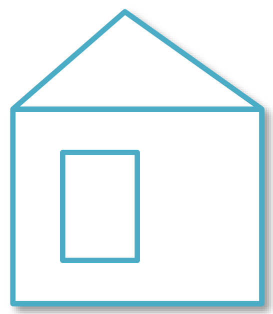
Energetické principy.

MKP checklist – co zkontrolovat než začnu s analýzou.

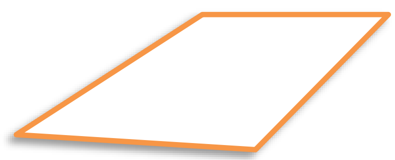
Idealizace geometrie konstrukce

- Tělesa

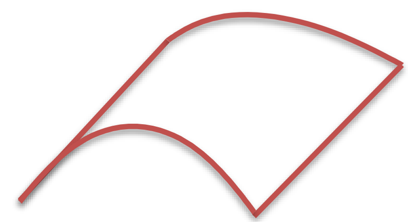
- Plošné konstrukce
  - Stěny



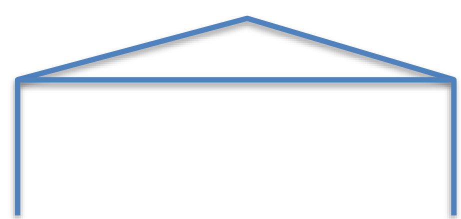
  - Desky



  - Skořepiny



- Pruty

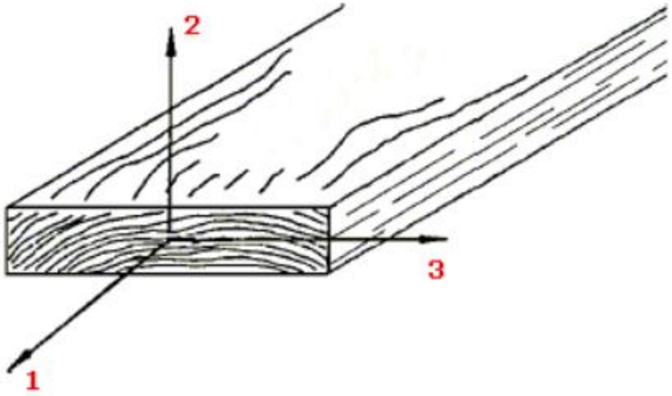


Typy materiálů

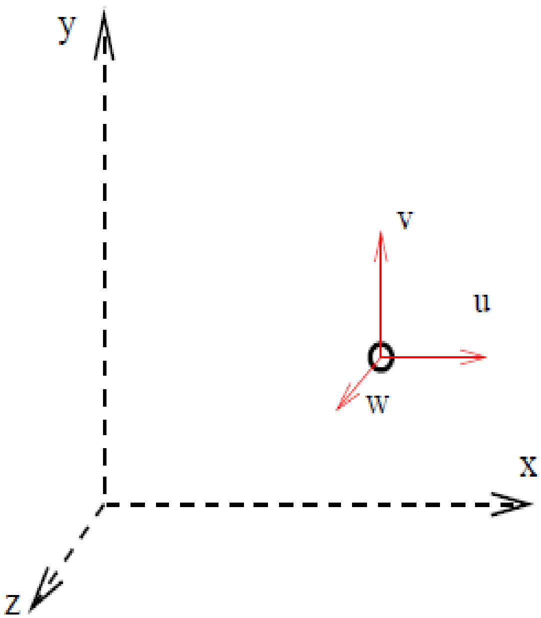
- Izotropní

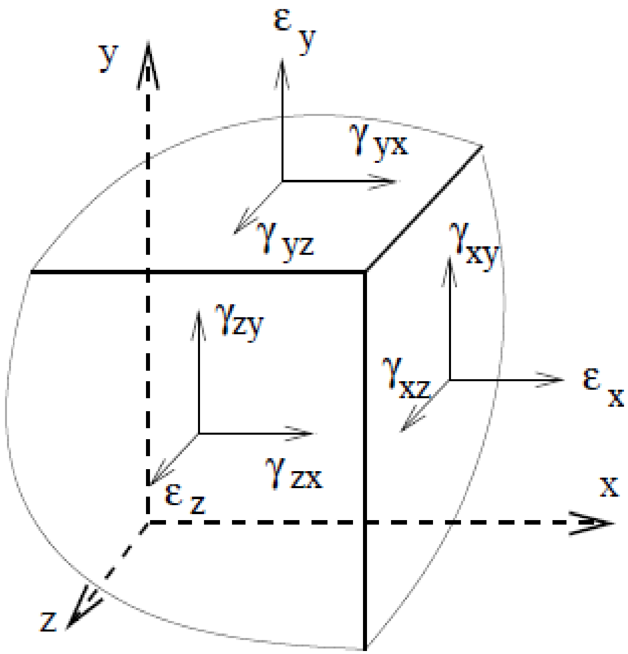
- Anizotropní

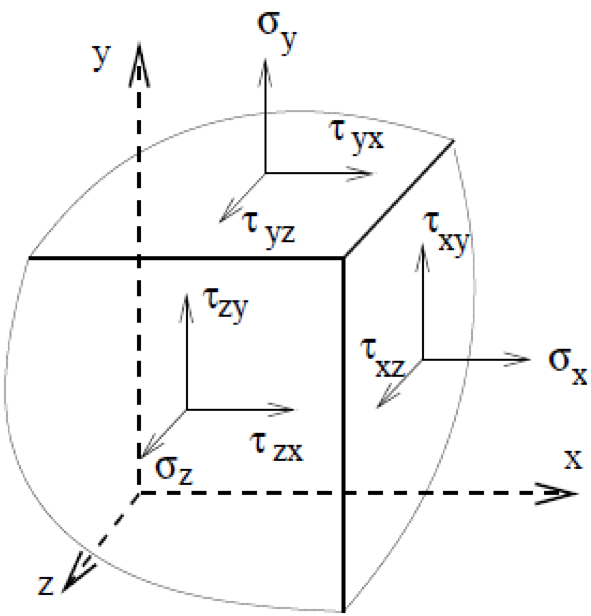
- Ortotropní



Vektor posunutí, deformací a napětí







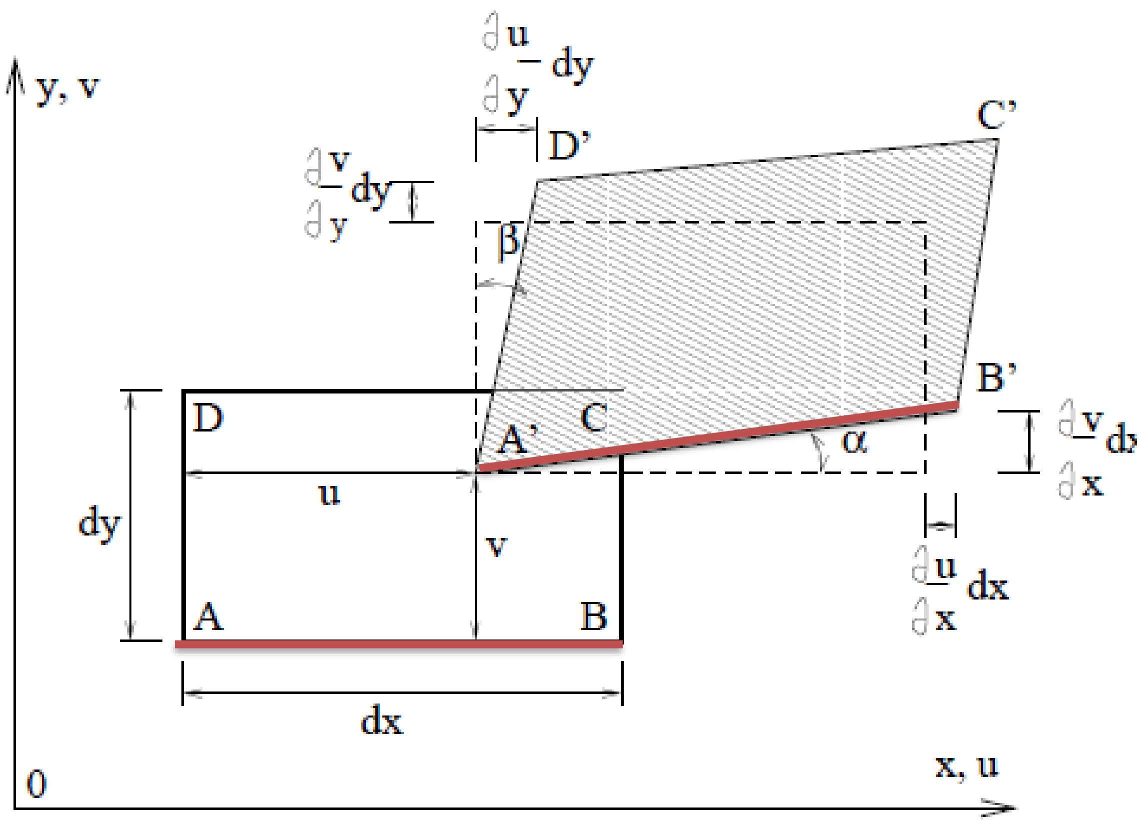
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Geometrické vztahy

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - (x + u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$



Normálové deformace:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

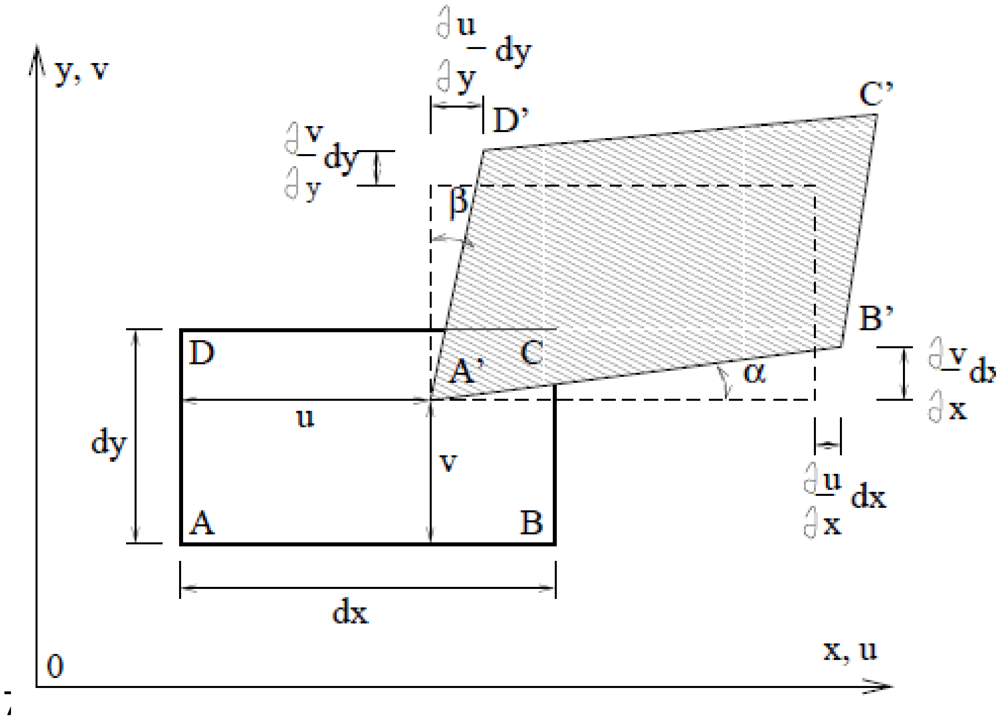
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

Geometrické vztahy

Smykové deformace:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$



Vzájemnost (podobnost) protilehlých deformací je dána splněním momentové podmínky.

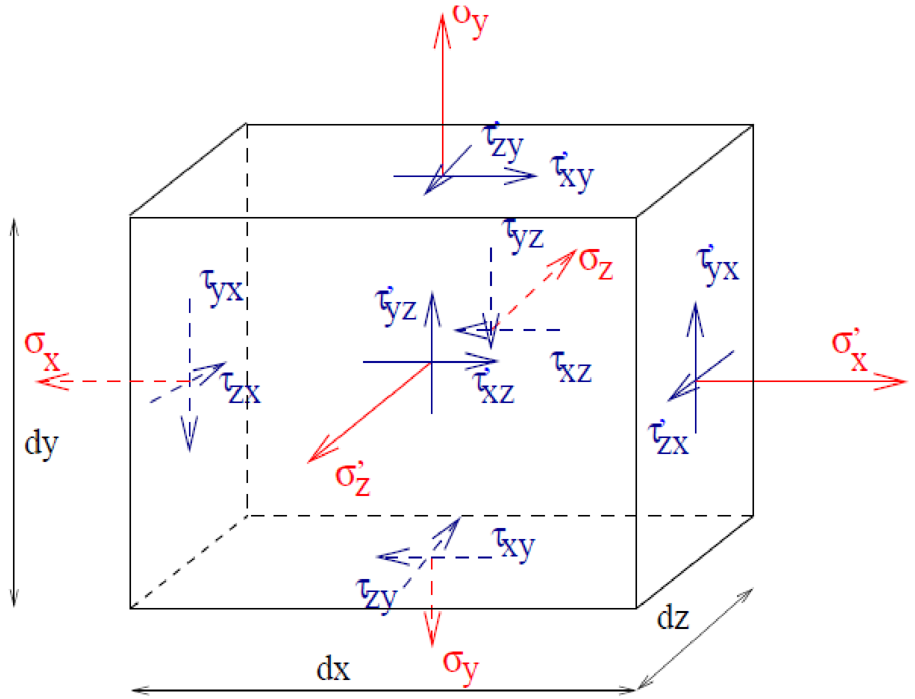
Diferenciální podmínky rovnováhy

$$\sigma_x{}' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$

...

$$\tau_{xy}{}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy,$$

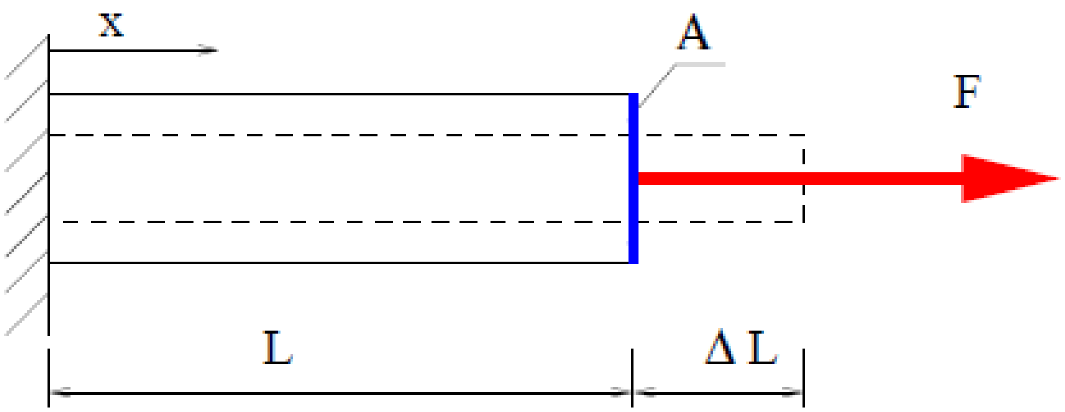
...



$$\sum F_{i,x} = (\sigma_x - \sigma_x') \, dy \, dz + (\tau_{xy} - \tau_{xy}') \, dx \, dz + (\tau_{xz} - \tau_{xz}{}') \, dx \, dy = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0
\end{aligned}$$

Fyzikální rovnice



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = E\,\varepsilon_x$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}
\end{aligned}$$

Souhrn teorie pružnosti

15 neznámých veličin:

3 složky posunutí

6 složek deformací

6 složek napětí

15 rovnic:

6 geometrických rovnic

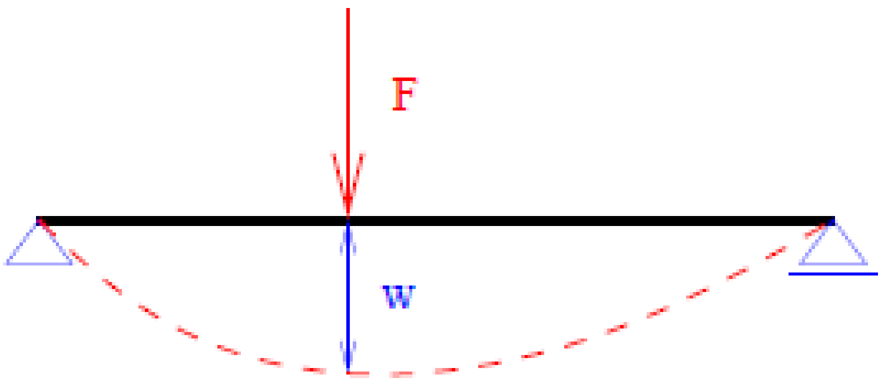
3 podmínky rovnováhy

6 fyzikálních rovnic

Princip virtuálních prací - vnější síly

Virtuální veličina je smyšlená, ale reálně možná síla nebo deformace

Práce je součin síly a dráhy, na které působí.



$$L_e = F\ w,\ [N\ m] = [J]$$

$$L_e = \int_a^b q(x) w(x)\ dx$$

Práce virtuálních sil na skutečné deformaci nebo skutečné síly na virtuální deformaci.

Princip virtuálních prací - vnitřní síly

Zahrnuje práci všech uvážených vnitřních sil elementu na příslušné dráze (úsečce u sil nebo pootočení u momentů).

$$L_i = -\left\{\int_l N\,du + \int_l M_y\,d\varphi_y + \int_l M_z\,d\varphi_z + \int_l T\,d\varphi_x + \int_l V_y\,dv + \int_l V_z\,dw\right\}$$

Vnitřní síly brání deformacím, a proto jsou do vztahu zavedeny záporné znaménka (před celkovou závorkou).

Princip virtuálních prací

Princip zachování energie určí, že celkový součet vnějších a vnitřních prací je roven 0:

$$L_e + L_i = 0 \qquad \text{nebo} \qquad L_e = -L_i$$

Je využit v metodě jednotkových sil:

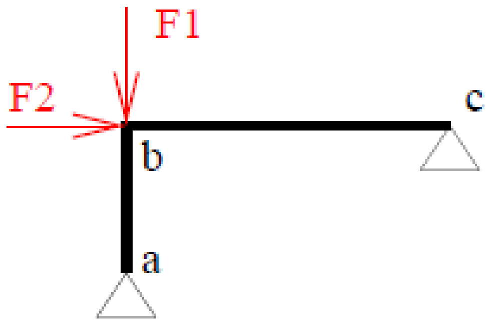
1) Stanovíme průběhu vnitřní síl od skutečného zatížení,
2) Zavedení jednotkové virutální síly na místě hledaného posunutí nebo pootočení,
3) Určení průběhu virtuálních vnitřních sil,
4) Výpočet deformace dle obecné rovnice intergrace vnitřních a vnějších sil:

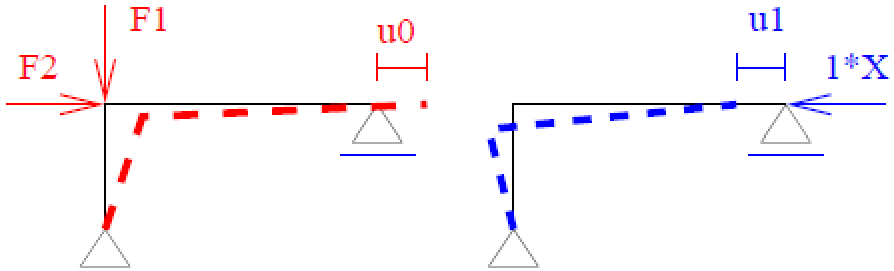
$$\delta = \int_0^l \frac{N\overline{N}}{EA}dx + \int_0^l \frac{M\overline{M}}{EI}dx + \int_0^l \frac{V\overline{V}}{GA^*}dx$$

Silová metoda

Využívá se pro řešení staticky neurčitých konstrukcí.

Aplikuje princip virtuálních prací, podmínky rovnováhy, superppozici a další.





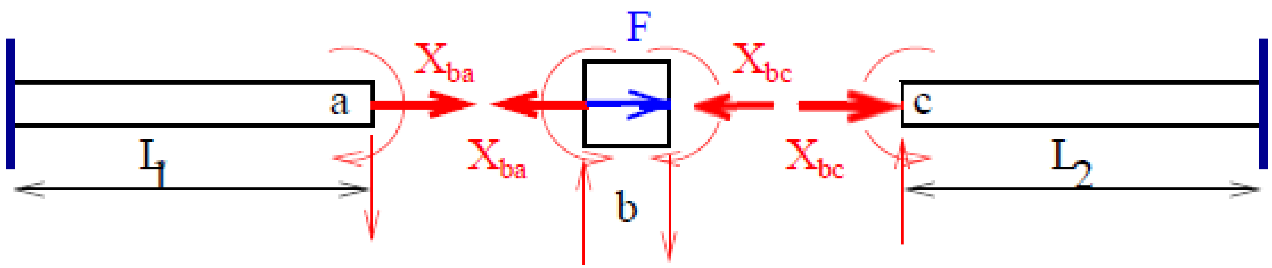
Je využit v metodě jednotkových sil:

1) Určení stupně neurčitosti *N*,
2) Odebrání *N* vazeb – vznik staticky určité soustavy,
3) Vložení síly místo odebraných vazeb,
4) Určení deformace ve všech stavech v místě odebraných vazeb,
5) Destavení podmínky rovnováhy – součet součinů deformací a sil je roven 0

Deformační metoda

Využívá se pro řešení staticky neurčitých konstrukcí.

Aplikuje princip virtuálních prací, podmínky rovnováhy, superppozici a další.

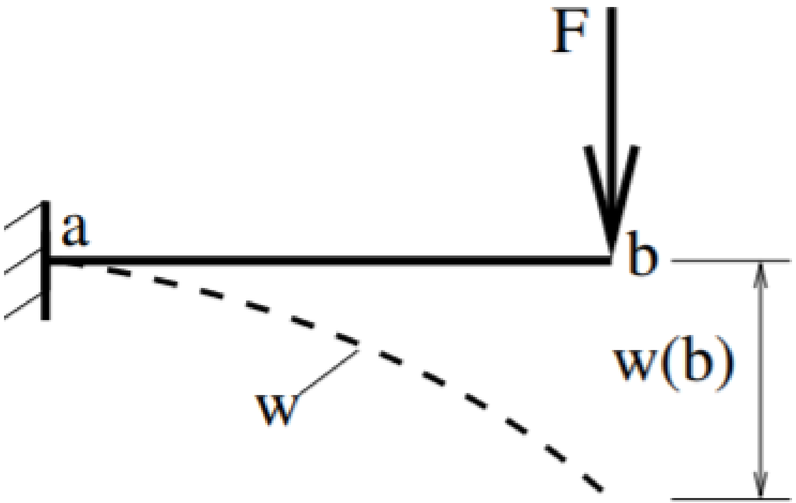


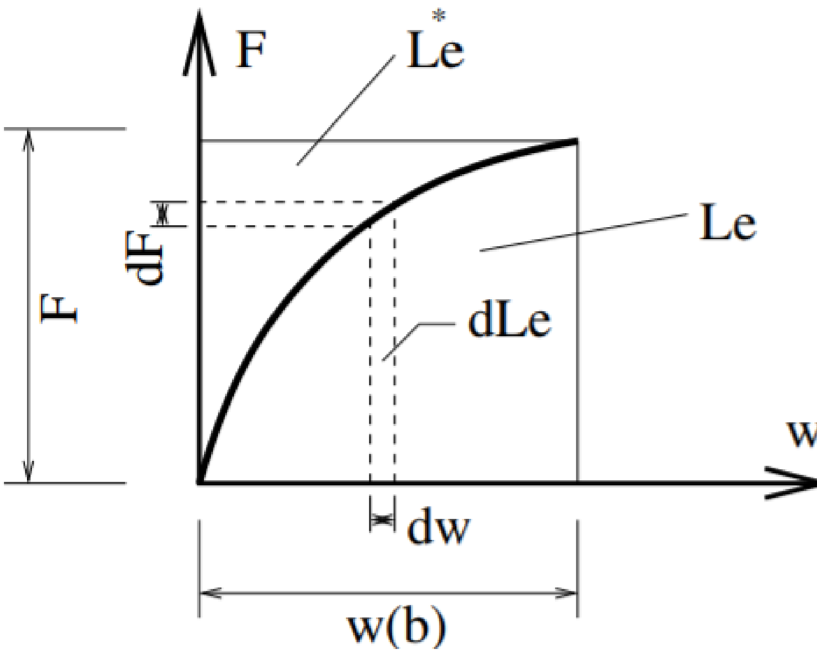
Je využit v metodě jednotkových sil:

1) Sestavené podmínek rovnováhy ve styčníku,
2) Určení sil v prutech dle principu pružnosti,
3) Využití matice tuhosti, vektoru zatížení a vektoru posunutí,
4) Lokalizace matic a vektorů do globalnách matic a vektorů,
5) Analýza soustavy $\mathbf{K} \times \mathbf{u} = \mathbf{F}$ a výpočet vnitřích sil soustavy.

Energetické principy

Potenciální energie vnějších sil





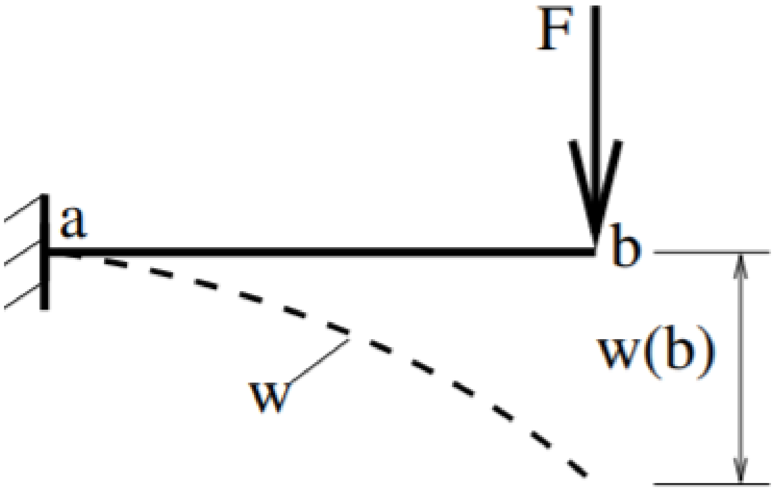
$$d\ L_e = F(w)\ d\ w.$$

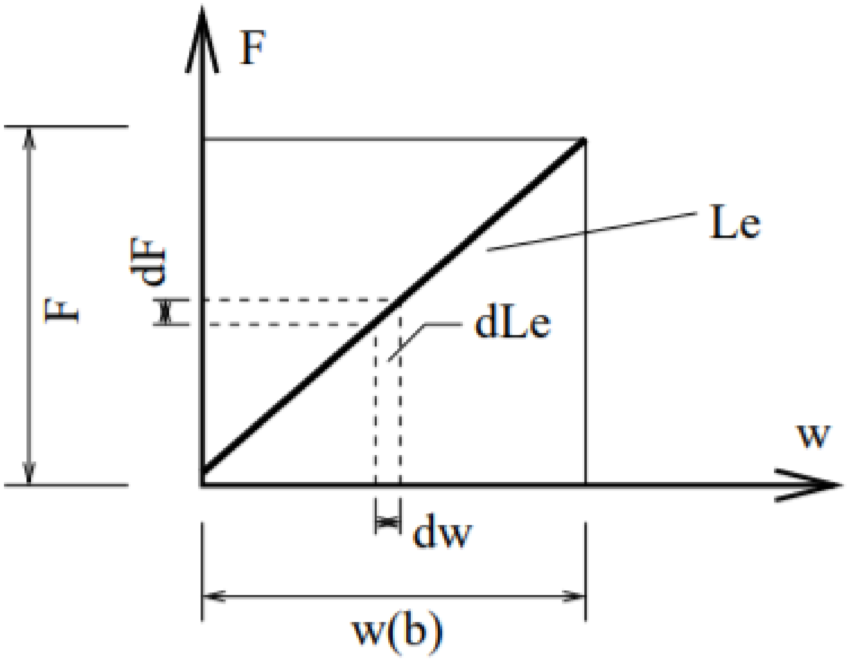
$$L_e = \int_0^w F(w)\ d\ w.$$

$$L_e + L_e^* = F\ w(b)$$

Energetické principy

Clapeyronova věta





$$L_e = \frac{1}{2} F \; w,$$

$$\Pi_e = -(L_e + L_e^*) \qquad \Pi_e = -F \; w$$

Energetické principy

Obecné zatížení

$$\Pi_e = -\sum_{i=1}^{n} F_i \, u_i - \sum_{i=1}^{n} M_j \, \varphi_j - \int_c^d q(x) \; w(x) \; d\,x$$

kde F jsou osamělé síly, u jsou posunutí ve směru jejich působení, M jsou osamělé momenty, ϕ jsou pootočení na kterých pracují momenty M , $q(x)$ je spojité zatížení a $w(x)$ je průhyb odpovídající spojitému zatížení $q(x)$.

$$\Pi_e = -\int_V \mathbf{X}^T \, \mathbf{u} \; d\,V - \int_s \mathbf{p}^T \, \mathbf{u} \; d\,S$$

kde X je vektor zatížení, u je vektor jim příslušných posunutí, V je objem a S je povrch studovaného tělesa.

Energetické principy

Potenciální energie vnitřních sil

$$W_\sigma = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)\, d\,\varepsilon. \qquad W_\varepsilon = \int_0^\gamma \tau(\gamma)\, d\,\gamma.$$

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\,\sigma\;\varepsilon \qquad W_\varepsilon = \frac{1}{2}\,\tau\;\gamma$$

$$L_i = W_\sigma + W_\varepsilon.$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_x\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\varepsilon_y + \sigma_z\,\varepsilon_z + \tau_{xy}\,\gamma_{xy} + \tau_{yz}\,\gamma_{yz} + \tau_{zx}\,\gamma_{zx})\,d\,V.$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\,V.$$

Energetické principy

Celková potenciální energie

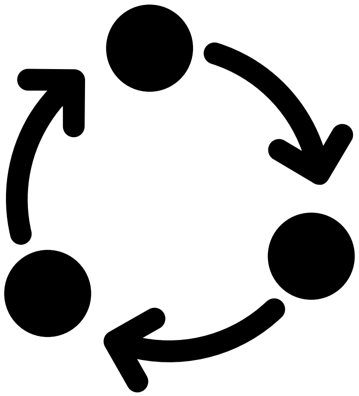
$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i$$

Lagrangeova principu minima

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = min$$

Ve stavební mechanice můžeme konstatovat, že – je-li k dispozici několik alternativních možností deformace konstrukce, pak nejsprávnější je ta, které odpovídá nejmenší celková potenciální energie.

MKP checklist



#1 – geometrie

#2 – materiál

#3 – souvislosti

#4 – zatížení

#5 – podpory

#6 – síť

#7 – kontakty

MKP checklist #1 - geometrie

Většinou přebíráte geometrii, takže vždy kontrolujte:

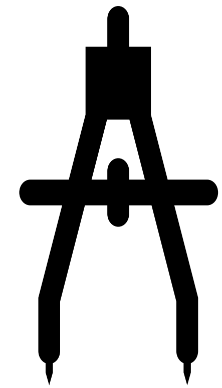
(a to i v případě, že jste ji vytvořili vy sami):

- rozměry, směry, osy, jednotky,
- dvojité a překrývající se plochy a objemy,
- nepotřebné body, čáry, křivky,
- chybějící linie a řezy.

MKP checklist #2 - materiál

Nestačí jen vybrat materiál a věřit tomu.

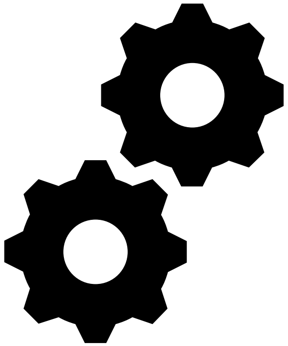
Je potřeba:



- projít jednotlivé parametry a jednotky,
- zadat vlastní tíhu,
- zkontrolovat zda máme lineární nebo nelineární úlohu a podle toho nastavit materiály.

MKP checklist #3 - souvislosti

Většina modelů není z jednoho materiálu a jednolité geometrie a proto zkontrolujte:



- zda každý prvek má správný materiál,
- jestli každá část má správný průřez,
- zda mají jednotlivé části modelu korektní rozměry a vazby.

MKP checklist #4 - zatížení

Software za vás nikdy nezkontroluje zda je zatížení v pořádku, a proto musíte zhodnotit:

- zda jsou všechny hodnoty v pořádku,
- jestli jsme je zadali na všechny body, linie, plochy, které jsme měli,
- zda máme správný souřadný systém.

MKP checklist #5 - podpory

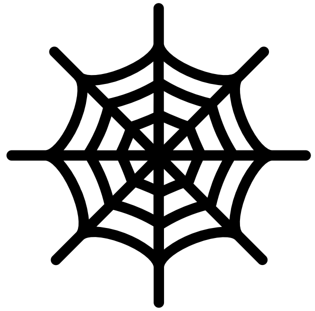
Stejně jako celý geometrický model jsou důležité

podpory, u kterých je potřeba:

- že musí odpovídat realitě,
- zda jsou správného směru, typu a umístění,
- že při kombinaci všech podpor nevytváříme mechanismus – tedy model je nestabilní.

MKP checklist #6 - síť

Vzhledem k tomu že síť konečných prvků přímo ovlivňuje stabilitu výpočtu, je potřeba:



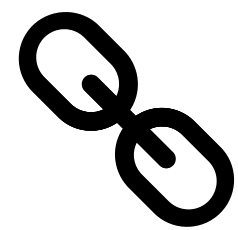
- ujistit se, že u sousedních povrchů navazuje,
- kontrolovat, zda síť navazuje na všechny hrany,
- připravit jemnou síť v důležitých místech a naopak hrubou síť na rozsáhlých plochách.

MKP checklist #7 - kontakty

Tento bod platí hlavně pro větší a složitější modely,

ale i u menších modelů si musíte dát pozor:

- zda jsou správně nastaveny všechny kontakty,
- jestli odpovídají významu (tření, jednostranná vazba, pevná vazba atd.),



- za jsou kontakty na korektních plochách.

Co nás čeká příště?

Ritzova metoda.

Základní princip MKP.

Matice tuhosti.

Odvození konečného prvku příhrady.

Jak přesná je analýza konečných prvků?