

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ A INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

PŘÍKLADY DVOUROZMĚRNÝCH ELEKTRICKÝCH POLÍ

doc. RNDr. Marek Lampart, Ph.D. ¹

22. října 2014

Použití konformního zobrazení v teorii elektrického pole by se mohlo chápat jako zkoumání elektrického pole daného komplexní funkcí komplexní proměnné

$$f = u + iv,$$

kteřá vyhovuje hraničním podmínkám pole, tj. takovou funkcí, jejíž reálná a imaginární část vyjadřuje hladiny a siločary pole. Nalézt takovou funkci je obtížný úkol. Volme proto opačný postup, tedy k dané funkci najdeme hraniční podmínky, tj. obraz příslušného pole (hladiny a siločary).

Příklad první

Zkoumejme

$$f(z) = z^2$$

a nalezneme hraniční podmínky.

Řešení:

Zřejmě

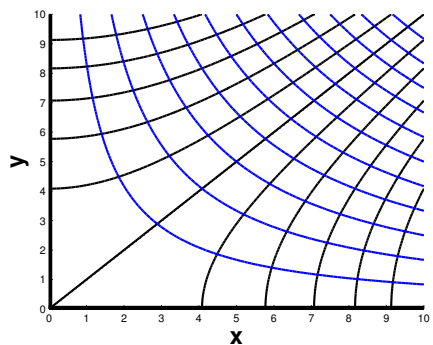
$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

tedy

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Křivky $u = c$, $c \in \mathbb{R}$ jsou rovnoosé hyperboly s asymptotami v přímkách os I. a II. kvadrantu. Křivky $v = c$, $c \in \mathbb{R}$ jsou rovnoosé hyperboly s asymptotami v osách souřadnic. Funkce w tak dává obraz elektrického pole mezi dvěma polonekonečnými na sobě kolmými elektrodami, kde $v = c$ jsou hladiny a $u = c$ jsou siločary, viz Obrázek 1.

¹Děkuji mé ženě RNDr. Alžbětě Lampartové a prof. Ing. Jaroslavu Zapomělovi, DrSc. za korekturu a cenné připomínky, které vedly k podstatnému zlepšení textu. Tento text nebyl podpořen žádným grantem.



Obrázek 1: Hladiny $v = c$ (modře) a siločary $u = c$ (černě) elektrického pole prvního příkladu.

Příklad druhý

Jako v předešlém případě zkoumejme

$$f(z) = \sqrt{z}$$

a nalezneme hraniční podmínky.

Řešení:

Prvně

$$f(z) = f(x + iy) = \sqrt{x + iy},$$

tedy

$$\begin{aligned} \sqrt{x + iy} &= u + iv, \\ x + iy &= u^2 - v^2 + i2uv \end{aligned}$$

a

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

Nyní dosadíme $v = y/2u$ do $x = u^2 - v^2$, dostáváme

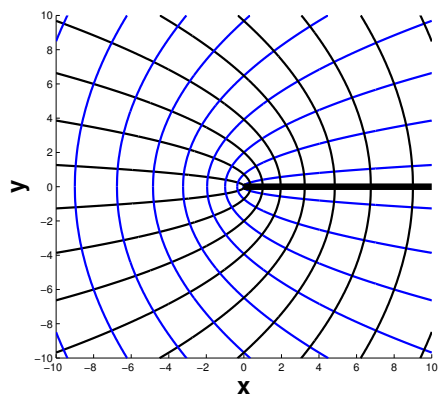
$$y^2 = -4u^2(x - u^2). \quad (1)$$

Analogicky dosazením $u = y/2v$ do $x = u^2 - v^2$ dostaneme

$$y^2 = 4v^2(x + v^2). \quad (2)$$

Pro reálná u a v značí (1), resp. (2) soustavu parabol s ohniskem v bodě $(0, 0)$, s osou symetrie v ose x a otevřených ve směru záporné, resp. kladné části osy x .

Funkce f tak poskytuje obraz elektrického pole vytvořeného polonekonečnou rovinou ohraničenou po jedné straně přímkou kolmou k nákresně. Křivky $v = c$, $c \in \mathbb{R}$ jsou hladiny a $u = c$, $c \in \mathbb{R}$ jsou siločary, viz Obrázek 2. V každé rovině rovnoběžné s nákresnou je obraz stejný.



Obrázek 2: Hladiny $v = c$ (modře) a siločary $u = c$ (černě) elektrického pole druhého příkladu.

Reference

- [1] Z. Pírko, *Komplexní čísla. Reprezentace periodických dějů. Konformné zobrazení.* Skriptum ČVUT Praha, SPN Praha, 1952.