Vzorové řešení zkouškové písemky

Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

prof. RNDr. Marek Lampart, Ph.D. [1]

2. září 2022

Obecná pravidla

- čas: 90 minut
- počet zadaných příkladů: 7
- hodnocení: každý příklad bude oceněn nejvýše 10-ti body
- povolené materiály: schválená tabulka Laplaceových transformací, jednoduchý kalkulátor

Příklad první: Komplexní čísla

1.1. Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li:

$$z = \operatorname{Ln}(\cos(i)).$$

Řešení: Nejprve připomeňme, že:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

Počítejme

$$\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \cosh(1).$$

Dále

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(\cos(i)) = \operatorname{Ln}(\cosh(1)) &= \ln|\cosh(1)| + i \operatorname{Arg}(\cosh(1)) = \\ &= \ln(\cosh(1)) + i(\arg(\cosh(1)) + 2k\pi) = \\ &= \ln(\cosh(1)) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zde je zřejmě $\arg(\cosh(1)) = 0$, protože $\operatorname{Im}(\cosh(1)) = 0$ a $\operatorname{Re}(\cosh(1)) > 0$.

Pak

$$\operatorname{Re}(z) = \ln(\cosh(1)) \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}(z) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.2. Určete $\operatorname{Re} z_0$ a $\operatorname{Im} z_0$, je-li:

$$z_0 = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)^4.$$

Řešení: K řešení použijeme Moiverovu větu:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)).$$

Tady $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$, $|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$, $n = 4$ a $\arg(z) = \phi = 3/4\,\pi$. Dosaďme do výše uvedeného vzorce:

Zde je $\operatorname{Re}(z) = -\sqrt{2}$ a $\operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}$, proto platí $\arg(z) = \pi/2 + \arctan(\sqrt{2}/\sqrt{2}) = = \pi/2 + \pi/4 = 3/4\,\pi$.

$$(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)^4 = 2^4(\cos(4 \cdot 3/4\,\pi) + i \sin(4 \cdot 3/4\,\pi)) = 2^4(\cos(3\pi) + i \sin(3\pi)) = -16.$$

Celkově tedy

$$\operatorname{Re}(z_0) = -16 \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}(z_0) = 0.$$

[1] Děkuji své ženě RNDr. Alžbětě Lampartové a prof. RNDr. Renému Kalusovi, Ph.D. za korekturu a cenné připomínky, které vedly k podstatnému zlepšení textu. Dík patří také pilným studentům, kteří mně upozornili na numerické chyby. Tento text nebyl podpořen žádným grantem.

Příklad druhý: Derivace komplexní funkce

2.1. Nalezněte $v(x, y)$ tak, aby $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla holomorfní funkce na $\mathbb{C}$ a $f(1) = -2 + i$, jestliže:

$$u(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - 3.$$

Řešení: Prvně

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2,$$

pak

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (12x^2 - 12y^2) + (12y^2 - 12x^2) = 0,$$

obecné řešení daného problému tedy existuje. Pro výpočet použijeme Cauchyho–Riemannovy vzorce. Použijme nejprve první z nich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 4x^3 - 12xy^2 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

Zde je $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$.

tedy

$$v(x, y) = \int (4x^3 - 12xy^2)\mathrm{d}y = 4x^3y - 4xy^3 + \phi(x). \tag{1}$$

Nyní dosadíme (1) do druhého Cauchyho–Riemannova vzorce a dostaneme rovnici pro neznámou funkci $\phi(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad 4y^3 - 12yx^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(12x^2y - 4y^3 + \phi'(x)),$$

Zde je $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 12yx^2$.

$$\phi'(x) = 0, \quad \phi(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení má tvar:

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + c.$$

Nalezněme nyní řešení vyhovující podmínce $f(1) = f(1 + 0 \cdot i) = -2 + i$:

$$-2 + i = 1 - 3 + i \cdot c, \quad c = 1.$$

Do u a v dosazujeme $x = 1$ a $y = 0$.

Řešení problému vyhovující zadané podmínce má tvar

$$v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 1.$$

2.1. Zjistěte, ve kterých bodech má následující funkce derivaci a kde je analytická:

$$f(z) = z \cdot \overline{z}.$$

Řešení: Nejprve provedeme rozklad f na její reálnou a imaginární část:

$$f(x + i \cdot y) = (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2.$$

Tedy

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

Nyní použijeme Cauchyho–Riemannovy vztahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow 2y = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

Cauchyho–Riemannovy podmínky jsou splněny jen tehdy, pokud je $z = 0$, zadaná funkce má tedy derivaci v bodě $z = 0$ a to $f'(0) = 0$. Funkce není v bodě $z = 0$ analytická, protože nemá derivaci na žádném jeho okolí, není analytická nikde v $\mathbb{C}$.

Skutečně $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0 + 0 \cdot i = 0$.

Příklad třetí: Konformní zobrazení

3.1. Znázorněte množiny Ω a $f(\Omega) = \{f(z) : z \in \Omega\}$, je-li $\Omega = U(1+i, 1)$ a

$$f(z) = \frac{i}{z-i} + 1.$$

Řešení: Zadané zobrazení je konformní, lineárně lomené. Zobrazuje tedy zobecněnou kružnici na zobecněnou kružnici (viz skriptum). Stačí tedy spočítat obrazy vhodně zvolených bodů na hranici dané kružnice:

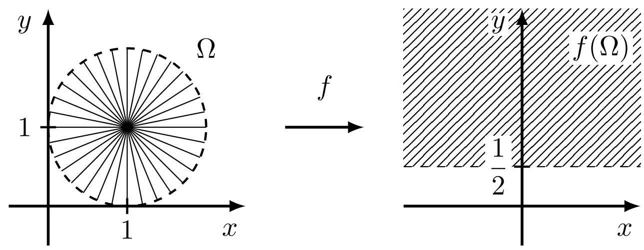
$$\begin{aligned} f(1) &= 1/2 + i/2, \\ f(1+2i) &= 3/2 + i/2, \\ f(2+i) &= 1 + i/2. \end{aligned}$$

Obrazem hranice oblasti Ω je tedy přímka rovnoběžná s osou x. Nyní provedeme test, kam se zobrazí vnitřek oblasti Ω:

Protože se jedná o přímku rovnoběžbou s osou x, stačí si všimnout, že $\mathrm{Im}\,(f(1)) = \mathrm{Im}\,(f(1+2i)) = \mathrm{Im}\,(f(2+i)) = 1/2$.

$$f(1+i) = 1 + i,$$

tedy $f(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 1/2\}$, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Oblasti Ω a $f(\Omega)$.

3.2. Najděte lineární lomenou funkci f, která splňuje následující:

$$f(0) = i, \quad f(i) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Řešení: Budeme hledat koeficienty a, b, c a d takové, aby zadané podmínky vyhovovaly:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad \neq bc.$$

Dosaďme zadané hodnoty:

$$\begin{aligned} f(0) &= b/d = i, \\ f(i) &= (ai+b)/(ci+d) = 0, \\ f(1) &= (a+b)/(c+d) = 1. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy soustavu tří rovnic o čtyřech neznámých, za jednu neznámou zvolíme vhodnou hodnotu a soustavu dopočítáme. Volbou $b = 1$ v první rovnici dostaneme $d = -i$. Dosazením do druhé rovnice získáváme $a = i$. Konečně dosazením do třetí rovnice dostáváme $c = 2i + 1$. Hledaná funkce má tedy tvar:

$$f(z) = \frac{iz+1}{(1+2i)z - i}.$$

Poznamenejme, že řešení daného problému existuje a je jednoznačné (viz skriptum).

Příklad čtvrtý: Taylorovy a Laurentovy řady

4.1. Najděte Taylorovu řadu funkce f o středu $1+i$, kde

$$f(z) := \frac{1}{1-z}.$$

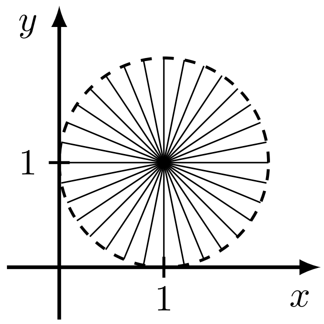
Graficky znázorněte oblast konvergence.

Řešení: Nejprve si uvědomme, že daná funkce je holomorfní na oblasti $U(1+i,1)$ (viz Obrázek 2). K nalezení dané Taylorovy řady použijme tvrzení o konvergenci geometrické řady. Proveďme následující úpravu, získáme tím danou řadu s daným středem:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(1+i)-(z-(1+i))} = \frac{1}{-i-(z-(1+i))} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z-(1+i)}{-i}} = \\ &= -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-(1+i)}{-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-(1+i))^n}{-i^{n+1}}. \end{aligned}$$

Připomeňme, že geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ má součet pro $|q|<1$ a že zde volíme $q = (z-(1+i))/(-i)$.

Protože geometrická řada konverguje pro $|q|<1$, je zadaná řada konvergentní v oblasti $|z-(1+i)|<1$ (viz Obrázek 2).



Obrázek 2: Oblast $U(1+i,1)$.

4.2. Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) := \frac{1}{z^2-2z-3}$$

na mezikruží $\{z \in C:\ 1<|z|<3\}$. Graficky znázorněte oblast konvergence.

Řešení: Všimněme si, že $z^2-2z-3 = (z-3)(z+1)$. Body 3 a -1 nenáleží do daného mezikruží a tedy lze zadanou funkci f v dané oblasti derivovat, je holomorfní, Laurentovu řadu má smysl hledat. Nejprve upravíme zadanou funkci, po rozkladu na parciální zlomky dostáváme:

$$f(z) = \frac{1}{z^2-2z-3} = \frac{1}{(z-3)(z+1)} = \frac{1}{4}\frac{1}{z-3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z+1}.$$

Připomínka k rozkladu na parciální zlomky: $\frac{1}{(z-3)(z+1)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z+1}$, dopočítáváme A a B.

Nyní rozvíjejme dané části zadané funkce na příslušných oblastech: je-li $|z|>1$, pak

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{4z}\frac{1}{1-(-1/z)} = -\frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n},$$

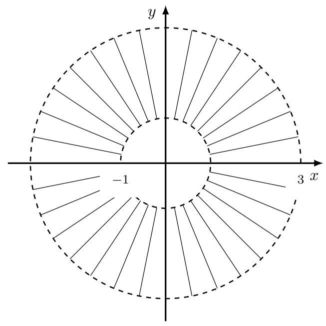
Opět připomeňme, že geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ má součet pro $|q|<1$. Zde volíme $q=-1/z$, tedy obor konvergence je $|z|>1$.

je-li $|z|<3$, pak

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{12}\frac{1}{1-(z/3)} = -\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Celkově tedy, Laurentův rozvoj zadané funkce na daném mezikruží (viz Obrázek 3) má tvar:

$$f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}.$$



Obrázek 3: Mezikruží $P(0,1,3)$.

Příklad pátý: Integrál komplexní funkce

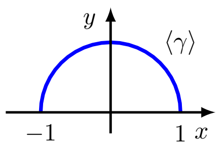
5.1. Vypočtěte
$$\int_\gamma z|z|\,\mathrm{d}z,$$
kde $\gamma(t) = e^{it}$ a $t \in [0,\pi]$.

Řešení: Nejprve si všimneme, že křivka, po které integrujeme, není uzavřená (viz Obrázek 4). Pro výpočet použijeme vzorce:
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$
V našem případě platí:
$$\gamma(t) = e^{it}, \quad \gamma'(t) = ie^{it}, \quad a = 0, \quad b = \pi$$
a
$$f(\gamma(t)) = e^{it} \cdot |e^{it}| = e^{it} \cdot 1.$$

Tady je $|e^{it}| = |\cos(t) + i\sin(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1.$

Po dosazení dostáváme:
$$\int_\gamma z|z|\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi e^{it} \cdot 1 \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t = i\int_0^\pi e^{2it}\,\mathrm{d}t = i\left[\frac{1}{2i}e^{2it}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left[e^{2\pi i} - e^0\right] = 0.$$

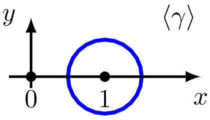
Integrál $\int_0^\pi e^{2it}\,dt$ lze dopočítat korektně lineární substitucí $w = 2it$.



Obrázek 4: Graf $\langle\gamma\rangle$ příkladu 5.1.

5.2. Vypočtěte
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)^2}\,\mathrm{d}z,$$
kde $\gamma(t) = 1/2\,e^{-it} + 1$ a $t \in [0, 6\,\pi]$.

Řešení: Křivka $\langle\gamma\rangle$ je uzavřená a hladká, uvnitř oblasti ohraničené $\langle\gamma\rangle$ leží jedna singularita $z_0 = 1$ (druhá singularita $z_1 = 0$ leží vně oblasti ohraničené $\langle\gamma\rangle$, proto ji neuvažujeme) viz Obrázek 5. K výpočtu můžeme použít Cauchyho integrální vzorec:
$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$
V tomto příkladu je
$$z_0 = 1, \quad g(z) = 1/z^2, \quad n+1 = 2.$$
Všimneme si, že křivka je orientována v záporném smyslu a parametr ji obíhá třikrát. Nyní můžeme dosadit
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1/z^2}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = -3 \cdot \frac{2\pi i}{1!}\left[\left(\frac{1}{z^2}\right)'\right]_{z=1} = -6\pi i[-2z^{-3}]_{z=1} = 12\pi i.$$



Obrázek 5: Graf $\langle\gamma\rangle$ a singularit příkladu 5.2.

5.3. Vypočtěte

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-i)(z+1)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde $\gamma(t) = 100e^{2it} + 3$ a $t \in [0,\pi]$.

Řešení: K výpočtu tohoto příkladu použijeme reziduovou větu:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_i).$$

Zadaná funkce má v oblasti ohraničené křivkou γ dvě singularity $z_1 = i$ a $z_2 = -1$. Bod z_1 je zřejmě jednoduchým pólem a bod z_2 je pólem násobnosti 2. Nyní počítejme rezidua v těchto bodech:

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{0!}\left[f(z)(z-i)\right] = \lim_{z\to i} \frac{\sin(z)}{(z+1)^2} = \frac{\sin(i)}{(i+1)^2},$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}\left[f(z)(z+1)^2\right]' = \lim_{z\to -1}\left[\frac{\sin(z)}{z-i}\right]' = \frac{\cos(-1)(-1-i) - \sin(-1)}{(i+1)^2}.$$

Tady je $\left[\frac{\sin(z)}{z-i}\right]' = \frac{\cos(z)(z-i)-\sin(z)}{(z-i)^2}$.

Nyní dosaďme do vzorce:

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z-i)(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{2} \operatorname{Res} f(z_i) = \frac{2\pi i}{(1+i)^2}[\sin(i) - \cos(1)(1+i) + \sin(1)].$$

Uvedený výsledek je možno ještě upravit, necháváme na pilném čtenáři.

Příklad šestý: Fourierovy řady

6.1. Najděte Fourierovu řadu periodického prodloužení následující funkce a načrtněte graf součtu dané Fourierovy řady:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } t \in [0,1), \\ 0, & \text{pro } t \in [1,2). \end{cases}$$

Řešení: Perioda daného prodloužení je $T = 2$. Dále $\omega = 2\pi/T = \pi$. Nyní spočtěme Fourierovy koeficienty:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{2}\left[\int_0^1 1\mathrm{d}t + \int_1^2 0\mathrm{d}t\right] = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(n\pi t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi t)\right]_0^1 = 0,$$

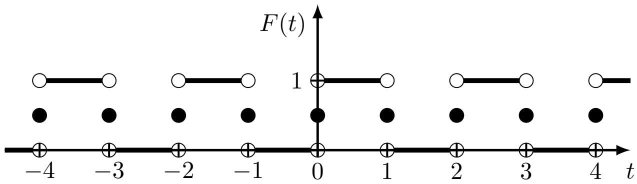
Nápověda: $\int_1^2 0 \cdot \cos(n\pi t)\mathrm{d}t = 0$ a pro výpočet $\int_0^1 \cos(n\pi t)\mathrm{d}t$ použujeme lineární substituci $w = n\pi t$.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(n\pi t)\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi t)\right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi}[(-1)^n - 1].$$

Fourierova řada pro danou funkci má tvar:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]\sin(n\pi t). \qquad (2)$$

Součet uvedené řady získáme pomocí Dirichletovy věty, tedy hodnota v každém bodě je rovna aritmetickému průměru jednostranných limit, součet je znázorněn na Obrázku 6.



Obrázek 6: Graf součtu Fourierovy řady (2).

6.2. Určete periodu, úhlovou rychlost, a první čtyři členy jednostranného amplitudového spektra a první tři členy jednostranného fázového spektra Fourierovy řady:

$$-\sqrt{2}-\cos(4\pi t)+\sin(4\pi t)-\sqrt{5}\cos(8\pi t)-4\sqrt{3}\cos(12\pi t)+4\sin(12\pi t)\pm\dots$$

Uveďte vzorce pro jejich výpočet.

Řešení: Nejprve si z hodnot argumentů funkcí sinus a kosinus všimneme, že kruhová frekvence je $\omega = 4\pi$ a perioda je $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4\pi = 1/2$. Pro výpočet použijeme vzorců

$$A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right|, \quad A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}, \quad \phi_n = -\arg c_n.$$

Zde $c_n = 1/2(a_n - ib_n)$. Zřejmě platí $-\arg c_n = \arg c_{-n}$, tady $c_{-n} = 1/2(a_n + ib_n)$. Proto pokud je $b_n = 0$ a $a_n < 0$ je výsledek ϕ_n akceptovatelný jak $-\pi$ tak π.

Po dosazení dostáváme hodnoty uvedené v Tabulce 1.

n	a_n	b_n	A_n	ϕ_n
0	$-2\sqrt{2}$	ndf	$\sqrt{2}$	ndf
1	-1	1	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$
2	$-\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$	π
3	$-4\sqrt{3}$	4	8	$5\pi/6$

Tabulka 1: Tabulka hodnot amplitudového a fázového spektra zadané řady.

Příklad sedmý: Laplaceova transformace

7.1. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení následující rovnice se zadanými počátečními podmínkami:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-4t}, \quad y(0+) = y'(0+) = 0.$$

Řešení:

Označme $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p)$$

a

$$\mathcal{L}(y''(t)) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).$$

Pro pravou stranu rovnice máme

$$\mathcal{L}(e^{-4t}) = 1/(p+4).$$

Viz povolený tahák: Tabulka Laplaceových transformací.

Nyní dosadíme a sestavíme operátorovou rovnici:

$$p^2Y(p) - 2pY(p) - 3Y(p) = \frac{1}{p+4},$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+4)(p+1)(p-3)}.$$

Funkce $Y(p)$ má tři jednoduché póly -4, -1 a 3. Aplikujme Větu 16, budeme hledat řešení ve tvaru $y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}[Y(p)e^{pt}]_{p=z_i}$. Počítejme jednotlivá rezidua:

$$\mathrm{Res}[Y(p)e^{pt}]_{p=-4} = \lim_{p\to -4} \frac{1}{(p+1)(p-3)} e^{pt} = \frac{1}{21} e^{-4t},$$

$$\mathrm{Res}[Y(p)e^{pt}]_{p=-1} = \lim_{p\to -1} \frac{1}{(p+4)(p-3)} e^{pt} = -\frac{1}{12} e^{-t},$$

$$\mathrm{Res}[Y(p)e^{pt}]_{p=3} = \lim_{p\to 3} \frac{1}{(p+4)(p+1)} e^{pt} = \frac{1}{28} e^{3t}.$$

Řešení je součtem výše spočtených reziduí:

$$y(t) = \frac{1}{21} e^{-4t} - \frac{1}{12} e^{-t} + \frac{1}{28} e^{3t}.$$

Ověření správnosti výsledku přenecháváme čtenáři, u zkoušky není povinné.

7.2. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení následující rovnice se zadanými počátečními podmínkami:

$$y'' - 3y' + 2y = te^{3t}, \quad y(1+) = y'(1+) = 1.$$

Řešení:

Protože počáteční podmínky nejsou dány v bodě $t_0 = 0$, musíme provést substituci $t = \tau + 1$ a $y(t) = y(\tau + 1) = z(\tau)$. Nová rovnice má tvar

$$z'' - 3z' + 2z = (\tau + 1)e^{3(\tau+1)}, \quad z(0_+) = z'(0_+) = 1.$$

Nyní položme $\mathcal{L}(z(\tau)) = Z(p)$, pak

$$\mathcal{L}(z'(\tau)) = pZ(p) - 1,$$

$$\mathcal{L}(z''(\tau)) = p^2 Z(p) - p - 1.$$

Dále

$$\mathcal{L}((\tau+1)e^{3(\tau+1)}) = e^3\, \mathcal{L}(\tau e^{3\tau} + e^{3\tau}) = e^3 \left[\frac{1}{(p-3)^2} + \frac{1}{p-3} \right].$$

Viz povolený tahák: Tabulka Laplaceových transformací, vlastnost posunutí.

Vyjádříme $Z(p)$ po rozkladu na parciální zlomky

$$Z(p) = \frac{1}{4} e^3 \left[\frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p-3)^2} - \frac{1}{p-3} \right] + \frac{1}{p-1}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme pro $\tau \geq 0$ řešení

$$z(\tau) = \frac{1}{4} e^3 \left[e^{\tau} + 2\tau e^{3\tau} - e^{3\tau} \right] + e^{\tau}.$$

Zpětnou substitucí $\tau = t - 1$ a $z(\tau) = y(t)$ dostáváme po úpravách pro $t \geq 1$ řešení

$$y(t) = \frac{2t-3}{4} e^{3t} + \frac{e^3 + 4}{4e} e^{t}.$$

Ověření správnosti výsledku přenecháváme čtenáři, u zkoušky není povinné.

7.3. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení následující rovnice se zadanými počátečními podmínkami:

$$y' - y = f(t), \quad y(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

Řešení: Označme $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Pak $\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0) = pY(p)$. Pro pravou stranu rovnice máme

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}).$$

Výpočet je možný užitím definice i pomocí tabulky, proveďte jako cvičení obojí.

Nyní dosadíme a sestavíme operátorovou rovnici:

$$pY(p) - Y(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}),$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p-1)}(1 - e^{-p}).$$

Nyní po rozkladu na parciální zlomky

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p-1)} \right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = e^t - 1.$$

Řešení má tvar:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p-1)}(1-e^{-p})\right) = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p-1)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p-1)}e^{-p})\right) = \\ &= (e^t-1)\eta(t) - (e^{t-1}-1)\eta(t-1), \end{aligned}$$

ekvivalentně zapsáno

$$y(t) = \begin{cases} e^t - 1, & \text{pro } 0 < t < 1, \\ e^t - e^{t-1}, & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

Ověření správnosti výsledku přenecháváme čtenáři, u zkoušky není povinné.

Příklad osmý: teorie

8.1.
- Definujte pojmy *absolutní hodnota, argument a hlavní argument* komplexního čísla.
- Formulujte reziduovou větu.

8.2.
- Definujte funkce $\ln z$ a $\operatorname{Ln} z$ na komplexním oboru.
- Definujte Dirichletovy podmínky.

8.2.
- Napište definici *mocninné řady* a *sdruženého komplexního čísla.*
- Napište vztah pro výpočet *poloměru konvergence* mocninné řady se středem v bodě z_0.

Řešení:
Viz skripta.