Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Laplaceova transformace II.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aplikace Laplaceovy transformace

Řešení diferenciálních rovnic

Uvažujme Cauchyho úlohu pro lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a počátečními podmínkami

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{(n-1)} x' + a_n x = f, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0', \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Dále předpokládejme, že pravá strana rovnice f a řešení x včetně jejich derivací až do řádu n jsou předměty.
Za těchto podmínek můžeme danou úlohu řešit Laplaceovou transformací.
Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že počáteční podmínky jsou dány v bodě $t_0 = 0$, tedy

$$x(0_+) = x_0,\ x'(0_+) = x_0', \dots,\ x^{(n-1)}(0_+) = x_0^{(n-1)}. \tag{3}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Označme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ a $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.
Pak rovnici (1) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
[p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_0' \ldots - x_0^{(n-1)}] &\quad + \\
a_1[p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x_0' \ldots - x_0^{(n-2)}] &\quad + \\
&\quad \vdots \\
a_{(n-1)}[pX(p) - x_0] &\quad + \\
a_n X(p) &\quad = \quad F(p).
\end{aligned} \tag{4}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Po úpravách dostáváme

$$X(p) = \frac{F(p) - P(p)}{Q(p)}, \tag{5}$$

kde $Q(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$ je charakteristický polynom rovnice (1) a stupeň polynomu P je nejvýše $(n-1)$.
Nyní stačí najít k funkci X předmět x.
Takovýto předmět je pak podle jednoznačnosti zpětné Laplaceovy transformace řešením diferenciální rovnice (1) na intervalu $(0, \infty)$.

Aplikace Laplaceovy transformace

Poznámka 1

1. *Výše popsaný postup se nazývá operátorová metoda.*
2. *Rovnice* (4) *se nazývá operátorová.*
3. *Výhodou operátorové metody je jednoduchost operací při řešení.*
4. *Řešením dostáváme rovnou partikulární řešení (pokud nejsou počáteční podmínky známy, dostáváme řešení obecné).*

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 1

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = 4, \\ x(0_+) = 0,\ x'(0_+) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Budeme postupovat výše popsanou operátorovou metodou.
Tedy položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$,*pak*

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p),$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2X(p) - 1.$$

Dále $\mathcal{L}(4) = 4/p, \operatorname{Re} p > 0$. *Odpovídající operátorová rovnice má tvar*

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) + X(p) = 4/p.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 1

Vyjádříme $X(p)$

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p-1)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 1.$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostáváme

$$X(p) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p-1} + \frac{5}{(p-1)^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací získáme pro $t \geq 0$ *řešení*

$$x(t) = 4 - 4e^t + 5te^t.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 1

Ve výše popsaném postupu je možno se vyhnout rozkladu na parciální zlomky.
Stačí si všimnout, že funkce

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p-1)^2}$$

má v bodě 0 *jednoduchý pól a v bodě* 1 *dvojnásobný pól.*
Pak podle známých vzorců pro výpočet reziduí dostáváme

$$\mathrm{Res}[X(p)e^{pt}]_{p=0} = 4,$$

$$\mathrm{Res}[X(p)e^{pt}]_{p=1} = 5te^t - 4e^t.$$

Na základě zpětné Laplaceovy transformace dostáváme řešení

$$x(t) = 4 - 4e^t + 5te^t.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 2

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + 4x = 2\cos(2t), \\ x(0_+) = 0,\ x'(0_+) = 4. \end{cases} \tag{7}$$

Budeme postupovat výše popsanou operátorovou metodou.
Tedy položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$*, pak*

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p),$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2 X(p) - 4.$$

Dále $\mathcal{L}(2\cos(2t)) = 2p/(p^2 + 4)$*.*

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 2

Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2+4)X(p)-4=\frac{2p}{p^2+4}.$$

Vyjádříme $X(p)$:

$$X(p)=\frac{4}{p^2+4}+\frac{2p}{(p^2+4)^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t)=1/2\,(4+t)\sin(2t).$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 3

Nespojitá pravá strana I.

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0_+) = 1,\ x'(0_+) = -1, \end{cases} \tag{8}$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \textit{pro}\ \ 0 \le t \le 1 \\ 0, & \textit{pro}\ \ t > 1. \end{cases} \tag{9}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 3

Nespojitá pravá strana I.

Postupujme podobně jako u předchozích příkladů.
Položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, *pak*

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - 1,$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2X(p) - p + 1.$$

Dále $\mathcal{L}(f(t))$ *je možno počítat přímo z definice:*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}). \tag{10}$$

Nebo si stačí všimnout, že $f(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$ *a podle vlastnosti posunutí Věty 3 opět dostáváme* (10)*.*

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 3

Nespojitá pravá strana I.

Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 + 1)X(p) - p + 1 = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}).$$

Vyjádříme $X(p)$.

Po rozkladu na parciální zlomky

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p^2 + 1)} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}\right) e^{-p}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = (1 - \sin(t))\eta(t) - (1 - \cos(t))\eta(t - 1).$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 3

Nespojitá pravá strana I.

Nebo bez užití $\eta(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \sin(t), & t \in [0,1), \\ \cos(t) - \sin(t), & t \geq 1. \end{cases}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 4

Nespojitá pravá strana II.

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0_+) = 1,\ x'(0_+) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \textit{pro}\ \ 0 \le t \le 3 \\ 2, & \textit{pro}\ \ t > 3. \end{cases} \tag{12}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 4

Nespojitá pravá strana II.

Postupujme analogicky jako u předchozího příkladu.
Položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, *pak*

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2 X(p) - p.$$

Dále si stačí všimnout, že $f(t) = \eta(t) + \eta(t-3)$.
Podle vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p}(1 + e^{-3p}). \tag{13}$$

Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 X(p) - p) + X(p) = \frac{1}{p}(1 + e^{-3p}).$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 4

Nespojitá pravá strana II.

Vyjádříme $X(p)$:

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)} + \frac{1}{p(p^2+1)}(1+e^{-3p}).$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = 1 + (1-\cos(t-3))\eta(t-3).$$

Nebo bez užití $\eta(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,3), \\ 2-\cos(t-3), & t \geq 3. \end{cases}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 5

Posunuté počáteční podmínky

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = e^t, \\ x(1_+) = 1,\ x'(1_+) = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Počáteční podmínky nejsou dány v bodě $t_0 = 0$. Proto musíme provést substituci $t = \tau + 1$ a $x(t) = x(\tau - 1) = y(\tau)$.

Nová rovnice má tvar

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{\tau+1}, \\ y(0_+) = 1,\ y'(0_+) = 1. \end{cases} \tag{15}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 5

Posunuté počáteční podmínky

Položme $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$, *pak*

$$\mathcal{L}(y'(\tau)) = pY(p) - 1,$$

$$\mathcal{L}(y''(t)) = p^2Y(p) - p - 1.$$

Dále

$$\mathcal{L}(e^{\tau+1}) = e\,\mathcal{L}(e^{\tau}) = e\frac{1}{p-1}.$$

Vyjádříme $Y(p)$ *po rozkladu na parciální zlomky*

$$Y(p) = \frac{e/6}{p-1} + \frac{3-e/2}{p+1} + \frac{e/3-2}{p+2}.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 5

Posunuté počáteční podmínky

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme pro $\tau \geq 0$ *řešení*

$$y(\tau) = e/6\, e^{\tau} + (3 - e/2)\, e^{-\tau} + (e/3 - 2)\, e^{-2\tau}.$$

Zpětnou substitucí $\tau = t - 1$ *a* $y(\tau) = x(t)$ *dostáváme pro* $t \geq 1$ *řešení*

$$x(t) = e/6\, e^{t-1} + (3 - e/2)\, e^{1-t} + (e/3 - 2)\, e^{2-2t}.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 6

Řešme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} x' - x + y = 2, \\ x - y' - y = e^t, \\ x(0_+) = 1,\ x'(0_+) = 1. \end{cases} \tag{16}$$

Položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ *a* $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$*.*
Pak $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - 1$ *a* $\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - 1$*.*
Odpovídající operátorový systém má tvar

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + Y(p) = \dfrac{p+2}{p}, \\ X(p) - (p+1)Y(p) = -\dfrac{p}{p-1}. \end{cases} \tag{17}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 6

Po úpravě a rozkladu na parciální zlomky

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p-1}, \\ Y(p) = \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}. \end{cases} \tag{18}$$

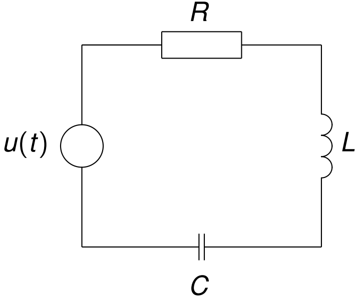
Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t + e^t, \\ y(t) = t^2 - t + 1. \end{cases} \tag{19}$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Úlohy z elektrotechniky

Uvažujme nejprve jednoduchý oscilační obvod znázorněný



Tento okruh je popsaný integro-diferenciální rovnicí

$$L\frac{\mathrm{d}\, i(t)}{\mathrm{d}\, t} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = u(t), \tag{20}$$

kde L, R, C jsou po řadě konstanty indukce, odporu a kapacity. Dále u je elektomotorické napětí a i je proud.

Aplikace Laplaceovy transformace

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že celým obvodem na počátku neprochází proud.
Tato počáteční podmínka odpovídá situaci zapínání.
Tedy obvodem neprochází proud a $i(0_+) = 0$.
Dále poslední člen levé strany (20) představuje napětí na deskách kondenzátoru, na počátku je nulové.
Označme $\mathcal{L}(i(t)) = I(p)$ a $\mathcal{L}(u(t)) = U(p)$.
Funkce $I(p)$ a $U(p)$ se nazývají *operátorový proud* resp. *operátorové napětí*.
Potom z vlastnosti derivování předmětu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}\, i(t)}{\mathrm{d}\, t}\right) = pI(p).$$

Z vlastnosti integrování předmětu máme

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right) = \frac{I(p)}{p}.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Přepíšeme rovnici (20) do operátorového tvaru

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = U(p).$$

Po úpravě

$$I(p) = \frac{U(p)}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)}{Z(p)}, \tag{21}$$

kde $Z(p)$ je operátorová impedance okruhu.

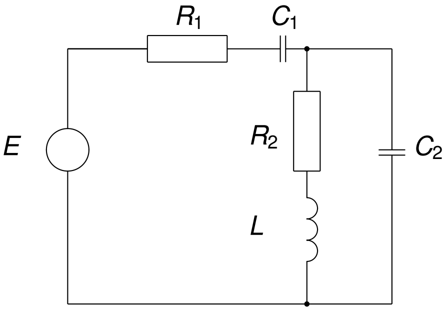
Vzorec (21) nazýváme *operátorový tvar Ohmova zákona*.

Zpětnou Laplaceovou transformací pak z (21) určíme proud okruhu i.

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 7

Nalezněme operátorovou impedanci a operátorový proud protékající sítí znázorněné na obrázku



Obrázek: Oscilační okruh

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 7

Nejprve, pro operátorové impedance platí:

větev I. *se skládá z odporu* R_1 *a kapacity* C_1*, a platí* $Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1 p}$,

větev II. *se skládá z odporu* R_2 *a indukčnosti* L*, a platí* $Z_2 = R_2 + Lp$,

větev III. *se skládá z kapacity* C_2*, a platí* $Z_3 = \frac{1}{C_2 p}$.

Větve II a III jsou zapojeny paralelně, tedy jejich výsledná impedance má tvar

$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 7

Dále můžeme uvažovat obvod jako sériově zapojené operátorové impedance Z_1 a Z_4.
Tedy

$$Z = Z_1 + Z_4 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Po dosazení a užití druhého Kirchhofova zákona $U(p) = E/p$ *dostáváme*

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \frac{R_2 + Lp + \dfrac{1}{C_2 p}}{\left(R_1 + \dfrac{1}{C_1 p}\right)\left(R_2 + Lp + \dfrac{1}{C_2 p}\right) + (R_2 + Lp)\dfrac{1}{C_2 p}}.$$

Zde v uvažovaném oscilačním okruhu uvažujeme zapojené konstantní elektromotorické napětí $u = E$.

Aplikace Laplaceovy transformace

Úlohy z regulačních systémů

Regulační systém si lze představit jako černou skříňku

Vlastnosti regulačního systému lze popsat pomocí reakcí výstupů na vstupní signály.
Dynamické vlastnosti regulačních systémů jsou určeny vztahy mezi výstupními a vstupními veličinami.

Aplikace Laplaceovy transformace

Dynamické vlastnosti takovýchto systémů budeme popisovat v časové závislosti pomocí lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t),$$

kde $a_i,\ b_j \in \mathbb{R}$ a $m \leq n$ je podmínka realizovatelnosti systému.

Časové posunutí signálu lze popsat jako dopravní zpoždění

$$y(t) = u(t - T_d).$$

Přenosovou funkci daného systému určíme jako poměr obrazu výstupní veličiny k obrazu vstupní veličiny vzhledem k Laplaceově transformaci za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0.$$

Přenosová funkce pak má tvar racionální lomenné funkce

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{b_m(p - n_1)(p - n_2)\dots(p - n_m)}{a_n(p - k_1)(p - k_2)\dots(p - k_n)},$$

kde k_i jsou póly přenosu a n_j jsou nuly přenosu.

Aplikace Laplaceovy transformace

Impulsní charakteristiku používáme pro popis časové závislosti daného regulačního systému, kterou lze získat jako odezvu na vstupní signál tvaru Diracova impulsu při nulových počátečních podmínkách.
Impulsní charakteristiku $f(t)$ dostáváme po zpětné Laplaceově transformaci

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t).$$

Příklad 8

Nalezněme impulsní charakteristiku přenosové funkce

$$F(p) = \frac{5p+3}{p^3+6p^2+11p+6}.$$

Danou funkci rozložíme na parciální zlomky

$$F(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{7}{p+2} - \frac{6}{p+3}.$$

Aplikace Laplaceovy transformace

Příklad 8

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme impulsní charakteristiku

$$f(t) = -e^{-t} + e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$

Impulsní charakteristika systému je znázorněna