Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Laplaceova transformace I.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Laplaceova transformace

Budeme uvažovat komplexní funkce f reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $p = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.
Předpokládejme, že nevlastní integrál

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t \tag{1}$$

existuje a má konečnou hodnotu pro alespoň jedno p.
Pak integrál (1) nazýváme *Laplaceův integrál funkce f*.

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) *máme*

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p\alpha}\right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + \mathrm{i}y$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.
Tedy pro $\operatorname{Re} p > 0$ platí $\lim_{\alpha\to\infty} e^{-p\alpha} = 0$.
Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$ pro $\operatorname{Re} p > 0$ konverguje a je roven funkci $1/p$.
Pro $\operatorname{Re} p \le 0$ Laplaceův integrál neexistuje.

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$*, kde* $a \in \mathbb{C}$*.*

Podle (1) *máme*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{(a-p)t}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{1}{a-p}e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p}\right) \\ &= \frac{1}{p-a} \end{aligned}$$

pro $\mathrm{Re}(p-a) > 0$*.*
Tedy Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$ *konverguje pro* $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a$ *k funkci* $1/(p-a)$*. V ostatních případech diverguje.*

Laplaceova transformace

Definice 1

Buď f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$.
Buď $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p, pro než je Laplaceův integrál (1) *konvergentní.*
Pak komplexní funkci F definovanou vztahem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \,\mathrm{d}\, t \quad (p \in M) \tag{2}$$

nazýváme Laplaceův obraz funkce f.
Dané zobrazení, které přiřazuje funkci f její Laplaceův obraz F, nazýváme Laplaceova transformace.
Značíme

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p).$$

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme předmět (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. *f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,*
2. *$f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,*
3. *existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \tag{3}$$

Definice 3

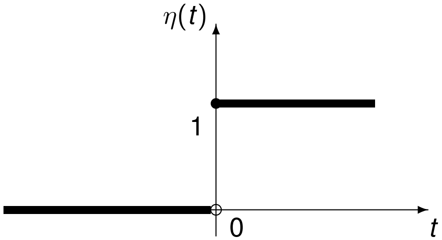
Buď $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha \text{ vyhovuje } (3)\}$.
Číslo α_0 nazýváme index růstu předmětu f.

Laplaceova transformace

Důležitým příkladem předmětu je Heavisideova funkce definovaná vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Heavisideova funkce má graf



Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Buď f předmět s indexem růstu α_0.Pak Laplaceův integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t$$

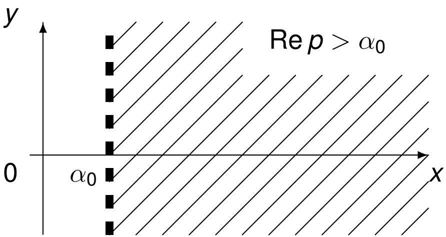
konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Důsledek 1

Buď $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $x = \operatorname{Re} p$. Pak $\lim_{x\to\infty} F(p) = 0$.

Laplaceova transformace

Polorovina Re $p > \alpha_0$ je znázorněna



Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\mathrm{i}y} \neq 0$.
Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Věta 2 (první limitní)

Buď f předmět s indexem růstu α_0 a $\alpha > \alpha_0$.
Pak pro Laplaceův obraz F funkce f platí

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ \mathrm{Re}\, p \geq \alpha}} F(p) = 0.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \ldots n$. Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p),$$

II. podobnost

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

III. substituce v obrazu

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(p - a),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t,\lambda)) = F(p,\lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = e^{-\tau p}F(p),$$

VI. derivace předmětu

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - \ldots - f^{(n-1)}(0_+),$$

kde f a její derivace až do řádu $n-1$ jsou spojité a $f^{(i)}(0_+) = \lim_{t\to 0_+} f^{(i)}(t)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}\,z = \lim_{\mathrm{Re}\,q\to\infty}\int_p^q F(z)\,\mathrm{d}\,z,$$

kde $f(t)/t$ je předmět s indexem růstu α_0, $\int_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}\,z$ existuje a graf integrační křivky $\int_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}\,z$ leží v $\mathrm{Re}\,p > \alpha_0$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$*.*

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}}.$$

Položíme-li v předchozím příkladu parametr $a = \pm\mathrm{i}\omega$ *a navíc užijeme linearity Věty 3, pak pro* $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm\mathrm{i}\omega) = |\operatorname{Im}\omega|$ *dostáváme*

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p - \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{p + \mathrm{i}\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at}\sin(\omega t)$*.*

K výpočtu použijeme výsledku předchozího příkladu a vlastnosti substituce v obrazu Věty 3.
Tedy pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im}\omega|$ *máme*

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p-a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) = \frac{3!}{(p-a)^4},$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t-\tau)$*.*

Poznamenejme, že funkce f *je posunutá Heavisideova funkce o* τ*, tedy*

$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \textit{pro} \quad t < \tau, \\ 1, & \textit{pro} \quad t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$*.*
Nyní z vlastnosti posunutí Věty 3 plyne

$$\mathcal{L}(\eta(t-\tau)) = \frac{e^{-\tau p}}{p}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$*, kde* $\varphi > 0$ *a* $\omega > 0$*. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí*

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$*.*
Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} e^{-\varphi p/\omega} = \frac{\omega e^{-\varphi p/\omega}}{p^2 + \omega^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.
Dále

$$(\sin^3(t))' = 3\sin^2(t)\cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6\sin(t)\cos^2(t) - 3\sin^3(t) = 6\sin(t) - 9\sin^3(t).$$

Podle Příkladu 4 máme

$$\mathcal{L}((\sin^3(t))'') = \frac{6}{p^2+1} - 9\,\mathcal{L}(\sin^3(t)) = \frac{6}{p^2+1} - 9F(p). \tag{5}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'') = p^2F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2F(p). \qquad (6)$$

Nyní porovnejme (5) *a* (6), *dostáváme*

$$\frac{6}{p^2+1} - 9F(p) = p^2F(p),$$

tedy

$$F(p) = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \cdots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Tedy

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}\,z = [\operatorname{arctg}(z)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p) = \operatorname{arccotg}(p).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ *spojitá. Je-li* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *a* α_0 *je index růstu funkce* f'*, pak*

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Věta 5 (třetí limitní)

Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ *spojitá. Je-li* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *a existuje* $\lim_{t \to \infty} f(t) \neq \infty$*, pak*

$$\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{t \to \infty} f(t).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau,$$

což plyne z vlastnosti předmětu,tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t-\tau) = 0$ pro $t < \tau$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. *distributivita na sčítání:* $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, *kde* c *je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ *a* $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau)\,\mathrm{d}\,\tau = t - \sin(t).$$

Poznamenejme, že druhá rovnost platí díky předpokladu, že obě funkce jsou předměty, tj. $f(\tau) = 0$ *pro* $\tau < 0$ *a* $g(t - \tau) = 0$ *pro* $t < \tau$*).*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Buďte f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.
Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.
Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec)

Buďte f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.
Buď f' předmět a f je spojitá funkce na intervalu $[0, \infty)$.
Pak

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f' * g)(t)).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p^2+1)^2} &= F(p)G(p) = \mathcal{L}(\sin(t) * \sin(t)) \\
&= \int_0^t \sin(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = 1/2\,\sin(t) - 1/2\,t\cos(t).
\end{aligned}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

Buďte f a g předměty s indexy růstu α_0^f *a* α_0^g, $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
$\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *a* $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.
Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(z)G(p-z)\,\mathrm{d}\,z,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p > a + \alpha_0$ *a* $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}$ rozumíme limitu

$$\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} = \lim_{b\to\infty} \int_{a-\mathrm{i}b}^{a+\mathrm{i}b};$$

v integrálu $\int_{a-\mathrm{i}b}^{a+\mathrm{i}b}$ integrujeme po integrační křivce

$$z = a + \mathrm{i}t,$$

$t \in [-b, b]$, zde $0 < b \in \mathbb{R}$; koeficient $a \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby $\alpha_0 < a$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$*.*
Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p-1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$*,* $\alpha_0^g = 1$ *a* $\alpha_0 = \max\{0,1\} = 1$*.*
Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{z^2+1} \frac{1}{(p-z)-1} \,\mathrm{d}\, z,$$

kde $a > 1$ *a* $\operatorname{Re} p > a+1$*.*
Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = -\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2+1} \frac{1}{(p-z)-1}\right]_{z=p-1} = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \to O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O.
Zkoumejme nyní inverzní zobrazení *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \to P.$$

Tato operace přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f, pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.
K tomu je zapotřebí zodpovědět otázky:

OT1: existence zpětné Laplaceovy transformace,
OT2: identifikovat definiční obor $\mathcal{L}^{-1}$.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Buďte $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.
K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f.
Tj.

1. existuje $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ takové, že F je v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ analytická,
2. v libovolné polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$ platí $\lim_{p \to \infty} F(p) = 0$.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Buď F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \dots n)$. Nechť pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n}\{|a_i|\}$, platí:

1. *existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i, pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p\in k_n}\{|F(p)|\} = 0,$$

2. *integrál $\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\,\mathrm{d}\,p$ má konečnou hodnotu.*
   Pak na $\mathbb{R}$ existuje spojitý předmět f, který je určen předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t \le 0. \end{cases} \tag{7}$$

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) *počítají v singularitách funkce* $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} *je však analytická v* $\mathbb{C}$, *tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce* $F(p)$.

Pokud je například a_i *jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je*

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i *pól násobnosti 2, dostáváme*

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} &= \lim_{p\to a_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}[(p-a_i)^2 F(p)e^{pt}] \\ &= \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i} e^{a_i t} + \lim_{p\to a_i}[(p-a_i)^2 F(p)]te^{a_i t}. \end{aligned}$$

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F, jež mají racionální tvar.

Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \tag{8}$$

kde $P(p)$ a $Q(p)$ jsou polynomy nad oborem komplexních čísel.

Věta 11

Funkce

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

je Laplaceův obraz nějakého předmětu právě tehdy, pokud $\mathrm{st}(P(p)) < \mathrm{st}(Q(p))$*.*

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2 - p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 *a* 1.
Máme tedy

$$\mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1, \;\; \mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = 2e^t.$$

Pak podle vzorce (7) *Věty 10 máme pro $t > 0$*

$$f(t) = -1 + 2e^t.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu. Funkce F *má tři jednoduché póly* -1, $\pm \mathrm{i}$ *a pól třetího řádu* 1. *Máme tedy*

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16\, e^{-t}, \ \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=\mathrm{i}} = 1/8\, e^{\mathrm{i}t}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-\mathrm{i}} = -1/8\, e^{-\mathrm{i}t}, \ \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = \frac{2t^2-6t+5}{2}\, e^{t}.$$

Pak podle vzorce (7) *Věty 10 máme pro* $t > 0$

$$f(t) = -1/16\, e^{-t} + 1/8\, e^{\mathrm{i}t} - 1/8\, e^{-\mathrm{i}t} + \frac{2t^2-6t+5}{2}\, e^{t}.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Tabulka 1: Laplaceovy transformace některých funkcí

Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Zpětná Laplaceova transformace

Tabulka 1: Laplaceovy transformace některých funkcí

Předmět	Obraz
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t^n,\, n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{at},\, n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$