

Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Fourierovy řady II.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Prostor $L_2(a, b)$

Označme $L_2(a, b)$ množinu všech vhodných komplexních funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, pro které je integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \tag{1}$$

konečný.

Funkce náležící prostoru $L_2(a, b)$ se nazývá *integrovatelná s kvadrátem*.

Poznámka 1

Výraz vhodných ve výše uvedené definici je podstatný pro korektnost textu. Funkce, které jsou pro nás přípustné, vhodné, jsou ty, se kterými se většinou setkáme v praxi a v tomto textu, není-li řečeno jinak. Pro další omezení věnujte pozornost následujícím poznámkám.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 1

Integrací lze ověřit, že

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_2[1, 2],$$

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \notin L_2(0, 1],$$

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in L_2(0, 1].$$

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, *prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)* .

Tento prostor je opět lineární.

Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) *(absolutně) integrovatelná*.

To jest

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty.$$

Zřejmě, je-li $f(t) \in L_2(a, b)$, pak také $f(t) \in L_1(a, b)$.

Opačná implikace však neplatí.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 2

Integrací lze ověřit, že

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_1[1, 2],$$

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in L_1(0, 1].$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln |t-1|]_u^2 = \infty.$$

Celkově, daná funkce $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \in L_1[1, 2]$, ale $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \notin L_2[1, 2]$.

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

K úplnosti je ještě nutno definovat po částech spojitou funkci.

Je to taková funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám:

- 1. existuje konečné dělení intervalu (a, b) takové, že dělicí intervaly jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je právě interval (a, b) ,*
- 2. funkce zúžená na každý dělicí interval je spojitá.*

Jediné, co je zapotřebí zvážit, je omezenost funkce na příslušném dělicím intervalu.

Prostor $L_2(a, b)$

Buďte f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Pak *skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b)* definujeme vztahem

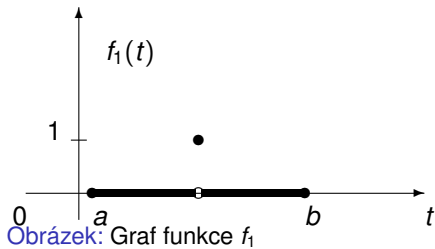
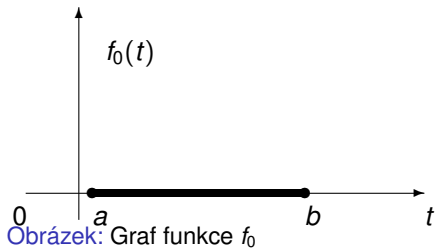
$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g}(t) dt. \quad (2)$$

Normu funkce f z $L_2(a, b)$ definujeme předpisem

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (3)$$

Normu funkce tedy chápeme jako její vzdálenost od nulové funkce.

Prostor $L_2(a, b)$



Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 4

*Vezměme funkce $f_0(t)$ a $f_1(t)$ definované na předchozích obrázcích.
Pak*

$$\|f_0\| = \|f_1\| = 0.$$

Tedy pro dvě různé funkce dostáváme stejnou normu, což není v pořádku.

Vezmeme-li v úvahu předchozí poznámku, pak vzhledem k Lebesgueově míře jsou tyto funkce totožné, liší se pouze na množině míry nula.

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t)\bar{f}(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$
4. $(f, g) = \overline{(g, f)},$
5. *Schwarz-Buňakovského nerovnost:* $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|,$
6. $\|f\| = 0$ právě tehdy, je-li $f(t) = 0$ pro každé $t,$
7. $\|cf\| = |c|\|f\|,$
8. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$

Prostor $L_2(a, b)$

Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ je *ortogonální*, je-li skalární součin každých dvou různých funkcí roven nule, tj. platí-li pro každé $m \neq n$

$$(f_m, f_n) = 0. \quad (4)$$

Je-li navíc norma každé funkce posloupnosti rovna jedné, nazýváme takový systém *ortonormální*, tj.

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (5)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Pak zřejmě

$$\left\| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} (e^{int}, e^{int}) = 1.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.

Skutečně:

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{pro } m = n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(mt) dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(mt) dt = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(mt) dt = \pi. \end{cases} \quad (8)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Normalizací dané posloupnosti získáme ortonormální systém funkcí:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální.

Skutečně

$$(f_m, f_n) = \int_0^\pi e^{imt} e^{-int} dt = \frac{(-1)^{m-n} - 1}{m-n} \neq 0 \text{ pro } m - n \text{ liché.}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$.
Existuje-li funkce f z $L_2(a, b)$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (9)$$

pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k f v normě $L_2(a, b)$* .
Někdy se také používá označení *konvergence v průměru* nebo *konvergence ve smyslu střední kvadratické odchylky*.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ konverguje na množině M k funkci f *stejněměrně*, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ a každé $z \in M$ je $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Pokud víme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *stejněměrně konvergentní*, pak je také konvergentní.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 7

Geometrická posloupnost $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, ale není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1)$.

Snadno se ověří, že daná posloupnost konverguje k 0 na intervalu $[0, 1)$.

Dále platí, že $\sup |t^n| = 1$ pro $t \in [0, 1)$.

Tedy limitou není 0, daná posloupnost nekonverguje absolutně.

Zobecněná Fourierova řada

Gelá teorie Fourierových řad vznikla z potřeby rozvinout danou periodickou funkci v periodickou funkci tvořenou trigonometrickými funkcemi.

Většina vět platných pro Fourierovy řady zůstane platná, nahradíme-li v původních úvahách trigonometrické funkce systémem funkcí, jež jsou ortogonální popřípadě ortonormální.

Vzniká tedy otázka, zda je možno zadanou funkci $f(t)$, která je integrovatelná s kvadrátem na intervalu $[a, b]$, rozvinout v nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t)$$

pomocí ortonormovaného systému funkcí $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in L^2(a, b)$ a určit koeficienty α_n .

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Předpokládejme, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí.

Budeme aproximovat funkci $f(t)$ polynomem T_n na základě nejmenší střední kvadratické odchylky. Je tedy otázkou, jak volit koeficienty α_n v mnohočlenu

$$T_k(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \dots + \alpha_k\varphi_k(t),$$

aby byla hodnota integrálu

$$I_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - T_k(t)]^2 dt$$

minimální.

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t)T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t)T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t)\varphi_n(t) dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t) dt$.

Toto číslo nazýváme *Fourierovým koeficientem funkce $f(t)$ vzhledem k dané soustavě funkcí $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$* .

Pak máme

$$\int_a^b f(t)T_k(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n.$$

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

$$\begin{aligned}\int_a^b [T_k(t)]^2 dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k \alpha_n \varphi_n \right]^2 dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^k \alpha_n^2 \varphi_n^2 + 2 \sum_{\substack{m,n=0 \\ n < m}}^k \alpha_n \alpha_m \varphi_n \varphi_m \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^k \alpha_n^2,\end{aligned}$$

díky ortonormalitě systému $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$.

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n + a_n^2 - a_n^2) \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n - a_n)^2 - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (11)$$

Tato rovnice platí pro libovolnou volbu koeficientů α_n .

Integrál I_k má tedy minimální hodnotu při volbě $\alpha_n = a_n$.

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^k a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt. \quad (13)$$

Nerovnost (13) se nazývá *Besselova*.

Formule (12) a (13) jsou platné pro každé k .

Proto je nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergentní, neboť jsou všechny částečné součty menší než dané pevné kladné číslo.

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2. \quad (14)$$

Rovnice (14) se nazývá *Parsevalova*. O posloupnosti trigonometrických funkcí jsme již dokázali, že je v intervalu $[0, 2\pi]$ ortonormální.

Uzavřenost se dokáže pomocí Fejérových vět.

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.

Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu.

Způsob, jak sestavit koeficienty takové mocninné řady, je znám.

Stačí rozvíjet danou funkci $f(t)$ v Taylorovu řadu.

Tento způsob je teoreticky dobrý, v praxi však narazíme na problém, který nemusí mít řešení, a to určení hodnot všech řádů derivace dané funkce.

Tento problém lze odstranit tak, že danou funkci budeme rozvíjet pomocí systému složeného z mnohočlenů, který tvoří ortonormovanou soustavu funkcí na daném intervalu.

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Bud'

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak lze z této posloupnosti vytvořit posloupnost funkcí

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (17)$$

spojitých na intervalu $[a, b]$ takovou, že

- 1. každý její konečný úsek $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{k-1}(t)$ představuje k lineárně nezávislých funkcí,*
- 2. každá funkce $\psi_k(t)$ je lineární kombinací funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t)$,*
- 3. posloupnost (17) tvoří ortonormovanou soustavu.*

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidty věty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) dt$.

Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná.

Skutečně

$$\int_a^b \psi_0^2(t) dt = 1/c_0^2 \int_a^b \varphi_0^2(t) dt = 1,$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$. Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \frac{\int_a^b \varphi_1(t)\psi_0(t) dt}{\int_a^b \psi_0^2(t) dt}.$$

Označme

$$c_1^2 = \int_a^b \chi_1^2(t) dt.$$

Pak funkce $\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1}$ je na intervalu $[a, b]$ ortonormální k funkci $\psi_0(t)$.

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) dt, \quad (21)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_1(t) dt. \quad (22)$$

Potom funkce

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2}, \text{ kde } c_2^2 = \int_a^b \chi_2^2(t) dt, \quad (23)$$

je normovaná a ortogonální k $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Zobecněná Fourierova řada

3. K určení dalších členů posloupností

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

stačí postupovat analogicky s pomocí matematické indukce.

Poznamenejme, že čísla c_k jsou vesměs různá od nuly vzhledem k lineární nezávislosti každého konečného úseku posloupnosti

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Z konstrukce $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ pak plyne lineární nezávislost každého jejího konečného úseku.

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané *Legendreovy polynomy*.

Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) dt = 2,$$

tedy

$$c_0 = \sqrt{2}$$

a

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále polořme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

$$c_1^2 = \int_{-1}^1 \chi_1^2(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt = \frac{8}{45}$$

a

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Závěrem, danou funkci $f(t)$, která je v intervalu $[-1, 1]$ spojitá, můžeme rozvíjet v řadu tvořenou z těchto mnohočlenů.

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f .

Jsou-li navíc splněny další podmínky, pak konverguje Fourierova řada stejnoměrně.

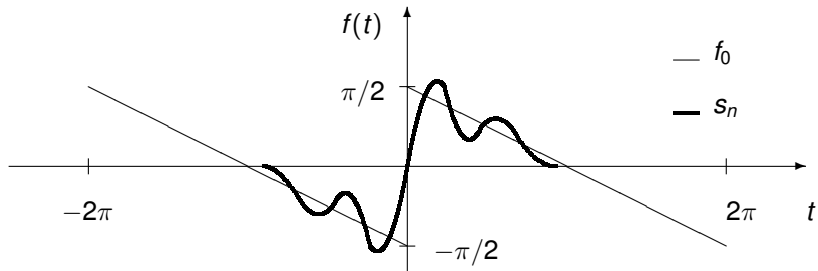
Jednoduchým příkladem funkce nesplňující tyto podmínky je

$$f_0(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi),$$

která je periodicky rozšířená na celé \mathbb{R} .

Gibbsův jev

Tato funkce je znázorněna grafem



Obrázek: Gibbsův jev

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (24)$$

Zde rovnost platí ve smyslu konvergence v $L_2(I, I + 2\pi)$, $I \in \mathbb{R}$, a také ve smyslu stejnoměrné konvergence na každém intervalu s krajními body $2l\pi + \epsilon$ a $2(l+1)\pi - \epsilon$, kde $\epsilon \in (0, \pi)$.

Problémem jsou tedy body nespojitosti funkce f_0 .

Například v bodě $t = 0$ je součet řady (24) roven 0, tedy průměru limit v nule zprava a zleva

$$\frac{1}{2} [f_0(0 + 0) + f_0(0 - 0)] = 0.$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

$$R_n(0) = -\frac{\pi}{2}$$

a tedy

$$R_n(t) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^t \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx.$$

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Označíme-li $n + 1/2 = p$ a použijeme substituci $px = s$ dostaneme

$$R_n(t_n) = \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(px)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right)} - \frac{\pi}{2}.$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi.$$

Pro velká n je

$$s_n(t_n) \doteq 1,18\frac{\pi}{2}.$$

Každý částečný součet $s_n(t)$ má tedy maximum, které převyšuje asi o 18 % maximum funkce f_0 .

Tomuto fenoménu se říká *Gibbsův jev*.

Gibbsův jev

Dá se ukázat, že každá funkce f , která má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu, lze zapsat ve tvaru

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

kde $g(t)$ je funkce splňující naše dodatečné podmínky kladené na funkci f_0 a jejíž Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Funkce

$$h(t) = \sum_{i=1}^m c_i f_0(t - t_i)$$

je funkce, která zachycuje skoky funkce f .

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

a že v okolí každého bodu funkce f se projevívá Gibbsův jev. Tedy částečný součet Fourierovy řady funkce f bude v okolí každého bodu nespojitosti t_i nabývat, až na zanedbatelnou odchylku, hodnotu

$$\frac{1}{2}[f(t_i+0) + f(t_i-0)] \pm \frac{1}{2}1, 18[f(t_i+0) + f(t_i-0)].$$

V okolí bodu nespojitosti tedy nebudou částečné součty konvergovat stejnoměrně.

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ &+ A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ &+ \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{k-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\ &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{střídací složka}}, \end{aligned} \tag{25}$$

kde A_k je amplituda k -té harmonické složky, $k\omega$ je kruhový opakovací kmitočet k -té harmonické složky a φ_k je počáteční fáze k -té harmonické složky.

Řešený příklad

Z výše uvedené formule (25) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou* a *stejnosemřnou složku*.

Stejnosemřná složka je rovna střední hodnotě signálu za opakovací periodu.

Střídavá složka se skládá z harmonických signálů o nulových středních hodnotách, je to tedy původní signál zbavený stejnosemřné složky.

Střídavá složka obsahuje tzv. *první harmonickou* o kmitočtu, který je stejný jako opakovací kmitočet periodického signálu, a *vyšší harmonické*, kterých je obecně nekonečný počet a jejichž kmitočet je celočíselným násobkem kmitočtu první harmonické.

Řešený příklad

Rozklad výše uvedeného periodického signálu (25) na dílčí komponenty je jednoznačný.

Platí, že každé dva různé periodické signály o opakovacím kmitočtu ω jsou jednoznačně reprezentovány různými dvojicemi množin

$\{A_0, A_1, \dots, A_k, \dots\}$ a $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots\}$.

Grafické znázornění těchto množin ve formě spektrálních čar na kmitočtové ose se nazývá *spektrum signálu*.

Řešený příklad

Prochází-li signál elektrickým obvodem, můžeme to chápat jako průchod množiny jeho harmonických složek.

V důsledku rozdílných přenosových schopností obvodu na různých kmitočtech dojde k tomu, že na výstupu obvodu budou jednotlivé harmonické složky vzájemně různě utlumeny a fázově posunuty. Takže výstupní signál sice bude rovněž periodický, ale oproti vstupnímu signálu bude zkreslený.

Spektrum signálu, resp. rozložení jeho spektrálních čar na kmitočtové ose, tak spolu s kmitočtovou charakteristikou obvodu přináší užitečný a názorný nástroj na chápání jevů spojených s interakcemi signálu a obvodů.

Řešený příklad

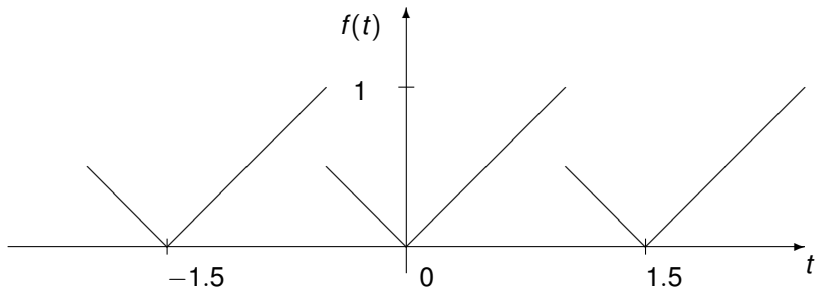
Konstruuje nyní Fourierovu řadu signálu

$$f(t) = |x|$$

pomocí 10 harmonických na základním intervalu periodicity $(-0.5, 1)$.

Dále provedeme harmonickou analýzu, tedy konstruuje amplitudové a fázové spektrum.

Graf periodického signálu je znázorněn



Řešený příklad

K výpočtu použijeme software Matlab.

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
1 function Fourierova_rada(f,a,b,N)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % Rozvoj zadane funkce f(t) z L2(a,b)
4 % ve standardni Fourierovu radu
5 % v komplexnim tvaru pomoci N harmonickych
6 % Příklad volani:  Fourierova_rada('abs(t)',-0.5,1,10)
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8
9 syms t real; % Symbolická proměnná t
10 T=sym(b-a); % Perioda
11 w=2*pi/T;   % Úhlová rychlost
```

Řešený příklad

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
13 % Vypocet koeficientu cn Fourierovy rady fN
14 % a její sestavení
15 % Vypocet amplitud An a fazi FIn pro n=-N,...,N
16
17 fN=0; An=zeros(2*N+1,1); FIn=zeros(2*N+1,1);
18 for n=-N:N
19     cn=1/T*int(f*exp(-i*w*n*t),t,a,b);
20     % Koeficient n-teho clenu FR
21     fN=fN+cn.*exp(i*w*n*t);
22     % Sestavení Fourierovy rady fN
23     An(n+N+1)=abs(double(cn));
24     % Vypocet amplitudy (indexace vek. od 1)
25     FIn(n+N+1)=-angle(double(cn));
26     % Vypocet faze (indexace vektoru od 1)
27 end;
28
29 % Grafy funkci f a fN
30 figure; hold on; grid on; box on;
31 set(gca,'FontSize',14);
```

Řešený příklad

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
33 % Puvodni funkce f
34 hf=ezplot(f,[a,b]);
35 set(hf,'Color','Red','LineWidth',2);
36
37 % Aproximace fN pomoci N harmonickych
38 hfN=ezplot(fN,[a,b]);
39 set(hfN,'Color','Blue',
40 'LineWidth',2,'LineStyle','--');
41 xlabel('t');
42 title(['Fourierova rada funkce f(t)=' ,f]);
43 legend('f(t)', ['f_{',num2str(N),'}(t)'],
44 'Location','NorthEastOutside');
```

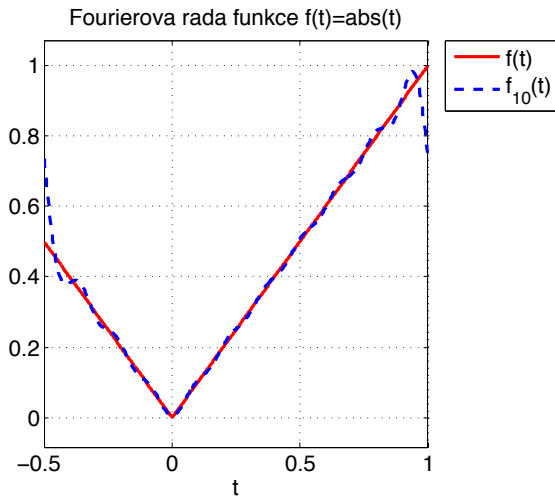
Řešený příklad

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
47
48 % Amplitudove spektrum
49 figure; hold on; grid on; box on;
50 set(gca, 'FontSize', 14);
51 bar(-N:N, An); xlabel('n');
52 title('Amplitudove spektrum')
53
54 % Fazove spektrum
55 figure; hold on; grid on; box on;
56 set(gca, 'FontSize', 14);
57 bar(-N:N, FIn); xlabel('n');
58 title('Fazove spektrum')
```

Řešený příklad

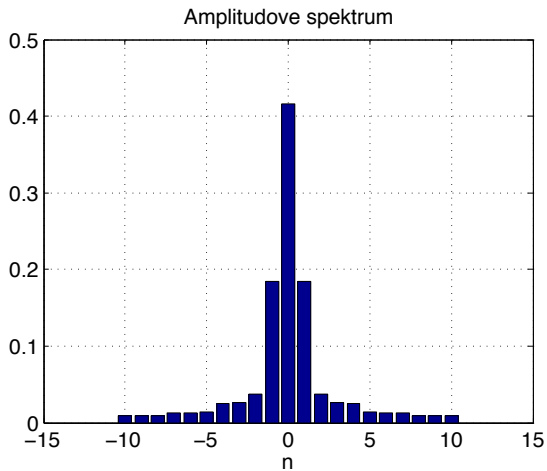
Graf 10 harmonických je znázorněn



Obrázek: Graf 10 harmonických

Řešený příklad

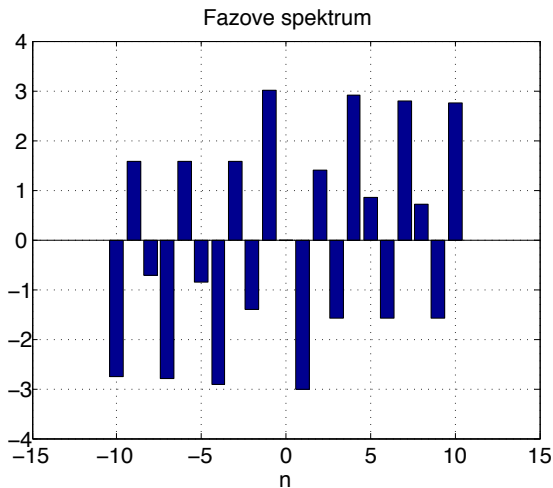
Amplitudové spektrum daného signálu je znázorněno



Obrázek: Amplitudové spektrum daného signálu

Řešený příklad

Fázové spektrum daného signálu je znázorněno



Obrázek: Fázové spektrum daného signálu