Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Fourierovy řady I.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Fourierovy řady

Funkce $f(t)$ reálné proměnné t, pro kterou existuje $T \in \mathbb{R}$ kladné takové, že pro každé t z definičního oboru platí

$$f(t+T) = f(t). \tag{1}$$

se nazývá *periodická funkce.*
Číslo T se nazývá *perioda*, funkce f je *periodická s periodou* T.
Nejmenší takové číslo T, nazýváme *zálkadní periodou*.
Poznamenejme, že základní perida nemusí existovat.
Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme interval $(\alpha, \alpha + T]$ *intervalem periodicity* a specielně *základní interval periodicity* je případ, kdy $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -T/2$, tedy základní interval periodicity má tvar $(0, T]$ nebo $(-T/2, T/2]$.

Fourierovy řady

Lema 1

Ke každé periodické funkci $f(t)$ s periodou T existuje transformace argumentu $t = \mathrm{tr}(x)$ taková, že transformovaná funkce $f(\mathrm{tr}(x))$ má periodou 2π.

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi). \tag{2}$$

Zde

- nezávislou proměnnou t interpretujeme jako čas,
- A je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,
- celý argument $\omega t + \varphi$ nazýváme *fáze kmitu*,
- pro $t = 0$ dostáváme *počáteční fázi*,
- konstantu ω, udávající počet kmitů za 2π vteřin, nazýváme *kruhovou frekvencí (úhlovou rychlostí)*.

Doba jednoho kmitu, perioda, se označuje T.
V našem příkladě je $T = 2\pi/\omega$.

Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \tag{3}$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \tag{4}$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \tag{5}$$

Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \tag{6}$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*.

Pokud řada konverguje, tak konverguje k funkci s periodou $T = 2\pi/\omega$, tj. s periodou členu s indexem 1. (Skutečně?)

Koeficienty a_n a b_n se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$*.

Fourierova řada

Je-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{7}$$

stejnoměrně konvergentní v $\mathbb{R}$,dává součet, který je spojitou periodickou funkcí $f(t)$ s periodou prvního členu řady, tj. $T = 2\pi$. (Skutečně?)
Platí tedy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)). \tag{8}$$

Fourierova řada

Koeficient a_0 určíme integrací rovnice (8) v mezích od $-\pi$ do π.
Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))\right)\mathrm{d}\,t = \pi a_0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t. \tag{9}$$

Koeficienty a_n určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí $\cos(nt)$ a opět integrujeme ve stejných mezích.
Pak dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)\,\mathrm{d}\,t = a_n\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t. \tag{10}$$

Fourierova řada

Koeficienty b_n určíme analogicky jako a_n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\,\mathrm{d}\,t = b_n\pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t. \tag{11}$$

Vzorce pro výpočet koeficientů se nazývají *(Eulerovy)-Fourierovy*.
Daná trigonometrická řada se nazývá *Fourierova řada funkce $f(t)$*.
Koeficienty a_n a b_n *Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$*.

Fourierova řada

Věta 1 (Dirichlet)

Vyhovuje-li funkce $f(t)$ tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce $f(t)$ konverguje v každém t k hodnotě

$$\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$$

a platí

$$\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt).$$

Navíc v bodech t, kde je $f(t)$ spojitá, je

$$\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))=f(t).$$

V předešlé větě používáme standardní notaci

$$f(t+0)=\lim_{t_1\to t^+}f(t_1)\text{ a }f(t-0)=\lim_{t_1\to t^-}f(t_1).$$

Fourierova řada

Dirichletovy podmínky jsou následující:

1. funkce $f(t)$ je periodická,
2. funkce $f(t)$ má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce $f(t)$ má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

Fourierova řada

Příklad 1

Následující funkce nesplňují na intervalu $[-\pi, \pi]$ *Dirichletovy podmínky:*

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t}, \; f_2(t) = \sin\left(\frac{2}{2-t}\right).$$

Skutečně, $f_1(t)$ *má v bodě* $t_0 = 1$ *bod nespojitosti 2. druhu.*
Funkce $f_2(t)$ *má v okolí bodu* $t_0 = 2$ *nekonečně mnoho extrémů.*

Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou $T = 2l$, tedy pro funkce s intervalem periodicity $[-l, l]$.

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci $t = \frac{\pi}{l}t$ a dostaneme pro $n \in \mathbb{N}$ vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}\,t, \tag{12}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(n\frac{\pi}{l}t)\,\mathrm{d}\,t, \tag{13}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin(n\frac{\pi}{l}t)\,\mathrm{d}\,t \tag{14}$$

Fourierova řada má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{\pi}{l}nt) + b_n\sin(\frac{\pi}{l}nt)). \tag{15}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty a_n a b_n Fourierovy řady dané perodické funkce peridy 2π mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \tag{16}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t, \tag{17}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t, \tag{18}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t. \tag{19}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}nt} + e^{-\mathrm{i}nt}), \tag{20}$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}nt} - e^{-\mathrm{i}nt}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(e^{\mathrm{i}nt} - e^{-\mathrm{i}nt}). \tag{21}$$

Po dosazení do řady (16) dostáváme

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(\frac{e^{\mathrm{i}nt} + e^{-\mathrm{i}nt}}{2}) - \mathrm{i}b_n(\frac{e^{\mathrm{i}nt} - e^{-\mathrm{i}nt}}{2})\right) \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)e^{\mathrm{i}nt} + \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)e^{-\mathrm{i}nt}\right). \tag{23}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \tag{24}$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n), \tag{25}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n). \tag{26}$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty c_n a c_{-n} takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - \mathrm{i}\sin(nt))\,\mathrm{d}\,t \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t,\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{28}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt))\,\mathrm{d}\,t \tag{29}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{30}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient c_0 dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty c_i pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \tag{31}$$

Po dosazení koeficientů c_n do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\mathrm{i}nt} + c_{-n}e^{-\mathrm{i}nt}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}nt}. \tag{32}$$

Tvar řady (32) nazýváme *komplexní zápis Fourierovy řady funkce $f(t)$*.
Koeficienty c_n nazýváme *komplexní Fourierovy koeficienty*.

Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné). Má-li funkce $f(t)$ periodu T, pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{\mathrm{i} n\omega t} + c_{-n} e^{-\mathrm{i} n\omega t}), \tag{33}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\mathrm{i} n\omega t} \,\mathrm{d}\, t, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{34}$$

kde $\omega = 2\pi/T$.

Chceme-li Fourierovu řadu v komplexním tvaru převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

$$a_n = c_n + c_{-n}, \tag{35}$$

$$b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}). \tag{36}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 2

Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce $f(t) = 1/2\, e^t$ *se základním intervalem periodicity* $(0, \pi]$ *a* $f(0) = f(\pi)$.

Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledejme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.
Tedy podle (34) *je (zde* $\omega = 2$*)*

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^t e^{-2\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{(1-2\mathrm{i}n)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-2\mathrm{i}n}\left[e^{(1-2\mathrm{i}n)t}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-2\mathrm{i}n}(e^{\pi}-1), \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 2

Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-2\mathrm{i}n}e^{2\mathrm{i}nt}+\frac{1}{1+2\mathrm{i}n}e^{-2\mathrm{i}nt}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-2\mathrm{i}n}e^{2\mathrm{i}nt}. \end{aligned}$$

Převeďme danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) *a* (36) *koeficienty a_n a b_n:*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n+c_{-n}=\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-1)\left(\frac{1}{1-2\mathrm{i}n}+\frac{1}{1+2\mathrm{i}n}\right) \\ &= \frac{e^{\pi}-1}{\pi}\frac{1}{1+4n^2},\ n=0,1,2,3,\dots, \\ b_n &= \mathrm{i}(c_n-c_{-n})=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(e^{\pi}-1)\left(\frac{1}{1-2\mathrm{i}n}-\frac{1}{1+2\mathrm{i}n}\right) \\ &= -2\frac{e^{\pi}-1}{\pi}\frac{n}{1+4n^2},\ n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 2

Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-1) + \frac{e^{\pi}-1}{\pi}\left(\frac{\cos(2t)}{1+4\cdot 1^2}+\frac{\cos(4t)}{1+4\cdot 2^2}+\dots\right) \\
&\quad - 2\frac{e^{\pi}-1}{\pi}\left(\frac{\sin(2t)}{1+4\cdot 1^2}+\frac{\sin(4t)}{1+4\cdot 2^2}+\dots\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-1) + \frac{e^{\pi}-1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+4n^2}\cos(2nt) \\
&\quad - 2\frac{e^{\pi}-1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+4n^2}\sin(2nt).
\end{aligned}
$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.
Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.
Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorci

$$A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right| = |c_0|, \tag{37}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \; n = 1, 2, \ldots \tag{38}$$

Dále $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *jednostranné fázové spektrum* definované vztahem

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \; n = 1, 2, \ldots. \tag{39}$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Dvoustranným spektrem rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$ představuje *dvoustranné amplitudové spektrum.*
Dále $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \; n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots . \tag{40}$$

Poznamenejme, že fáze φ_0 není definována.
Je-li analyzována komplexní funkce s nenulovou imaginární částí, pak platí, že koeficienty c_n a c_{-n} nejsou komplexně sdružené.
Tedy amplitudové spektrum není sudé a fázové spektrum není liché.

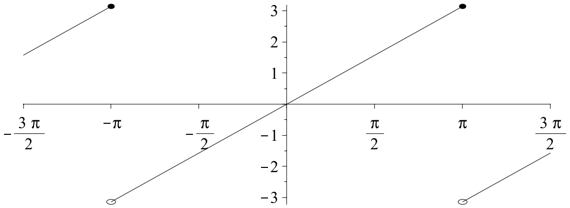
Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-\pi, \pi]$ zadanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in (-\pi, \pi], \\ \pi & \text{pro } t = -\pi, \end{cases} \tag{41}$$

a proveďme spektrální analýzu.
Zadaná funkce je znázorněna grafem



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:

- *funkce je zřejmě periodická,*
- *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech* $(2k+1)\pi$, *(*$k \in \mathbb{Z}$*), jedná se však o nespojitosti 1. druhu,*
- *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná (*$f'(t) = 1$*).*

Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) *a* (11) *k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin(nt) + \frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos(nt) + \frac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Všimněme si, že

- *rozvíjená funkce je lichá,*
- *všechny koeficienty a_n jsou nulové,*
- *příslušná Fourierova řada bude mít pouze sinové členy, bude lichá.*

Hledaný rozvoj naší funkce tedy je

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nt)}{n}.$$

Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven $f(t) = t$ *pro* $t \in (-\pi, \pi)$*.*
V bodech $\pm\pi$ *je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$

Tedy

$$\frac{f(-\pi_+) + f(-\pi_-)}{2} = 0,$$

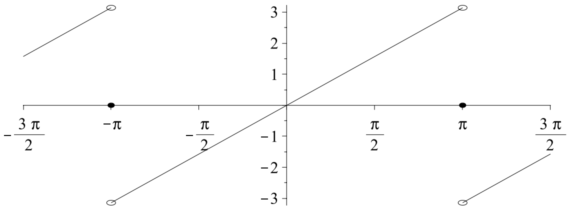
$$\frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} = 0.$$

Tyto hodnoty má součet řady v bodech $\pm\pi$*, tj.* $f(\pi) = 0$ *a* $f(-\pi) = 0$*.*

Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Graf součtu je znázorněn

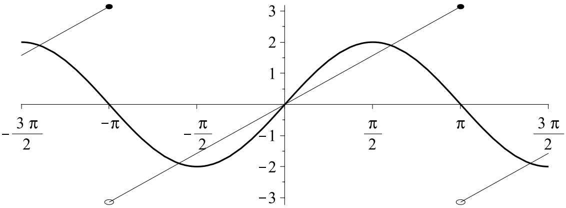


Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Částečné součty prvních členů jsou následující:

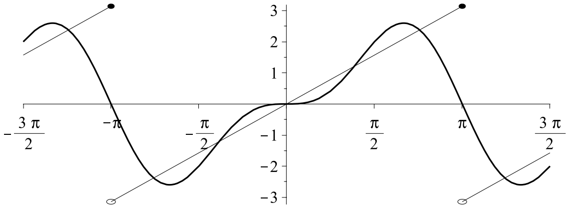
$$s_1(t) = 2\sin(t)$$



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

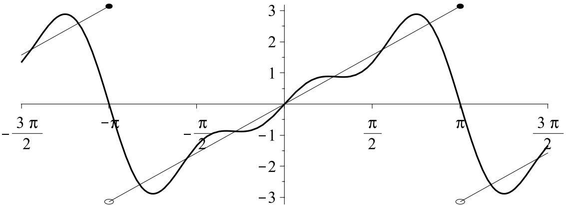
$$s_2(t) = 2\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2}\right)$$



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

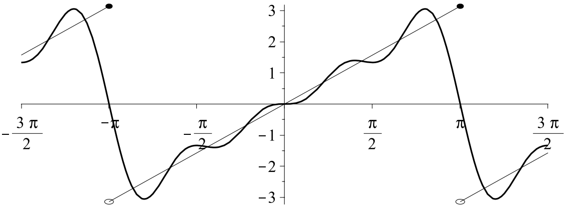
$$s_3(t) = 2\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3}\right)$$



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

$$s_4(t) = 2\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4}\right)$$



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

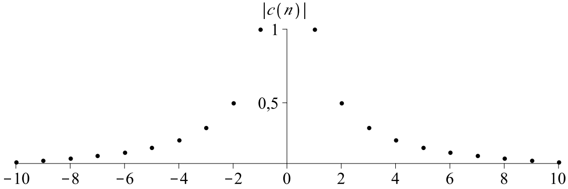
Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \left|\frac{a_0}{2}\right| = 0,\\
A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}} = \frac{2}{n},\\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i} b_n) = \frac{1}{2}\left(0 - \mathrm{i}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\right) = \mathrm{i}(-1)^n\frac{1}{n},\\
\varphi_n &= -\arg c_n = \begin{cases} -\pi/2 & \textit{pro } n = \dots, -5, -3, -1, 2, 4, 6, \dots, \\ \pi/2 & \textit{pro } n = \dots, -6, -4, -2, 1, 3, 5, \dots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

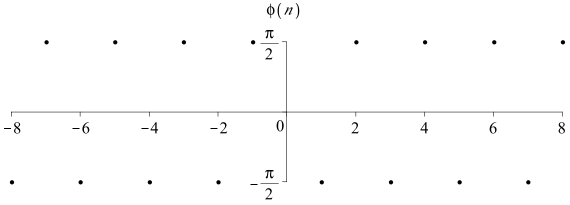
Dvoustranné amplitudové spektrum je zobrazeno



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Dvoustranné fázové spektrum je zobrazeno



Rozvoj periodické funkce

Příklad 3

Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v následující tabulce:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
a_n	—	—	—	0	0	0	0
b_n	—	—	—	—	2	-1	2/3
c_n	$\mathrm{i}/3$	$-\mathrm{i}/2$	i	0	$-\mathrm{i}$	$\mathrm{i}/2$	$-\mathrm{i}/3$
$\lvert c_n \rvert$	$1/3$	$1/2$	1	0	1	$1/2$	$1/3$
A_n	—	—	—	0	2	1	2/3
φ_n	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	—	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$

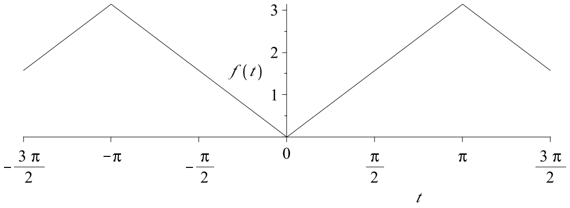
Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-\pi, \pi]$ zadanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \end{cases} \tag{42}$$

a proveďme spektrální analýzu.
Graf funkce je znázorněn



Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:

- *funkce je zřejmě periodická,*
- *funkce je spojitá,*
- *funkce je diferencovatelná na intervalu $(k\pi, \pi + k\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.*

Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -t\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{\pi} t\,\mathrm{d}\,t\right) = \pi, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -t\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t\right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -t\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t + \int_{0}^{\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t\right) = 0
\end{aligned}
$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Všimněme si, že

- *rozvíjená funkce je sudá,*
- *všechny koeficienty b_n jsou nulové,*
- *příslušná Fourierova řada bude mít pouze kosinové členy.*

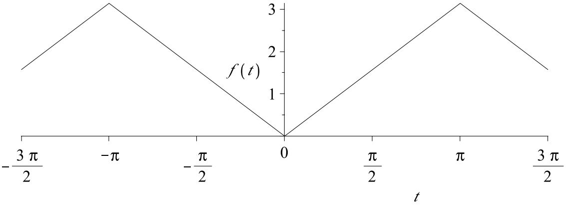
Hledaný rozvoj naší funkce tedy je

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Součet této řady roven $f(t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$.
Graf součtu je znázorněn na obrázku

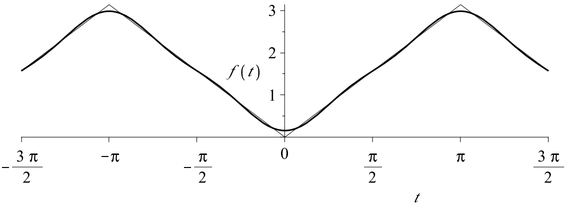


Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Částečné součty prvních členů jsou následující:

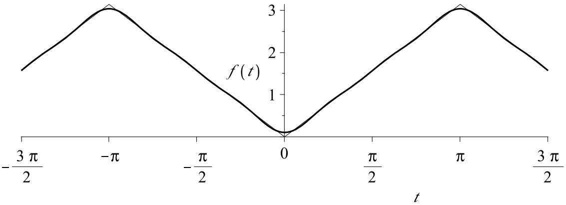
$$s_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9}\right)$$



Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

$$s_3(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} + \frac{\cos(5t)}{25}\right)$$



Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

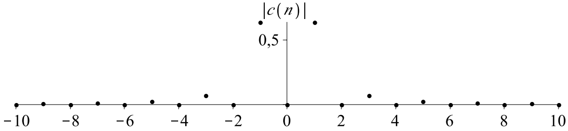
Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \left|\frac{a_0}{2}\right| = \pi/2,\\
A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,\\
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i} b_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - \mathrm{i}0\right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),\\
\varphi_n &= -\arg c_n = \begin{cases} 0 & \textit{pro } n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots, \\ \pi & \textit{pro } n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

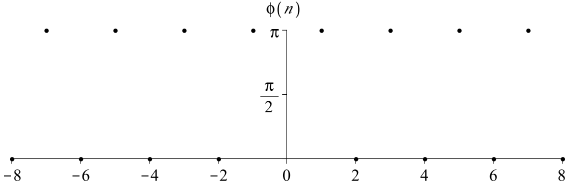
Dvoustranné amplitudové spektrum je znázorněno



Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Dvoustranné fázové spektrum je znázorněno



Fourierova řada v komplexním oboru

Příklad 4

Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v následující tabulce:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
a_n	—	—	—	π	$-4/\pi$	0	$-4/(9\pi)$
b_n	—	—	—	—	0	0	0
c_n	$-2/(9\pi)$	0	$-2/\pi$	$\pi/2$	$-2/\pi$	0	$-2/(9\pi)$
$\|c_n\|$	$2/(9\pi)$	0	$2/\pi$	0	$2/\pi$	0	$2/(9\pi)$
A_n	—	—	—	$\pi/2$	$4/\pi$	0	$4/(9\pi)$
φ_n	π	0	π	—	π	0	π

Sinová a kosinová řada

Věta 2

Buď $f(t)$ lichá funkce s periodou 2π splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \tag{43}$$

Věta 3

Buď $f(t)$ sudá periodická funkce s periodou 2π splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze kosinové členy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt). \tag{44}$$

Sinová a kosinová řada

Nechť je funkce $f(t)$ lichá s periodou $T = 2l$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$.
Pak budou všechny koeficienty $a_n = 0$ a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) \mathrm{d}\, t.$$

Nechť je funkce $f(t)$ sudá s periodou $T = 2l$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$.
Pak budou všechny koeficienty $b_n = 0$ a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) \mathrm{d}\, t.$$

Předpokládejme, že máme na intervalu $(0, l]$ funkci $f(t)$ splňující Dirichletovy podmínky a chceme ji rozvinout ve Fourierovu řadu.
Zadanou funkci je možno prodloužit na interval $(-l, l]$.
To můžeme provést tak, že se na intervalu $(-l, 0)$ dodefinuje tak, aby prodloužení bylo sudé či liché.

Sinová a kosinová řada

Definice 1

Buď $f(t)$ po částech spojitá funkce na intervalu $(0, l]$. Liché periodické prodloužení funkce $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$ je funkce $g(t)$ definovaná předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \tag{45}$$

Definice 2

Buď $f(t)$ po částech spojitá funkce na intervalu $(0, l]$. Sudé periodické prodloužení funkce $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$ je funkce $g(t)$ definovaná předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in (0, l], \\ f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \tag{46}$$

Sinová a kosinová řada

Řada

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \tag{47}$$

se nazývá *sinova Fourierova řada*.

Řada

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \tag{48}$$

se nazývá *kosinova Fourierova řada*.

Sinová a kosinová řada

Příklad 5

Rozviňme následující funkci v sinovu a kosinovu Fourierovu řadu

$$f(t) = t\sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \tag{49}$$

Sinova Fourierova řada
Nejprve provedeme liché prodloužení.
Rozvíjená funkce má periodu 2π *a základní interval periodicity* $(-\pi, \pi]$.
Podle Věty 2 platí

$$a_n = 0$$

a

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right)\mathrm{d}\,t.$$

Tedy pro $n = 2, 3, \ldots$ *je*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\sin(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{4n}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2}.$$

Sinová a kosinová řada

Příklad 5

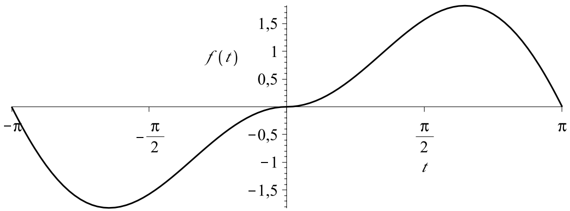
Pro $n = 1$ dostáváme

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2}.$$

Daná řada má tvar

$$f(t) = \frac{\pi}{2}\sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2}\sin(nt).$$

Liché prodloužení funkce je znázorněno grafem



Sinová a kosinová řada

Příklad 5

Kosinova Fourierova řada
Nejprve provedeme sudé prodloužení.
Rozvíjená funkce má tedy periodu 2π a základní interval periodicity $(-\pi, \pi]$.
Podle Věty 3 je

$$b_n = 0$$

a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n \frac{\pi}{l} t\right) \mathrm{d}\, t.$$

Tedy pro $n = 0, 2, 3, \ldots$ je

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(t) \cos(nt) \mathrm{d}\, t = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)}.$$

Sinová a kosinová řada

Příklad 5

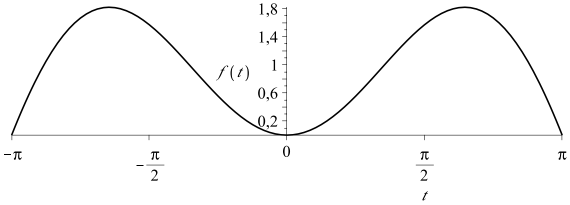
Pro $n = 1$ *dostáváme*

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2}.$$

Daná řada má tvar

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)} \cos(nt).$$

Sudé prodloužení funkce je znázorněno grafem



Vlastnosti Fourierových řad

Věta 4

Pro každou po částech spojitou funkci $f(t)$ na intervalu $[a, b]$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = 0, \tag{50}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = 0. \tag{51}$$

Věta 5 (Dirichlet)

Vyhovuje-li funkce $f(t)$ Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce $f(t)$ konverguje v každém t k hodnotě

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

Navíc platí

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$