Numerické matematika

Radek Kučera

VŠB-TU Ostrava

2016-2017

Numerické řešení počátečních úloh pro ODR

Cauchyova úloha

- Hledáme funkci $y = y(x)$, která na $\langle a, b\rangle$ vyhovuje rovnici:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = c$$

- geometrická interpretace: graf řešení sleduje vektorové pole
- numerická metoda: sleduje vektorové pole v bodech sítě

Příklad

- $$y' = x^2 + y, \quad x \in \langle 0, 3\rangle, \quad y(0) = 2$$

- analytické řešení: separace proměnných + variace konstant

$$y(x) = -x^2 - 2x - 2 + Ce^x, \quad C = 4$$

Tři jednoduché metody

Pro uzly $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $h = x_{i+1} - x_i$, $y_i \approx y(x_i)$.

- Eulerova metoda explicitní (jednokroková, 1.řádu):

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

- Eulerova metoda implicitní (jednokroková, 1.řádu):

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i) \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

- metoda skákající žáby (explicitní, dvoukroková, 2.řádu):

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f(x_i, y_i) \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

Heunova metoda (2. řádu)

- $$\left.\begin{aligned} y_0 &= c \\ k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1) \\ y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$
- obrázek

Runge-Kuttova metoda (RK4, 4. řádu)

$$
\begin{aligned}
&y_0 = c \\
&\left.\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i, y_i) \\
k_2 &= hf(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Definice

- Metoda se nazývá k-kroková, vyskytují-li se ve vzorci pro výpočet y_{i+1} hodnoty $y_i, \dots y_{i-k+1}$.
- Metoda se nazývá l-bodová, vyskytují-li se ve vzorci pro výpočet y_{i+1} hodnoty funkce f v l různých bodech a ty je potřeba vypočítat.

- U jednokrokových metod platí, že jejich řád odpovídá bodovosti. (čím vyšší řád, tím je pracnější výpočet)
- Vícekrokové metody dosahují vyššího řádu pomocí hodnot funkce f v bodech přibližného řešení z předchozích kroků. Tyto hodnoty f však není potřeba počítat až na jednu. Vícekrokové metody jsou proto jednobodové.
  (libovolně vysoký řád při zachování stejné pracnosti výpočtu)

Explicitní vícekrokové metody (Adams-Bashforth)

Přehled vzorců řádu 1 až 4

$$y_{i+1} = y_i + hf_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

kde značíme $f_i = f(x_i, y_i)$

- k-kroková metoda potřebuje *startovací úsek* délky k, tj.

$$y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$$

- ten se vypočítá jednokrokovou metodou (stejného řádu)

Implicitní vícekrokové metody (Adams-Moulton)

Přehled vzorců řádu 1 až 4

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

kde značíme $f_i = f(x_i, y_i)$

- implicití metody jsou "stabilnější" než explicitní metody
- pro výpočet y_{i+1} je potřeba vyřešit rovnici, kterou představuje daný vzorec

Vyřešení rovnice 1: převodem implicitního vzorce na explicitní

$$y' = x^2 + y, \quad x \in \langle 0, 3 \rangle, \quad y(0) = 2$$

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{h}{12}(5(x_{i+1}^2 + y_{i+1}) + 8f_i - f_{i-1})$$

$$y_{i+1} = \tfrac{12}{12-5h}(y_i + \tfrac{h}{12}(5x_{i+1}^2 + 8f_i - f_{i-1}))$$

- používá se pravá strana diferenciální rovnice,
- která musí být "dostatečně jednoduchá" (např. lineární v y)

Vyřešení rovnice 2: numericky metodou prostých iterací

(a) počáteční odhad: y_{i+1}^0

(b) zpřesňování pomocí iterací pro i pevné:

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i^k + \tfrac{h}{12}(5f(x_i, y_i^k) + 8f_i - f_{i-1}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- lze použít pro libovolnou pravou stranu diferenciální rovnice
- při dostatečně malém h bude iterační funkce kontrakcí
- provádí se často jen jedno iterační zpřesnění
- dostaváme algorimus prediktor-korektor

Algoritmus prediktor-korektor (PECE, 3. řádu)

$y_0 = c$

y_1, y_2 vypočti jednokrokovou metodou

$$\left.\begin{array}{ll} (P) & y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}) \\ (E) & f_{i+1} := f(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ (C) & y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}) \\ (E) & f_{i+1} := f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{array}\right\} \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$$

- kolika kroková a kolika bodová metoda je algoritmus PECE?
- navrhněte algoritmy PECEC, PECECE (jsou stabilnější)

Souhrn

- Cauchyova úloha
- odvození jednoduchých metod (Eulerova)
- Heunova metoda
- metoda RK4
- metody AB, AM, prediktor-korektor

Zdroj

- skripta Numerické metody
- str. 132–151