Numerické metody a statistika

Radek Kučera

VŠB-TU Ostrava

2016-2017

Newtonova metoda

- x^{k+1} určíme jako kořen tečny ke grafu funkce f v bodě x^k:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

- ukončovací kritérium:

$$|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$$

Příklad

$$10\cos(x-1) - x^2 + 2x - 1 = 0$$

- separací zjistíme $\bar{x} \in \langle 2.3, 2.4 \rangle$, zvolíme $x^0 = 2.4$
- potřebujeme funkci a její derivaci:

$$\begin{aligned} f(x) &= 10\cos(x-1) - x^2 + 2x - 1 \\ f'(x) &= -10\sin(x-1) - 2x + 2 \end{aligned}$$

- iterační vzorec:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{10\cos(x^k-1) - (x^k)^2 + 2x^k - 1}{-10\sin(x^k-1) - 2x^k + 2}$$

- tabulka iterací pro $\varepsilon = 10^{-6}$

k	x^k	$\lvert x^k - x^{k-1} \rvert$
0	2.4	—
1	2.37942798004	0.0205
2	2.37936459485	0.0000633
3	2.37936459422	$0.00000000062 < \varepsilon$

Definice

Iterační metoda, která počítá posloupnost $\{x^k\}$ konvergující k $\bar{x}$, je řádu p, jestliže existuje číslo $C > 0$ nezávislé na k takové, že platí:

$$|x^{k+1} - \bar{x}| \leq C|x^k - \bar{x}|^p$$

Věta

Newtonova metoda je druhého řádu.

- Taylorův rozvoj funkce f

$$0 = f(\bar{x}) = f(x^k) + f'(x^k)(\bar{x} - x^k) + \frac{f''(\xi)}{2}(\bar{x} - x^k)^2$$

- po úpravě

$$x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} - \bar{x} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x^k)}(\bar{x} - x^k)^2$$

- a po zjednodušení

$$|x^{k+1} - \bar{x}| \leq C|\bar{x} - x^k|^{2}$$

kde $C = \max |f''(\xi)/(2f'(x)|,\ \xi, x \in \langle a, b \rangle$

Věta (o globální konvergenci)

Nechť funkce f splňuje na $\langle a, b\rangle$ tyto předpoklady:

- první derivace f' je nenulová na $\langle a, b\rangle$
- druhá derivace f'' nemění znaménko v (a, b)
- platí $f(a)f(b) < 0$
- platí $|f(a)/f'(a)| < b - a, \quad |f(b)/f'(b)| < b - a$

Pak má funkce f intervalu (a, b) jediný kořen a Newtonova metoda k němu konverguje pro každou počáteční aproximnaci $x^0 \in \langle a, b\rangle$.

Poznámka

Uvedené předpoklady lze ověřit před zahájením výpočtu. Jsou-li splněny, pak výpočet bude konvergovat. Nejsou-li spněny pak výpočet konvergovat nemusí (ale může).

Metoda prosté iterace

- rovnici $f(x) = 0$ převedeme do iteračního tvaru $x = g(x)$
- řešení $\bar{x}$ se pak nazývá pevný bod funkce g

$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

- iterační tvar není jediný

Příklad

$$e^x - x^2 + 1 = 0$$

- iterační tvar $g_a(x)$: $\quad x = -\sqrt{e^x + 1}$
- iterační tvar $g_b(x)$: $\quad x = x + e^x - x^2 + 1$
- iterační tvar $g_c(x)$: $\quad x = x - \frac{e^x - x^2 + 1}{e^x - 2x}$

Definice

Říkáme, že funkce g zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do sebe, jestliže

$$g(x) \in \langle a, b\rangle \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Věta (Browerova)

Nechť g je spojitá a zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ do sebe. Pak existuje pevný bod.

- položíme $f(x) = x - g(x)$
- předokládáme $f(a) \neq 0 \neq f(b)$ (jinak je důkaz triviální)
- pak platí $f(a) = a - g(a) < 0$ a $f(b) = b - g(b) > 0$, a proto

$$f(a)f(b) < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ má kořen } \bar{x} \;\Rightarrow\; \text{kořen je pevný bod } g$$

Algoritmus MPI

$$x^{k+1} = g(x^k),\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Definice

Říkáme, že funkce g je kontrakce na intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje konstanta $L \in (0, 1)$ taková, že platí

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \langle a, b\rangle.$$

Věta (o konvergenci)

Nechť g je spojitá, kontrakce a zobrazuje $\langle a, b\rangle$ do sebe. Pak existuje jediný pevný bod $\bar{x}$ a MPI k němu konverguje pro každou počáteční aproximnaci $x^0 \in \langle a, b\rangle$.

Důkaz: analýza metody

- existence plyne z Browerovy věty
- jednoznačnost sporem: $\bar{x} = g(\bar{x}), \quad \tilde{x} = g(\tilde{x})$

$$|\bar{x} - \tilde{x}| = |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})| \leq L|\bar{x} - \tilde{x}| \;\Rightarrow\; \bar{x} = \tilde{x}$$

- konvergence: $\bar{x} = g(\bar{x}), \quad x^k = g(x^{k-1})$

$$\begin{aligned} |x^k - \bar{x}| &= |g(x^{k-1}) - g(\bar{x})| \leq L|x^{k-1} - \bar{x}| \\ &\leq L^2|x^{k-2} - \bar{x}| \leq \dots \\ |x^k - \bar{x}| &\leq L^k|x^0 - \bar{x}| \quad \text{(odhad chyby)} \end{aligned}$$

Limitním přechodem dostáváme:

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |x^k - \bar{x}| \leq |x^0 - \bar{x}| \lim_{k\to\infty} L^k = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} x^k = \bar{x}$$

Závěr o rychlosti konvergence

- L je blízko jedné $\Rightarrow$ konvergence je pomalá
- L je blízko nuly $\Rightarrow$ konvergence je rychlá

Odhad L pomocí derivace

$$M_g = \max_{\xi \in \langle a,b \rangle} |g'(\xi)|$$

- $1 \leq M_g \quad \Rightarrow$ nemusí konvergovat
- $1 > M_g \quad \Rightarrow$ konverguje, $M_g = L$

Příklad (pokračování)

k	$x^k = g_a(x^{k-1})$	$x^k = g_b(x^{k-1})$	$x^k = g_c(x^{k-1})$
0	-1.1	-1.1	-1.1
1	$\vdots$	-0.9771289	$\vdots$
2	$\vdots$		$\vdots$
3	$\vdots$		$\vdots$
4	$\vdots$		-1.147757
5	$\vdots$		
6	$\vdots$		
7	$\vdots$		
8	-1.147757		
	$M_{g_a} = 0.14 = L$	$M_{g_b} = 3.7$	$M_{g_c} = 0.03 = L$

Shrnutí

- Newtonova metoda, potřebuje derivaci
- je druhého řádu, tj. velmi rychlá
- metoda prosté iterace, výpočet pevného bodu (Browerova věta)
- je to obecný iterační postup
- analyzuje se pomocí kontraktivnosti iterační funkce

Zdroj

- skripta Numerické metody
- str. 29–39