Numerické metody a statistika

Radek Kučera

VŠB-TU Ostrava

2016-2017

Řešení nelineárních rovnic

Formulace úlohy

$$f(x) = 0$$

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je nelineární funkce, řešením $\bar{x} \in \mathbb{R}$ je kořen

Princip iterační metody

Pro jiný zápis úlohy:

$$x = F(x)$$

Počítáme posloupnost aproximací $\{x^k\}$:

$$x^{k+1} = F(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jesliže $\lim_{k\to\infty} x^k = \bar{x}$ a funkce F je spojitá, pak $\bar{x}$ splňuje rovnici:

$$\bar{x} = F(\bar{x}).$$

Příklad

Vypočítejte $x = \sqrt{2}$.

Řešení: Hledané x vyhovuje rovnici:

$$x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x^2 + x - 2 \\ x = x - \dfrac{x^2 - 2}{2x} \end{cases}$$

Máme dva rekurentní vzorce pro iterační výpočet:

(1) $x^{k+1} = (x^k)^2 + x^k - 2$

$x^0 = 1$
$x^1 = 0$
$x^2 = -2$
$x^3 = 0$
$\dots$
nekonverguje

(2) $x^{k+1} = x^k - \dfrac{(x^k)^2 - 2}{2x^k}$

$x^0 = 1$
$x^1 = 1.5000$
$x^2 = 1.4167$
$x^3 = 1.4142$
$x^4 = 1.4142$
$\sqrt{2} = 1.4142 \pm 10^{-4}$

U každé iterařní metody potřebujeme:

- počáteční iteraci x^0 (pokud možno blízko hledaného řešení)
- ukončovací kritérium pro zadanou přesnost $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |x^k - \bar{x}| &\leq \varepsilon \\ |x^k - x^{k-1}| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Separace kořenů (určení x^0)

1. nakreslení grafu
2. rozložení rovnice $f(x) = 0$ do tvaru $h(x) = g(x)$ a nakreslení grafů
3. výpočet tabulky funkčních hodnot

Věta

Nechť je f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a)f(b) < 0$. Pak uvnitř intervalu (a, b) leží aspoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$.

Příklad 1

Z grafu odhadněte kořeny funkce: $f(x) = (x-1)^2 - 1$.

Řešení: Grafem je parabola (nakreslete), $\bar{x}_1 \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $\bar{x}_2 \in \langle 1, 3 \rangle$

Příklad 2

Rozložte a z grafů odhadněte kořeny funkce: $f(x) = e^x - 2x - 1$.

Řešení: $e^x = 2x + 1$, grafem jsou exponenciála a přímka (nakreslete), $\bar{x}_1 \in \langle -0.5, 0.5 \rangle$, $\bar{x}_2 \in \langle 1, 2 \rangle$

Příklad 3

Z tabulky funkčních hodnot odhadněte polohu kořenů funkce:

$$f(x) = e^x - 2x - 1$$

Řešení:

x_i	$f(x_i)$	$sgn\, f(x_i)$
-1	1.3679	$+$
-0.5	0.6065	$+$
0	0	
0.5	-0.3513	$-$
1	-0.4817	$-$
1.5	0.4817	$+$
2	2.3891	$+$

$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 \in \langle 1, 1.5 \rangle$

Nejjednodušší metody

- postupně zkracujeme interval, v němž leží kořen $\bar{x}$
- předpoklady: f je spojitá funkce na $\langle a^0, b^0\rangle$ a $f(a^0)f(b^0) < 0$

Jak postupujeme (první iterace)

- na začátku platí $\bar{x} \in \langle a^0, b^0\rangle$
- vybereme $x^1 \in (a^0, b^0)$
- zjišťujeme, v které části intervalu leží kořen
  - je-li $f(x^1) = 0$, pak $x^1 = \bar{x}$, konec
  - je-li $f(a^0)f(x^1) < 0$, pak $\langle a^1, b^1\rangle = \langle a^0, x^1\rangle$
  - je-li $f(x^1)f(b^0) < 0$, pak $\langle a^1, b^1\rangle = \langle x^1, b^0\rangle$
- pro nový interval platí $\bar{x} \in \langle a^1, b^1\rangle$ a $f(a^1)f(b^1) < 0$
- postup opakujeme a dostáváme $\bar{x} \in \langle a^k, b^k\rangle$, $k = 0, 1, \ldots$

Metoda půlení intervalu

- x^{k+1} určíme jako střed intervalu $\langle a^k, b^k \rangle$:

$$x^{k+1} = \frac{a^k + b^k}{2}$$

- ukončovací kritérium:

$$\begin{aligned} |x^{k+1} - \bar{x}| &\leq \varepsilon \quad ??? \\ |x^{k+1} - \bar{x}| &\leq \frac{1}{2}(b^k - a^k) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Poznámky

- ukončovací kritérium je "přesné"
- rychlost konvergence nezávisí na tvaru funkce f
- kolik iterací je potřeba na jednu platnou cifru?

Příklad

Metodou půlení intervalu vypočítejte kořen $\bar{x}$ rovnice

$$10\cos(x-1) - x^2 + 2x - 1 = 0,$$

který leží v intervalu $\langle 2.3, 2.4 \rangle$, s přesností $\epsilon = 10^{-3}$.

k	a^k	b^k	x^{k+1}	$(b^k - a^k)/2$
0	2.3^+	2.4^-	2.35^+	0.05
1	2.35^+	2.4^-	2.375^+	0.025
2	2.375^+	2.4^-	2.3875^-	0.0125
3	2.375^+	2.3875^-	2.38125^-	0.00625
4	2.375^+	2.38125^-	2.378125^+	0.003125
5	2.378125^+	2.38125^-	2.3796875^-	0.0015625
6	2.378125^+	2.3796875^-	2.37890625^+	$0.00078125 < 10^{-3}$

Výsledek: $\bar{x} = 2.378 \pm 10^{-3}$

Metoda regula falsi

- x^{k+1} určíme jako kořen přímky, která spojuje krajní body grafu funkce f na daném intervalu:

$$x^{k+1} = a^k - \frac{b^k - a^k}{f(b^k) - f(a^k)} f(a^k)$$

- ukončovací kritérium:

$$|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$$

Poznámky

- ukončovací kritérium je nepřesné (oprava viz skriptum)
- rychlost konvergence závisí na tvaru funkce f
- kdy konverguje metoda regula falsi rychle a kdy pomalu?

Příklad

Metodou regula falsi vypočítejte kořen $\bar{x}$ rovnice

$$10\cos(x-1) - x^2 + 2x - 1 = 0,$$

který leží v intervalu $\langle 2.3, 2.4 \rangle$, s přesností $\epsilon = 10^{-3}$.

k	a^k	b^k		x^{k+1}	$\lvert x^{k+1} - x^k \rvert$
0	2.3^+	2.4^-	1	2.379095^+	2.4^-

Výsledek: $\bar{x} = 2.379 \pm 10^{-3}$

Shrnutí

- ukázali jsme princip iterace
- vysvětlili jsme postupy pro separaci kořenů
- ukázali jsme metodu půlení intervalu
- ukázali jsme metodu regula falsi

Zdroj

- skripta Numerické metody
- str. 21–28

Newtonova metoda

- x^{k+1} určíme jako kořen tečny ke grafu funkce f v bodě x^k:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

- ukončovací kritérium:

$$|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$$

Metoda prosté iterace

- $f(x) = 0$ převedeme do iteračního tvaru $x = g(x)$:

$$x^{k+1} = g(x^k)$$

- ukončovací kritérium:

$$|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$$