Numerické metody a statistika

Radek Kučera

VŠB-TU Ostrava

2016-2017

Číslo předmětu: 714-0781/02
Rozsah: 2+2
Hodnocení: 6 kreditů
Přednáší: Radek Kučera
E-mail: radek.kucera@vsb.cz
Kancelář: A826

- 20 bodů cvičení (15 písemky + 5 program)
- 80 bodů zkouška (60 písemka + 20 ústní část)

- mdg.vsb.cz/portal/nm/index.php
- Numerická matematika pro aplikované vědy a technologie
- prezentace na přednáškách a cvičeních

- přednášky jsou nepovinné, účast se doporučuje
- cvičení jsou povinná, 20%-ní neúčast lze omluvit

Obsah předmětu

- řešení nelineárních rovnic včetně jejich soustav
- řešení soustav lineárních rovnic přímými metodami
- maticové rozklady
- řešení soustav lineárních rovnic iteračními metodami
- interpolace a aproximace funkcí
- numerické integrování a derivování
- počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

Na cvičeních

MATLAB = MATicová LABoratoř

- základem je práce s maticemi v dialogovém režimu
- velké množství matematických funkcí, grafika
- jednoduché programování funkcí vlastních

(analogie: OCTAVE, SCILAB)

Numerická matematika a numerické metody

Diskrétní (numerická) úloha

Je určena konečným počtem vstupních a výstupních dat a je znám výpočetní postup (algoritmus) pro její vyřešení. Používají se základní aritmetické operace. Výpočet na počítači.

Spojitá úloha

Jedním ze vstupních nebo výstupních údajů je spojitá funkce.

Co je diskrétní a co je spojitá úloha?

- řešení kvadratické rovnice
- řešení obecné nelineární rovnice
- řešení soustavy lineárních rovnic
- interpolace funkčních hodnot, funkce
- výpočet integrálu a derivace

Diskretizace

Diskretizací rozumíme převod spojité úlohy na úlohu diskrétní.

Diskretizace při výpočtu určitého integrálu

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad I_h = h \sum_{i=1}^{n} f(s_i)$$

s_i jsou středy intervalů $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $h = x_i - x_{i-1}$ je krok,
$i = 1, \ldots, n$ a n je počet kroků

Obecný požadavek na diskretizaci

Řešení diskretizované úlohy musí aproximovat řešení spojité úlohy s (libovolně) velkou přesností:

$$\lim_{h \to 0+} I_h = I$$

h je diskretizační parametr.

Řád diskretizace

Odhad diskretizační chyby:

$$|I_h - I| \leq Ch^p$$

kde $C > 0$ nezávisí na h a $p > 0$ je řád diskretizace

Je lepší malé nebo velké p? $(C = 1)$

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$h = 0.1$	0.1	0.01	0.001
$h = 0.01$	0.01	0.0001	0.000001
$h = 0.001$	0.001	0.000001	0.000000001

Co je náplní numerické matematiky z obecného pohledu?

- řešením (vybraných) diskrétních úloh
- převod spojitých úloh na úlohy diskrétní

- Numerická metoda: počítačový algoritmus řešení diskrétní úlohy, nebo metodu diskretizace.
- Numerická analýza: rozbor algoritmu (rychlost, nároky na paměť, stabilita), rozbor diskretizace (např. odvození řádu diskretizace).

Chyby v numerických výpočtech

Jak vznikají chyby?

- chyba matematického modelu
- chyba aproximační (vznikne zjednodušením modelu, např. diskretizační chyba)
- chyby zaokrouhlovací (souvisí se stabilitou úlohy)
- omyly, chyby v programech, nepochopení věci, atd.

Definice

Nechť $\bar{x} \in \mathbb{R}$ je přesné číslo a $x \in \mathbb{R}$ je jeho aproximace.

- absolutní chyba: $e(x) = \bar{x} - x$
- odhadem absolutní chyby rozumíme co možná nejmenší číslo $\varepsilon(x)$ takové, že $\varepsilon(x) \geq |e(x)|$
- relativní chyba: $\delta(x) = e(x)/x$, $x \neq 0$
- odhadem relativní chyby rozumíme co možná nejmenší číslo $\delta(x)$ takové, že $\delta(x) \geq |r(x)|$

Značení

Nerovnost $|\bar{x} - x| \leq \varepsilon$ znamená: $\bar{x} \in \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle$. Píšeme:

$$\bar{x} = x \pm \varepsilon$$

Počítačové epsilon

- odhad nejmenší nenulové relativní chyby při zobrazení čísla v počítači.
- hodnota na PC:

$$poc\_eps = 2^{-52} \approx 2 \times 10^{-16}$$

- počítač proto neumí spočítat správně výsledek na více jak 15 platných cifer (vyjma triviálních úloh).
- každá aritmetická operace je ovlivněna chybou nejméně na 16-tém desetinném místě.
- Při dalším výpočtu se chyba může podstatně zvětšit !!

Řešte v Matlabu soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.99x_2 &= 1.99 \\ 0.99x_1 + 0.98x_2 &= 1.97 \end{aligned}$$

a pak soustavu se změněnou pravou stranou: 1.9999, 1.9701

- výsledek v prvním případě: $x_1 = 1, \quad x_2 = 1$
- výsledek ve druhém případě: $x_1 = -95.0300, \quad x_2 = 98.0100$
- výsledek ve druhém případě zobrazený v plné délce:

$$x_1 = -95.030000000010162, \quad x_2 = 98.010000000010265$$

Stabilita výpočtu (algoritmu, úlohy)

- nestabilní výpočet: je citlivý na poruchy (chyby se zvětšují)
- stabilní výpočet: je málo citlivý na poruchy (chyby se tlumí)

Definice

Uvažujme úlohu U a nechť $\bar{y} = U(\bar{x})$ a $y = U(x)$. Číslem podmíněnosti úlohy U nazýváme: $C_U = |r(y)|/|r(x)|$.

- Dobře podmíněná úloha: $C_U \approx 1$
- Špatně podmíněná úloha: $C_U \gg 1$

Chyby při provádění aritmetických operací

operace	e	ε	r	δ
+	sčítá	sčítá	?	?
-	odčítá	sčítá	?	?
*	?	?	sčítá	sčítá
/	?	?	odčítá	sčítá

- při odčítání blízkých čísel dochází ke ztrátě relativní přesnosti
- při dělení dochází ke ztrátě absolutní přesnosti, je-li jmenovatel blízký nule

Příklad stabilního a nestabilního výpočtu

Vypočtěte integrály:

$$y_i = \int_0^1 \frac{x^i}{x+5}\,dx \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, 8$$

(zaokrouhlujte na 3 desetinná místa)

Vzorec $y_i = \frac{1}{i} - 5y_{i-1}$ je nestabilní:

$y_0 \doteq 0.182$, $y_1 \doteq 0.090$, $y_2 \doteq 0.050$, $y_3 \doteq 0.083$, $y_4 \doteq -0.165$ (!!!)

$C_U = 686.6$

Vzorec $y_{i-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{i} - y_i\right)$ je stabilní:

$y_9 \doteq 0.017$, $y_8 \doteq 0.019$, $y_7 \doteq 0.017$, $\ldots$, $y_0 \doteq 0.182$

$C_U = 0.4061$

Shrnutí

- ukázali jsme rozdíl mezi spojitou a diskrétní úlohou
- vysvětlili jsme pojemy diskretizace a její řád
- zavedli jsme terminologii pro chyby (absolutní, relativní, . . .)
- vysvětlili jsme pojmy ”počítačové epsilon”, ”přetečení”, ”podtečení”
- definovali jsme pojem podmíněnost úlohy, stabilita a nestabilita výpočtu

Zdroj

- skripta Numerické metody
- str. 7–19