4. SLR – iterační metody

Průvodce studiem

Iterační metody umožňují řešit soustavy lineárních rovnic pomocí postupného přibližování k přesnému řešení. Počítá se posloupnost vektorů aproximací $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ taková, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}, \qquad \text{kde } \mathbf{x} \text{ je řešením } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Přesné řešení tedy dostaneme v limitě, tj. formálně po nekonečném počtu kroků.Výhody iteračních metod jsou tyto:

- *V každé iteraci známe aproximaci řešení $\boldsymbol{x}^{(k)}$.* Pokud je tato aproximace dostatečně přesná, pak výpočet ukončíme.
- *V každé iteraci je nejpracnější operací násobení matice a vektoru.* Jedná se o operaci, která je algoritmicky podstatně jednodušší než GEM a lze ji snadno provést i pro rozsáhlé řídké matice, tj. pro matice s velkým počtem (neuložených) nulových prvků.
- *Iterační metody jsou méně citlivé na zaokrouhlovací chyby než metody přímé.* Na každou iteraci můžeme nahlížet jako na počáteční. Zaokrouhlovací chyby z předchozích iterací proto vymizí, pokud v dalším výpočtu dojde ke konvergenci. Některé speciální iterační metody byly navrženy pro zpřesnění výsledků vypočítaných pomocí přímých metod.

Zhruba platí následující dělení: přímé metody se používají, je-li matice soustavy malá ($1 \leq n \leq 10000$), plná a dobře podmíněná; iterační metody se používají pro velké soustavy ($n > 10000$) s řídkou maticí.

4.1. Příklad iteračního výpočtu

Cíle

Uvedeme příklady iteračního řešení soustav lineárních rovnic a ukážeme na nich, že výpočet může konvergovat, ale i divergovat.

Předpokládané znalosti

Řešení soustav lineárních rovnic. Provádění rekurentních výpočtů.

Výklad

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 11x_1 + 2x_2 + x_3 &= 15, \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 1, \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.1.1}$$

Soustavu nejdříve převedeme na tvar vhodný pro výpočet iterací, tzv. *iterační tvar*. Provádí se to tak, že z každé rovnice vyjádříme jednu neznámou. Například:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{11}(15 - 2x_2 - x_3), \\ x_2 &= \tfrac{1}{10}(16 - x_1 - 2x_3), \\ x_3 &= \tfrac{1}{8}(-1 + 2x_1 + 3x_2), \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_J}.$$

Jiná možnost:

$$\begin{aligned} x_1 &= 15 - 10x_1 - 2x_2 - x_3, \\ x_2 &= 16 - x_1 - 9x_2 - 2x_3, \\ x_3 &= -1 + 2x_1 + 3x_2 - 7x_3, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -10 & -2 & -1 \\ -1 & -9 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_B}.$$

Takových převodů existuje zřejmě nekonečně mnoho, ale jenom některé povedou ke konvergentnímu výpočtu.

Z rovnic (4.1.2) a (4.1.3) dostaneme rekurentní vzorce připsáním iteračního indexu $k+1$ k neznámým na levé straně a k k neznámým na pravé straně. Dostáváme

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{11}(15 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{10}(16 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{8}(-1 + 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}), \end{aligned}\right\} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}_J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_J, \tag{4.1.4}$$

a

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 15 - 10x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= 16 - x_1^{(k)} - 9x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}, \\ x_3^{(k+1)} &= -1 + 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)} - 7x_3^{(k)}, \end{aligned}\right\} \quad \text{tj.} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}_B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}_B. \tag{4.1.5}$$

Nyní zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^\top$, např. $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^\top$. Tyto hodnoty dosadíme do pravé strany rekurentních vzorců (4.1.4) a dostaneme

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\tfrac{15}{11}, \ \tfrac{16}{10}, \ -\tfrac{1}{8} \right)^\top.$$

Jestliže takto pokračujeme dále, dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(2)} &= (1.0841, 1.4886, 0.81591)^\top,\\
\mathbf{x}^{(3)} &= (1.0188, 1.3284, 0.70426)^\top,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Provedeme-li několik dalších iterací, zjistíme, že se číslice na prvních desetinných místech začnou po chvíli opakovat. Dostaneme přitom vektor

$$\mathbf{x} = (1.0564, 1.3642, 0.65069)^\top,$$

o němž se můžeme domnívat, že je aproximací přesného řešení soustavy (4.1.1).

Jestliže analogicky počítáme podle rekurentních vzorců (4.1.5), dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= (15, 16, -1)^\top,\\
\mathbf{x}^{(2)} &= (-166, -141, 84)^\top,\\
\mathbf{x}^{(3)} &= (1873, 1283, -1344)^\top,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zde žádnou tendenci ke konvergenci nevidíme a je proto pravděpodobné, že posloupnost iterací diverguje.

Kontrolní otázky

Otázka 1. V čem spočívá základní rozdíl mezi přímými a iteračními metodami?

Otázka 2. Jaké jsou výhody a nevýhody přímých a iteračních metod?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Pro soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
-x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -9,\\
-6x_1 - 19x_2 + 10x_3 &= -59,\\
3x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= 28
\end{aligned}$$

navrhněte dva iterační tvary pomocí postupů z odstavce 4.1.

2. U kterého z navržených iteračních tvarů výpočet konverguje?

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Rekurentní vzorce pro první iterační tvar:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 9 - 3x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}, \\
x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{19}(59 - 6x_1^{(k)} + 10x_3^{(k)}), \\
x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(-28 + 3x_1^{(k)} + 9x_2^{(k)});
\end{aligned}
$$

rekurentní vzorce pro druhý iterační tvar:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 9 - 3x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}, \\
x_2^{(k+1)} &= 59 - 6x_1^{(k)} - 18x_2^{(k)} + 10x_3^{(k)}, \\
x_3^{(k+1)} &= -28 + 3x_1^{(k)} + 9x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}.
\end{aligned}
$$

2. Jestliže zkusíme výpočet provést, zjistíme, že dochází k divergenci v obou případech. Rozpoznáním konvergentního výpočtu z vlastností matice soustavy se budeme zabývat v dalších odstavcích.

4.2. Obecné iterační metody

Cíle

Ukážeme obecný postup pro iterační řešení soustav lineárních rovnic a uvedeme jeho dvě základní varianty.

Předpokládané znalosti

Příklady iteračního řešení soustav lineárních rovnic.

Výklad

Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.2.1}$$

s regulární čtvercovou maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n, vektorem pravé strany $\mathbf{b} = (b_i)$ a vektorem neznámých $\mathbf{x} = (x_i)$. Soustavu (4.2.1) přepišme na ekvivalentní soustavu v *iteračním tvaru*

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}, \tag{4.2.2}$$

kde $\mathbf{C}$ je *iterační matice* řádu n a $\mathbf{d}$ je sloupcový vektor. Musí přitom platit, že rovnice (4.2.1) a (4.2.2) mají stejné řešení.

Nechť $\mathbf{x}^{(0)}$ je daná počáteční aproximace. Iterační výpočet provádíme podle rekurentního vzorce

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.2.3}$$

Jestliže posloupnost vektorů $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje k vektoru $\mathbf{x}$, pak limitním přechodem v (4.2.3) dostaneme, že $\mathbf{x}$ je řešením rovnice (4.2.2) a také (4.2.1).

Jak uvidíme později, volba počáteční aproximace neovlivní konvergenci, takže vektor $\mathbf{x}^{(0)}$ můžeme zvolit libovolně. Výpočet ukončíme, jestliže dvě poslední aproximace se od sebe liší ne více, než kolik je požadovaná přesnost, tj. jestliže je splněno ukončovací kritérium

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \epsilon, \tag{4.2.4}$$

kde $\epsilon > 0$ je dané malé číslo a $\|\cdot\|$ je vhodná norma. V našich příkladech použijeme ukončovací kritérium s řádkovou normou.

Algoritmus (Iterační řešení SLR)

Vstup: $\mathbf{C}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{x}^{(0)}$, ϵ.

Opakuj

$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}$;

dokud $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| > \epsilon$.

Výstup: $\mathbf{x}^{(k)}$.

4.2.1. Jacobiova metoda

Jacobiovu metodu jsme si již ukázali při řešení soustavy (4.1.1) v odstavci 4.1. Jsou to rekurentní vzorce (4.1.4). Nyní si ji probereme obecně.

Budeme předpokládat, že diagonální prvky matice soustavy (4.2.1) jsou nenulové, tj. $a_{ii} \neq 0$. Z i-té rovnice

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

vyjádříme i-tou neznámou

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Jacobiova metoda je určena rekurentními vzorci

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.2.5}$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Všimněme si ještě, že vzorce (4.2.5) můžeme zapsat v obecném maticovém tvaru (4.2.3), jestliže položíme $\mathbf{C} = \mathbf{C}_J$ a $\mathbf{d} = \mathbf{d}_J$, kde

$$\mathbf{C}_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d}_J = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}. \tag{4.2.6}$$

Pomocí aditivního rozkladu matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}, \tag{4.2.7}$$

kde $\mathbf{L} = (l_{ij})$, $l_{ij} = a_{ij}$, $i > j$, $l_{ij} = 0$, $i \leq j$, je dolní trojúhelníková část, $\mathbf{D} = (d_{ij})$, $d_{ii} = a_{ii}$, $d_{ij} = 0$, $i \neq j$, je diagonální část a $\mathbf{U} = (u_{ij})$, $u_{ij} = 0$, $i \geq j$, $u_{ij} = a_{ij}$, $i < j$, je horní trojúhelníková část, můžeme stručně psát

$$\mathbf{C}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}), \quad \mathbf{d}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

Příklad 4.2.1. Soustavu lineárních rovnic (4.1.1) řešte pomocí Jacobiovy metody s přesností $\epsilon = 10^{-4}$.

Řešení: Výpočet se provádí podle rekurentních vzorců (4.1.4). Začátek výpočtu jsme naznačili v odstavci 4.1. Nyní vše shrneme v tabulce 4.2.1, kde kromě aproximací $\mathbf{x}^{(k)}$ uvádíme řádkové normy $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$. Naznačme ještě výpočet prvních dvou norem:

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R = \max\{|\tfrac{15}{11} - 0|, |\tfrac{16}{10} - 0|, |-\tfrac{1}{8} - 0|\} = 1.6,$$

$$\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_R = \max\{|1.0841 - \tfrac{15}{11}|, |1.4886 - \tfrac{16}{10}|, |0.8159 + \tfrac{1}{8}|\} = 0.9409,$$

atd.

Výpočet jsme ukončili po desáté iteraci, protože $\|\mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^{(9)}\|_R = 0.00005 \leq 10^{-4}$, a výsledek je $x_1 = 1.0564 \pm 10^{-4}$, $x_2 = 1.3642 \pm 10^{-4}$, $x_3 = 0.6507 \pm 10^{-4}$.

Tabulka 4.2.1: Iterace Jacobiovy metody.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	0	0	0	—
1	1.3636	1.6000	−0.1250	1.60000
2	1.0841	1.4886	0.8159	0.94091
3	1.0188	1.3284	0.7043	0.16023
4	1.0581	1.3573	0.6279	0.07641
5	1.0598	1.3686	0.6485	0.02064
6	1.0558	1.3643	0.6532	0.00468
7	1.0562	1.3638	0.6506	0.00260
8	1.0565	1.3643	0.6505	0.00048
9	1.0565	1.3643	0.6507	0.00027
10	1.0564	1.3642	0.6507	0.00005

4.2.2. Gauss-Seidelova metoda

Začneme příkladem. Pro řešení soustavy lineárních rovnic (4.1.1) jsme použili Jacobiovu metodu, která je určena rekurentními vzorci (4.1.4). Podle těchto vzorců se počítají v k-té iteraci složky nové aproximace $\mathbf{x}^{(k+1)}$ postupně, tj. nejdříve $x_1^{(k+1)}$ pak $x_2^{(k+1)}$ a nakonec $x_3^{(k+1)}$. Přitom se stále používají složky z předchozí aproximace, tj. $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$ a $x_3^{(k)}$. Tento postup můžeme snadno vylepšit. Stačí si uvědomit, že při výpočtu $x_2^{(k+1)}$ můžeme použít přesnější aproximaci $x_1^{(k+1)}$ namísto méně přesné $x_1^{(k)}$. Podobně můžme při výpočtu $x_3^{(k+1)}$ použít přesnější aproximace $x_1^{(k+1)}$ a $x_2^{(k+1)}$ namísto méně přesných $x_1^{(k)}$ a $x_2^{(k)}$. Původní rekurentní vzorce (4.1.1) se tak změní na tvar

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{11}(15 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{10}(16 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{8}(-1 + 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}), \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

což je Gauss-Seidelova metoda.

Příklad 4.2.2. Soustavu lineárních rovnic (4.1.1) řešte pomocí Gauss-Seidelovy metody s přesností $\epsilon = 10^{-4}$.

Řešení: Výpočet podle vzorců (4.2.8) je zaznamenán v tabulce 4.2.2.

Tabulka 4.2.2: Iterace Gauss-Seidelovy metody.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lVert\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\rVert_R$
0	0	0	0	—
1	1.3636	1.4636	0.7648	1.46364
2	1.0280	1.3442	0.6361	0.33564
3	1.0614	1.3666	0.6528	0.03341
4	1.0558	1.3639	0.6504	0.00559
5	1.0565	1.3643	0.6507	0.00073
6	1.0564	1.3642	0.6507	0.00011
7	1.0564	1.3642	0.6507	0.00001

Výpočet jsme ukončili už po sedmé iteraci, protože $\lVert\mathbf{x}^{(7)} - \mathbf{x}^{(6)}\rVert_R = 0.00001 \leq 10^{-4}$, a výsledek je $x_1 = 1.0564 \pm 10^{-4}$, $x_2 = 1.3642 \pm 10^{-4}$, $x_3 = 0.6507 \pm 10^{-4}$.

Poznámka

Z příkladů 4.2.1. a 4.2.2. je vidět, že Gauss-Seidelova metoda je rychlejší než metoda Jacobiova. Existují ale příklady, kdy Jacobiova metoda konverguje, zatímco Gauss-Seidelova metoda diverguje.

Pro obecnou soustavu (4.2.1), kde $a_{ii} \neq 0$, je *Gauss-Seidelova metoda* určena rekurentními vzorci

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4.2.9)$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Nyní není na první pohled jasné, jak tyto vzorce zapsat v maticovém tvaru (4.2.3). Podívejme se proto ještě na náš příklad. Jestliže v (4.2.8) převedeme na levou stranu všechny členy obsahující složky nové aproximace, dostaneme

$$
\begin{aligned}
11x_1^{(k+1)} &= 15 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)},\\
x_1^{(k+1)} + 10x_2^{(k+1)} &= 16 - 2x_3^{(k)},\\
-2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} + 8x_3^{(k+1)} &= -1.
\end{aligned}
$$

Odtud je vidět, že výpočet nové aproximace $\mathbf{x}^{(k+1)}$ z aproximace předchozí $\mathbf{x}^{(k)}$ můžeme interpretovat také jako řešení soustavy lineárních rovnic s dolní trojúhelníkovou maticí. Pomocí aditivního rozkladu (4.2.7) matice $\mathbf{A}$ to zapíšeme jako

$$(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

a po úpravě

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}.$$

Obecné rekurentní vzorce (4.2.3) proto popisují Gauss-Seidelovu metodu, když v nich položíme $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{GS}$ a $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{GS}$, kde

$$\mathbf{C}_{GS} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}, \quad \mathbf{d}_{GS} = (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}.$$

Kontrolní otázky

Otázka 1. Jak vypadá obecné schéma iteračního řešení soustav lineárních rovnic?

Otázka 2. Jak se provádí výpočet u Jacobiovy a Gauss-Seidelovy metody? Která z nich je rychlejší?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -12,\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 5,\\
x_1 + x_2 - 3x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

řešte pomocí Jacobiovy metody s přesností $\epsilon = 10^{-2}$.

2. V předchozí úloze použijte při řešení Gauss-Seidelovu metodu.

3. Upravte obecný algoritmus pro iterační řešení soustav lineárních rovnic tak, aby vyjadřoval Jacobiovu resp. Gauss-Seidelovu metodu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Rekurentní vzorce pro Jacobiovu metodu mají tvar

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}(-12 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}),\\
x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(5 - 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}),\\
x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(4 + x_1^{(k)} + x_2^{(k)}).
\end{aligned}$$

Při nulové počáteční aproximaci dojdeme na požadovanou přesnost v jedenácté iteraci; $x_1 = -2.9955 \pm 10^{-2}$, $x_2 = 2.0019 \pm 10^{-2}$, $x_3 = 1.0011 \pm 10^{-2}$.

2. Rekurentní vzorce pro Gauss-Seidelovu metodu mají tvar

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}(-12 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}),\\
x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{5}(5 - 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}),\\
x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{3}(4 + x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}).
\end{aligned}$$

Při nulové počáteční aproximaci dojdeme na požadovanou přesnost ve čtvrté iteraci; $x_1 = -2.9991 \pm 10^{-2}$, $x_2 = 1.9998 \pm 10^{-2}$, $x_3 = 1.0002 \pm 10^{-2}$.

3. Vstupní parametry $\mathbf{C}$ a $\mathbf{d}$ u původního algoritmu nahradíme za $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{b} = (b_i)$. Maticový výpočet nové iterace $\mathbf{x}^{(k+1)}$ zapíšeme rekurentními vzorci (4.2.5) resp. (4.2.9).

4.3. Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Cíle

Připomeneme, jak se definují a počítají vlastní čísla a vlastní vektory matic. Poznatky z tohoto odstavce jsou základem při posuzování konvergence iteračních metod.

Předpokládané znalosti

Výpočty determinantů, řešení algebraických rovnic, řešení soustav lineárních rovnic se singulární maticí, lineární závislost a nezávislost vektorů, ortogonalita vektorů, báze.

Výklad

Úlohu na vlastní čísla připomeneme na příkladu.

Příklad 4.3.1. Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.1}$$

Určete taková čísla λ, pro která má soustava lineárních rovnic $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ nenulové řešení a toto řešení vypočtěte.

Řešení: Soustavu přepíšeme do tvaru:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že jedním řešením je vždy nulový vektor. Nás však zajímají situace, kdy existuje ještě další řešení nenulové. V takovém případě ale musí být nulový determinant matice soustavy, takže pro číslo λ platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Dostali jsme algebraickou rovnici třetího stupně a pouze pro její tři kořeny $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1$ bude mít uvažovaná soustava nenulová řešení. Najdeme je ze tří soustav lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

tj.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vyřešením těchto soustav dostaneme

$$\mathbf{v}_1 = (0, r, r)^\top, \quad \mathbf{v}_2 = (s, -s, -2s)^\top, \quad \mathbf{v}_3 = (0, t, -t)^\top,$$

kde r, s a t jsou libovolná nenulová čísla. Vidíme, že každá soustava má nekonečně mnoho řešení. Konkrétní volbou r, s a t dostaneme například

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)^\top, \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, -2)^\top, \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)^\top.$$

Všimněme si ještě, že čísla λ_1, λ_2 a λ_3 jsou vzájemně různá a že vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$ jsou lineárně nezávislé.

Definice 4.3.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Číslo λ (obecně komplexní), pro které má soustava

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \text{resp.} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

nenulové řešení, se nazývá *vlastní číslo* matice $\mathbf{A}$ a jemu odpovídající nenulové řešení $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$ se nazývá *vlastní vektor* matice $\mathbf{A}$.

Je zřejmé, že číslo λ je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když je kořenem *charakteristického polynomu*

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Odtud plyne, že každá čtvercová matice řádu n má právě n vlastních čísel, pokud každé vlastní číslo počítáme tolikrát, kolik je násobnost kořene.

Poznámka

Vlastní čísla můžeme hledat jako řešení rovnice $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ metodami z kapitoly 2. Tento postup je však obtížný pro větší hodnoty n, protože je pracné vypočítat koeficienty charakteristického polynomu c_i.

Snadno lze určit vlastní čísla u horní trojúhelníkové matice $\mathbf{U} = (u_{ij})$, $u_{ij} = 0$ pro $i > j$. Jsou to všechny diagonální prvky u_{ii}, protože z definice determinantu plyne, že charakteristický polynom má tvar

$$p_{\mathbf{U}}(\lambda) = (u_{11} - \lambda)(u_{22} - \lambda)\ldots(u_{nn} - \lambda).$$

Stejné tvrzení platí samozřejmě i pro dolní trojúhelníkovou matici.

Při vyšetřování konvergence iteračních metod budeme využívat následující větu.

Věta 4.3.1.
Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, které odpovídá vlastnímu vektoru $\mathbf{v}$, c je dané reálné číslo a k je číslo přirozené. Potom $c\lambda^k$ je vlastní číslo matice $c\mathbf{A}^k$, které odpovídá vlastnímu vektoru $\mathbf{v}$.

Důkaz: Jestliže $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, potom $c\mathbf{A}^k\mathbf{v} = c\lambda\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v} = \ldots = c\lambda^k\mathbf{v}$. □

Nyní si všimneme vlastních vektorů. V úvodním příkladu jsme viděli, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé. Toto tvrzení platí obecně, takže matice řádu n, může mít (nejvýše) n lineárně nezávislých vektorů. Tyto vektory pak tvoří bázi v prostoru n-složkových aritmetických vektorů. Následující příklad ukazuje, že matice nemusí mít vždy plný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Příklad 4.3.2. Určete vlastní čísla a vlastní vektory pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Všechny matice jsou trojúhelníkové a mají stejný charakteristický polynom

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda) = p_{\mathbf{C}}(\lambda) = p_{\mathbf{D}}(\lambda) = (2-\lambda)^3.$$

Číslo $\lambda = 2$ je tedy (trojnásobným) vlastním číslem všech čtyř matic. Postupem z příkladu 4.3.1. zjistíme, že matice $\mathbf{A}$ má tři lineárně nezávislé vlastní vektory

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0)^\top, \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,0)^\top, \quad \mathbf{v}_3 = (0,0,1)^\top$$

(každá nenulová lineární kombinace těchto vektorů je také vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$). Pro matici $\mathbf{B}$ se podaří najít pouze dva lineárně nezávislé vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_3$. Matice $\mathbf{C}$ má opět dva vlastní vektory, nyní to jsou vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Konečně matice $\mathbf{D}$ má jediný vlastní vektor $\mathbf{v}_1$. □

V aplikacích se často vyskytují symetrické matice, pro něž platí následující tvrzení.

Věta 4.3.2.

Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická čtvercová matice, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Potom platí:

(i) všechna vlastní čísla jsou reálná;

(ii) vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální;

(iii) k-násobnému vlastnímu číslu odpovídá k lineárně nezávislých vlastních vektorů, které lze zvolit tak, aby byly ortogonální.

Poznámka

Z věty plyne, že pro symetrickou matici řádu n můžeme vždy najít n ortogonálních vlastních vektorů. Protože ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé, budou tvořit bázi v prostoru n-složkových aritmetických vektrů.

4.3.1. Výpočet vlastních čísel metodou LU-rozkladu

Ukážeme iterační metodu výpočtu vlastních čísel, která se v literatuře nazývá LR-algoritmus. Jejím základem jsou vlastnosti podobných matic.

Definice 4.3.2.

Dvě čtvercové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ řádu n se nazývají *podobné*, jestliže existuje regulární čtvercová matice $\mathbf{C}$ taková, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$.

Věta 4.3.3.

Podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Důkaz: Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ odpovídající vlastnímu vektoru $\mathbf{v}$, tj. platí $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Potom

$$\underbrace{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}}_{\mathbf{B}}\underbrace{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\underbrace{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{v}}}.$$

Odtud plyne, že λ je vlastní číslo matice $\mathbf{B}$ odpovídající vlastnímu vektoru $\tilde{\mathbf{v}}$. □

Metoda LU-rozkladu je založena na následujícím pozorování. Nechť $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ tvoří LU-rozklad matice $\mathbf{A}$ podle věty 3.3.1., tj. platí $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$. Definujme matici $\mathbf{A}_1 = \mathbf{U}\mathbf{L}$. Protože

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{U}\mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L},$$

vidíme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_1$ jsou podobné a mají proto stejná vlastní čísla. Analogicky můžeme k matici $\mathbf{A}_1$ vytvořit podobnou matici $\mathbf{A}_2$ atd. Dostaneme posloupnost podobných matic a budeme se zajímat o vlastní čísla limitní matice.

Algoritmus (Metoda LU-rozkladu)

Položíme $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ a pro $k = 1, 2, \ldots$ provedeme:

1) LU-rozklad matice $\mathbf{A}_{k-1}$, tj. určíme $\mathbf{L}_k$ a $\mathbf{U}_k$ tak, že $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$;

2) vypočítáme součin $\mathbf{A}_k := \mathbf{U}_k\mathbf{L}_k$.

Všimněme si posloupností $\{\mathbf{A}_k\}$ a $\{\mathbf{U}_k\}$. Lze dokázat, že za jistých předpokladů konvergují obě tyto posloupnosti ke stejné limitní matici $\mathbf{M}$; viz [1]. Tato matice je nutně horní trojúhelníková a má stejná vlastní čísla jako $\mathbf{A}$. Hledaná vlastní čísla proto určíme jako diagonální prvky matice $\mathbf{M}$.

Příklad 4.3.3. Pomocí metody LU-rozkladu vypočtětě vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

s přesností na dvě desetinná místa.

Řešení: Pro $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ určíme LU-rozklad

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.50 & 1 & 0 \\ 0 & -0.67 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 2.00 & -1.00 & 0 \\ 0 & 1.50 & -1.00 \\ 0 & 0 & 1.33 \end{pmatrix}$$

a vynásobením dostaneme

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{U}_0\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} 2.50 & -1.00 & 0 \\ -0.75 & 2.17 & -1.00 \\ 0 & -0.89 & 1.33 \end{pmatrix}.$$

Podobně pro $\mathbf{A}_1$ vypočítáme LU-rozklad

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.30 & 1 & 0 \\ 0 & -0.48 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 2.50 & -1.00 & 0 \\ 0 & 1.87 & -1.00 \\ 0 & 0 & 0.86 \end{pmatrix}$$

a opět vynásobením dostaneme

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 2.80 & -1.00 & 0 \\ -0.56 & 2.34 & -1.00 \\ 0 & -0.41 & 0.86 \end{pmatrix}.$$

Čísla pod diagonálou u matic $\mathbf{A}_k$ se začínají přibližovat k nule, což ukazuje na tendenci ke konvergenci. Jestliže takto pokračujeme dále, dostaneme

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 3.41 & -1.00 & 0 \\ 0.00 & 2.00 & -1.00 \\ 0 & 0.00 & 0.58 \end{pmatrix} \approx \mathbf{M}$$

a v dalších iteracích se již čísla na diagonále (na prvních dvou desetinných místech) nemění. Přibližné hodnoty vlastních čísel jsou $\lambda_1 \doteq 3.41$, $\lambda_2 \doteq 2.00$ a $\lambda_1 \doteq 0.58$.

Kontrolní otázky

Otázka 1. Jak se definují vlastní čísla a vlastní vektory matic?

Otázka 2. Kolik vlastních čísel a vlastních vektorů má matice řádu n?

Otázka 3. Na jaké vlastnosti je založena metoda LU-rozkladu?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Pomocí charakteristického polynomu vypočtěte vlastní čísla matice (4.3.2). Vypočtěte také vlastní vektory.

2. Metodou LU-rozkladu vypočtětě vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

s přesností na čtyři desetinná místa.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4$, $\lambda_1 = 3.414214$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0.585786$. Vlastní vektory jsou například $\mathbf{v}_1 = (-1, \sqrt{2}, -1)^\top$, $\mathbf{v}_2 = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^\top$, $\mathbf{v}_3 = (1, \sqrt{2}, 1)^\top$.

2. Vlastní čísla s požadovanou přesností jsou na diagonále matice $\mathbf{A}_{20}$; $\lambda_1 \doteq 3.7320$, $\lambda_2 \doteq 2.0000$, $\lambda_3 \doteq 0.2679$.

4.4. Konvergence iteračních metod

Cíle

Odvodíme podmínky, které zaručují konvergenci iteračních metod.

Předpokládané znalosti

Iterační řešení soustav lineárních rovnic. Vlastní čísla a vlastní vektory.

Výklad

Připomeňme, že při iteračním řešení převádíme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ na (ekvivalentní) soustavu v iteračním tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d}. \tag{4.4.1}$$

K řešení se potom přibližujeme pomocí posloupnosti $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, kterou počítáme podle rekurentního vzorce

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Cx}^{(k)} + \mathbf{d}. \tag{4.4.2}$$

Jestliže odečteme (4.4.1) a (4.4.2) a označíme přitom $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$, dostaneme

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{Ce}^{(k)}.$$

Tímto vzorcem se řídí *iterační chyba* $\mathbf{e}^{(k)}$. Jeho opakovaným použitím dostaneme $\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{Ce}^{(k)} = \mathbf{C}^2\mathbf{e}^{(k-1)} = \ldots = \mathbf{C}^{k+1}\mathbf{e}^{(0)}$. Proto

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{C}^k\mathbf{e}^{(0)}, \tag{4.4.3}$$

kde $\mathbf{e}^{(0)}$ je *počáteční chyba*, která je určena volbou počáteční aproximace $\mathbf{x}^{(0)}$.

Je zřejmé, že iterační výpočet bude konvergovat, jestliže $\lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{0}$, tj. když se iterační chyba blíží k nulovému vektoru. Tuto limitu budeme vyšetřovat pomocí vzorce (4.4.3). Budeme přitom předpokládat, že iterační matice $\mathbf{C}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, kterým odpovídají vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, které tvoří bázi. Připomeňme, že taková situace nastane podle věty 4.3.2. a následné poznámky například v případě, kdy je $\mathbf{C}$ symetrická matice. Vektor $\mathbf{e}^{(0)}$ pak můžeme zapsat jako lineární kombinaci vlastních vektorů, tj. existují konstanty $c_1, \ldots, c_n$, pro něž platí

$$\mathbf{e}^{(0)} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n. \tag{4.4.4}$$

Jestliže dosadíme (4.4.4) do (4.4.3) dostaneme s pomocí věty 4.3.1. vztah

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(k)} &= c_1\mathbf{C}^k\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{C}^k\mathbf{v}_n \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Odtud je vidět, že

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{0} \iff \lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Uvedené limity budou nulové, právě když $|\lambda_i| < 1$ pro $i = 1, \ldots, n$. Dokázali jsme následující tvrzení:

Věta 4.4.1.
Nechť $\mathbf{C}$ je iterační matice, která má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Iterační metoda daná vzorcem (4.4.2) konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{C}$ jsou v absolutní hodnotě menší než jedna.

Příklad 4.4.1. Určete vlastní čísla iteračních matic $\mathbf{C}_J$ a $\mathbf{C}_B$ z odstavce 4.1. a porovnejte průběhy iteračních výpočtů s tvrzením poslední věty.

Řešení: Z charakteristického polynomu $p_{\mathbf{C}_J}(\lambda) = \lambda^3 + \frac{7}{88}\lambda - \frac{1}{80}$ určíme vlastní čísla matice $\mathbf{C}_J$: $\lambda_1 \doteq 0.1297$, $\lambda_2 \doteq -0.0649 + i0.3036$, $\lambda_3 \doteq -0.0649 - i0.3036$. Z absolutních hodnot $|\lambda_1| = \lambda_1$, $|\lambda_2| = |\lambda_3| \doteq 0.3104$ vidíme, že iterační výpočet musí být konvergentní, což je v souladu s naším pozorováním z odstavce 4.1.

Podobně z charakteristického polynomu $p_{\mathbf{C}_B}(\lambda) = \lambda^3 + 26\lambda^2 + 229\lambda + 683$ určíme vlastní čísla matice $\mathbf{C}_B$. Stačí si povšimnout, že jedno z vlastních čísel je $\lambda_1 \doteq -8.7373$. Protože $|\lambda_1| > 1$, nemůže iterační výpočet (obecně) konvergovat, což je rovněž v souladu s pozorováním z odstavce 4.1.

Viděli jsme, že o konvergenci iterační metody lze rozhodnout na základě vlastních čísel. Výpočet vlastních čísel je však zpravidla složitější než řešení soustavy lineárních rovnic. V další větě proto ukážeme jednodušší, i když slabší konvergenční podmínku.

Věta 4.4.2.
Nechť $\mathbf{C}$ je iterační matice, která má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Iterační metoda daná vzorcem (4.4.2) konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$, jestliže pro některou normu platí $\|\mathbf{C}\| < 1$.

Důkaz: Nechť $\|\mathbf{C}\| < 1$ a nechť λ je libovolné vlastní číslo matice $\mathbf{C}$ odpovídající vlastnímu vektrou $\mathbf{v}$, tj. $\mathbf{C}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Protože $|\lambda|\|\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = \|\mathbf{C}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{C}\|\|\mathbf{v}\|$, platí $|\lambda| \leq \|\mathbf{C}\| < 1$, takže všechna vlastní čísla matice $\mathbf{C}$ jsou v absolutní hodnotě menší než jedna. Iterační metoda proto konverguje podle věty 4.4.1. □

U Jacobiovy a Gauss-Seidelovy metody lze konvergenční podmínku z poslední věty formulovat pomocí matice soustavy $\mathbf{A}$. Používá se přitom terminologie z následující definice.

Definice 4.4.1.
Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n je *ostře diagonálně dominantí*, jestliže platí

$$|a_{i1}| + \ldots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \ldots + |a_{in}| < |a_{ii}| \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (4.4.6)$$

Příklad 4.4.2. Rozhodněte, která z následujících matic je ostře diagonálně dominantní:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice $\mathbf{A}$ je ostře diagonálně dominantní, protože platí $2+1 < 11$, $1+2 < 10$ a $2+3 < 8$. Matice $\mathbf{B}$ není ostře diagonálně dominantní, protože ve druhém řádku je $2+3 > 1$.

Věta 4.4.3.

Nechť $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je daná soustava lineárních rovnic. Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$, jestliže matice $\mathbf{A}$ je ostře diagonálně dominantí.

Důkaz: Nechť $\mathbf{A}$ je ostře diagonálně dominantní. Podmímku (4.4.6) může přepsat do tvaru

$$\frac{|a_{i1}|}{|a_{ii}|} + \ldots + \frac{|a_{ii-1}|}{|a_{ii}|} + \frac{|a_{ii+1}|}{|a_{ii}|} + \ldots + \frac{|a_{in}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pro iterační matici Jacobiovy metody $\mathbf{C}_J$ (viz (4.2.6)) to znamená, že součet absolutních hodnot prvků v každém řádku je menší než jedna. V řádkové normě proto platí $\|\mathbf{C}_J\|_R < 1$ a konvergence Jacobiovy metody plyne z věty 4.4.2. $\square$

Poznámka

Také Gauss-Seidelova metoda konverguje, je-li matice soustavy ostře diagonálně dominantí. Důkaz je však o něco složitější; viz [1].

Poznámka

Konvergenci Jacobiovy i Gauss-Seidelovy metody zajistíme tak, že řešenou soustavu předem upravíme na ekvivalentní soustavu s ostře diagonálně dominantní maticí.

Příklad 4.4.3. Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -8x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

upravte na tvar s ostře diagonálně dominantní maticí.

Řešení: Úpravy, které nemění řešení, jsou tři: záměna pořadí rovnic, vynásobení rovnice nenulovým číslem a přičtení nenulového násobku rovnice k jiné rovnici. V našem případě stačí přičíst třetí rovnici k rovnici druhé:

$$\begin{aligned} -8x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 2x_2 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12. \end{aligned}$$

Provedeme-li výpočet Jacobiovy nebo Gauss-Seidelovy metody pro tuto soustavu, budeme mít zaručenu konvergenci.

Kontrolní otázky

Otázka 1. Jaké podmínky zaručují konvergenci obecné iterační metody?

Otázka 2. Jak lze zajistit konvergenci u Jacobiovy a Gauss-Seidelovy metody?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 &= 6,\\
x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6,\\
6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 18
\end{aligned}
$$

upravte na tvar s ostře diagonálně dominantní maticí.

2. Napište iterační matici pro Jacobiovu metodu a vypočtěte její vlastní čísla.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Od třetí rovnice odečteme rovnici první i druhou. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 &= 6,\\
x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6,\\
x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

2. Iterační matice má tvar:

$$
\mathbf{C}_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Z charakteristického polynomu $p_{\mathbf{C}_J}(\lambda) = \lambda^3 - \frac{3}{16}\lambda + \frac{1}{32}$ určíme kořeny $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$.

Shrnutí lekce

Ukázali jsme iterační způsob řešení soustav lineárních rovnic a odvodili jsem podmínky, které zaručují konvergenci.