Jak se počítá inverzní matice?

Radek Kučera

Říjen 2015

Jak se počítá inverzní matice?

- k čemu inverzní matici potřebujeme?
- k čemu potřebujeme matici?
- lineární zobrazení (operátor) mezi prostory konečné dimenze

$$\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

- zápis úlohy:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

- máme vypočítat buď $\boldsymbol{b}$ nebo $\boldsymbol{x}$
- potřebujeme inverzní zobrazení:

$$\boldsymbol{A}^{-1} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

- pro vyjádření řešení:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Jak se počítá inverzní matice?

- A^{-1} pomocí adjungované matice, tj. pomocí determinantů
- $\underline{n = 20:}$

$$
\begin{aligned}
(n^2(n-1)! + n!) \times T &\approx (n+1)! \times T \\
&\approx 5.1 \cdot 10^{19} \times 10^{-9} \\
&\approx 14\,191\,928 \text{ hodin} \\
&\approx 1\,625 \text{ let} \\
& \text{(Theodosius a Valentinianus)}
\end{aligned}
$$

- $\underline{n = 100:}$

$$
\begin{aligned}
(n^2(n-1)! + n!) \times T &\approx 3 \cdot 10^{143} \text{ let} \\
& \text{(velký třesk před } 13.8 \cdot 10^9 \text{ let)}
\end{aligned}
$$

Jak se počítá inverzní matice?

- Pomocí definice: $\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(n)}) = (\boldsymbol{e}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{e}^{(n)})}$$

- $\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(i)}}$, což je n lineárních soustav pro $i = 1, \dots, n$
- použijeme GEM
- $\underline{n = 20:}$

$$n \times \frac{2}{3} n^3 \times T \quad \approx \quad 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ sekundy}$$

- $\underline{n = 1000:}$ $\approx$ 11 minut
- $\underline{n = 10000:}$ $\approx$ 77 dnů

(semestr má 70 dnů)

Jak se počítá inverzní matice?

Nepočítá se

- $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ se řeší pomocí GEM
- $n = 20$:

$$\frac{2}{3}n^3 \times T \quad \approx \quad 5.3 \cdot 10^{-6} \text{ sekundy}$$

- $n = 1000$: $\approx$ 0.7 sekundy
- $n = 10000$: $\approx$ 11 minut

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ Akce inverze!

Například: $\boxed{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}}$ $\quad \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_2$