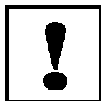


2.3. Metoda per partes pro určité integrály



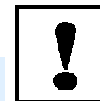
Cíle

Seznámíte se s použitím metody per partes při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat jsou stejné, jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.3.



Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip metody per partes a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.



Výklad

Při výpočtu složitějších integrálů používáme i u určitých integrálů metodu per partes a substituční metodu.

Při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí můžeme postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšimáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U metody per partes průběžně dosazujeme meze do již vypočtené části primitivní funkce, u substituční metody změňme integrační meze, jak uvidíme v další kapitole.

V dalším se zaměříme na druhou možnost výpočtu.

Věta 2.3.1.

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, pak platí

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx.$$

Důkaz:

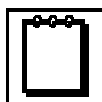
Ze spojitosti derivací $u'(x)$ a $v'(x)$ plyne, že jsou spojité i funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom budou spojité a tedy integrovatelné i součiny $u'(x) \cdot v(x)$ a $u(x) \cdot v'(x)$.

Podle věty 2.2.2 bude integrovatelná i funkce $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. K ní primitivní funkce je $u(x) \cdot v(x)$, protože $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Podle Newtonovy –

Leibnizovy formule platí $\int_a^b [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b$. Pomocí věty 2.2.2

dostaneme $\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b$ a po úpravě obdržíme tvrzení

věty.

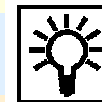


Poznámka

Praktické použití metody per partes je zcela analogické jako v případě neurčitěho integrálu (kap. 1.3). Zejména platí návody, pro které funkce je metoda per partes vhodná.



Řešené úlohy



Příklad 2.3.1. Vypočtěte integrál $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$

Řešení:

Předvedeme první způsob výpočtu, kdy nejprve nalezneme primitivní funkci a teprve potom dosadíme meze:

$$\int x^2 \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u' = \sin x \quad v = x^2 \\ u = -\cos x \quad v' = 2x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u' = \cos x \quad v = 2x \\ u = \sin x \quad v' = 2 \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Použijeme jednu z primitivních funkcí pro $C = 0$ a dostaneme

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} = (-\pi^2(-1) + 0 + 2(-1)) - (0 + 0 + 2) =$$

$$= \pi^2 - 4.$$

Při druhém způsobu výpočtu použijeme větu 2.3.1:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u' = \sin x \quad v = x^2 \\ u = -\cos x \quad v' = 2x \end{array} \right| = \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u' = \cos x \quad v = 2x \\ u = \sin x \quad v' = 2 \end{array} \right| = (\pi^2 - 0) + [2x \sin x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi \sin x \, dx = \pi^2 + (0 - 0) + 2[\cos x]_0^\pi = \\ = \pi^2 + 2(-1 - 1) = \pi^2 - 4.$$

Výhoda druhého způsobu spočívá v tom, že meze průběžně dosazujeme do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední. V dalších příkladech budeme používat tento způsob výpočtu.

Příklad 2.3.2. Vypočtěte integrál $\int_0^2 (x^2 - x)e^x \, dx$.

Řešení:

$$\int_0^2 (x^2 - x)e^x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \quad v = x^2 - x \\ u = e^x \quad v' = 2x - 1 \end{array} \right| = [(x^2 - x)e^x]_0^2 - \int_0^2 (2x - 1)e^x \, dx = \\ = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \quad v = 2x - 1 \\ u = e^x \quad v' = 2 \end{array} \right| = [(4 - 2)e^2 - 0] - [(2x - 1)e^x]_0^2 + \int_0^2 2e^x \, dx = \\ = 2e^2 - [3e^2 + e^0] + 2[e^x]_0^2 = -e^2 - 1 + 2(e^2 - e^0) = e^2 - 3.$$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte integrál $\int_1^e \ln x \, dx$.

Řešení:

$$\int_1^e \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = \ln x \\ u = x \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx = (e \ln e - \ln 1) - [x]_1^e = \\ = (e - 0) - (e - 1) = 1.$$

Příklad 2.3.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = x \quad v = \operatorname{arctg} x \\ u = \frac{x^2}{2} \quad v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \arctg x]_0^1 = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 2.3.5. Nalezněte rekurentní formuli pro výpočet integrálu

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Řešení:

$$\text{Pro } n=0 \text{ je } S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \text{ a pro } n=1 \text{ je } S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Pro $n \geq 2$ metodou per partes dostaneme:

$$\begin{aligned}
S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \left. \begin{array}{l} u' = \sin x \quad v = (\sin x)^{n-1} \\ u = -\cos x \quad v' = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x \end{array} \right| = \left[-\cos x (\sin x)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx = [0 - 0] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)(\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx = \\
&= (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \right) = (n-1)(S_{n-2} - S_n).
\end{aligned}$$

Z rovnice $S_n = (n-1)(S_{n-2} - S_n)$ snadno dostaneme

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \quad (n \geq 2). \text{ Tato rekurentní formule nám umožní vypočítat uvedený}$$

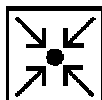
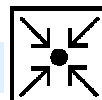
integrál pro libovolnou mocninu $n \geq 2$. Například:

$$S_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 dx = \frac{3-1}{3} S_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3},$$

$$S_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^4 dx = \frac{4-1}{4} S_2 = \frac{3}{4} \frac{2-1}{2} S_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}.$$

**Kontrolní otázky**

1. Proč je integrační metoda nazývána per partes?
2. Jak se liší výpočet určitého integrálu metodou per partes od použití této metody v neurčitém integrálu.
3. Jak by se podle věty 2.3.1 vypočítal integrál typu $\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_1^e x^3 \ln x dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_e^{2e} \ln^2 x dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x dx$?
8. Vypočtěte integrál $\int_0^1 x e^{-x} dx$.
9. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-1) \sin x dx$.
10. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet integrálu $L_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln x)^n dx$.

**Úlohy k samostatnému řešení**

1. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$ b) $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$ c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$
- d) $\int_0^1 x e^{3x} dx$ e) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$ f) $\int_0^1 (x^2 + 2x) e^{\frac{x}{3}} dx$

2. a) $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$ b) $\int_1^2 (3x+2) \ln x \, dx$ c) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$
 d) $\int_0^1 4x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$ e) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x \, dx$ f) $\int_1^e x \ln^2 x \, dx$
3. a) $\int_1^{e^3} \ln x \, dx$ b) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$ c) $\int_1^e \ln^2 x \, dx$
 d) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x \, dx$ e) $\int_{-1}^1 \ln(x+2) \, dx$ f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x \, dx$
4. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$ b) $\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) \, dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx$
 d) $\int_{e^{-\pi}}^{e^\pi} \sin(\ln x) \, dx$ e) $\int_0^\pi e^{-x} \sin^2 x \, dx$ f) $\int_{-\pi}^\pi e^x \cos x \, dx$
5. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin^2 x} \, dx$ b) $\int_1^e \ln^3 x \, dx$ c) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} \, dx$



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$; c) $\pi^2 - 4$; d) $\frac{2}{9}e^3$; e) -2π ; f) $27\sqrt[3]{e} - 36$. 2. a) $\frac{1}{16}(3e^4 + 1)$;
 b) $10 \ln 2 - \frac{17}{4}$; c) $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{4}{9}(2e^3 + 1)$; f) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$. 3. a) $2e^3 + 1$;
 b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$; c) $e - 2$; d) $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2}$; e) $3 \ln 3 - 2$; f) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$. 4. a) $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right)$;
 b) $-\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$; c) $\frac{1}{5}(2e^\pi + 1)$; d) $\frac{1}{2}(e^\pi + e^{-\pi})$; e) $\frac{3}{5}(e^{-\pi} - 1)$; f) $-\frac{1}{2}(e^\pi + e^{-\pi})$.
 5. a) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$; b) $6 - 2e$; c) $\frac{e}{2} - 1$.



Kontrolní test



1. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x \, dx$.
- a) $\frac{\pi}{2}$, b) 1, c) 0, d) π .
2. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^0 x^2 e^{-x} \, dx$.
- a) $2+e$, b) $-2-e$, c) $-2+e$, d) -2 .
3. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx$.
- a) $\frac{1}{4}(\pi-1)$, b) $\frac{1}{4}(\pi+1)$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{1}{4}$.
4. Čemu se rovná integrál $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx$?
- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$, b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \ln 2$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{1}{2}\ln 4$, d) $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\ln 4$.
5. Čemu se rovná integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$?
- a) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3} - \ln 2$, b) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2$, c) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \ln 2$, d) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln \sqrt{3}$.
6. Čemu se rovná integrál $\int_0^{e-1} \ln(x+1) \, dx$?
- a) 1, b) $e+1$, c) $1-e$, d) $2e+1$.
7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^1 \ln(x^2+1) \, dx$.
- a) 0, b) $2\ln 2 - 4 + \pi$, c) $2\ln 2 + \pi$, d) $-2 + \frac{\pi}{2}$.

8. Vypočtete integrál $\int_{-1}^0 x \operatorname{arccotg} x \, dx$.

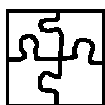
- a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}(1+\pi)$, c) $\frac{1}{2}(1-\pi)$, d) $-\frac{\pi}{2}$.

9. Vypočtete integrál $\int_{\frac{1}{e}}^e x^2 \ln x \, dx$.

- a) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{1}{e^3})$, b) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{1}{e^3})$, c) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{2}{e^3})$, d) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{2}{e^3})$.

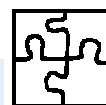
10. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $S_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, n = 0, 1, 2, \dots$.

- a) $S_0 = \pi, S_1 = 0, S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$, b) $S_0 = \pi, S_1 = 2, S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$,
 c) $S_0 = \pi, S_1 = 2, S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$, d) $S_0 = \pi, S_1 = 2, S_n = \frac{1}{1-n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$.



Výsledky testu

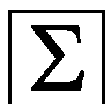
1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).



Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.3 a 2.3 znovu.



Shrnutí lekce

Použití metody per partes v určitém integrálu je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu. Typy integrálů řešitelných metodou per partes jsou uvedeny v kapitole 1.3. Při výpočtu určitých integrálů metodou per partes průběžně dosazujeme meze do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední.

