Téma 9
Prostorová soustava sil

- Prostorový svazek sil
- Statický moment síly a dvojice sil v prostoru
- Obecná prostorová soustava sil
- Prostorová soustava rovnoběžných sil

FAST
Katedra stavební mechaniky
Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava

Zadání síly prostorového svazku sil

Tři nebo více sil (obecně n) působí v prostoru o společném působišti, paprsky sil neleží v téže rovině.

Síla u prostorového svazku sil je určena (působiště je dáno):

a) prostřednictvím složek P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} – kladné při shodě jejich smyslů s kladnými smysly souřadnicových os

b) kladnou velikostí P_i a třemi směrovými úhly α_i, β_i, γ_i (mezi kladným polopaprskem síly a odpovídající kladnou souřadnicovou poloosou)

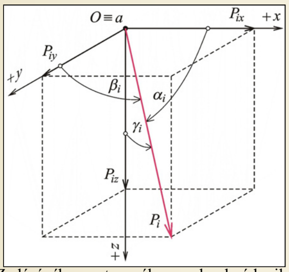
Platí:

a) $\alpha_i \le 180^\circ$ $\beta_i \le 180^\circ$ $\gamma_i \le 180^\circ$

b) $\alpha_i + \beta_i \ge 90^\circ$ $\beta_i + \gamma_i \ge 90^\circ$ $\alpha_i + \gamma_i \ge 90^\circ$

c) $|\alpha_i - \beta_i| \le 90^\circ$ $|\beta_i - \gamma_i| \le 90^\circ$ $|\alpha_i - \gamma_i| \le 90^\circ$

d) $\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$



Zadání síly prostorového svazku, kvádr sil
Obr. 3.1. / str. 25

Pravidlo o kvádru sil

V rovině axiom o rovnoběžníku sil, v prostoru obdoba – **pravidlo o rovnoběžnostěnu sil**.

Pokud jsou tři skládané síly kolmé a rovnoběžné se souřadnicovými osami – **kvádr sil**.

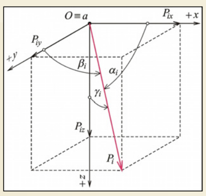
Pravidlo o kvádru sil:
Výslednice tří osových složek síly o společném působišti je jednoznačně určena tělesovou úhlopříčkou kvádru sil.

Platí:

$$P_i = \sqrt{P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + P_{iz}^2}$$

$$\cos\alpha_i = \frac{P_{ix}}{P_i} \quad \cos\beta_i = \frac{P_{iy}}{P_i} \quad \cos\gamma_i = \frac{P_{iz}}{P_i}$$

$$P_{ix} = P_i.\cos\alpha_i \quad P_{iy} = P_i.\cos\beta_i \quad P_{iz} = P_i.\cos\gamma_i$$



Zadání síly prostorového svazku, kvádr sil
Obr. 3.1. / str. 25

Výslednice prostorového svazku sil

Postup určení výslednice R prostorového svazku n sil:

a) určit (pokud není zadáno) složky P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} každé ze sil P_i

$P_{ix} = P_i.\cos\alpha_i$ $P_{iy} = P_i.\cos\beta_i$ $P_{iz} = P_i.\cos\gamma_i$

b) vypočítat výslednice tří přímkových soustav sil v souřadnicových osách

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}$$

c) určit velikost výslednice R prostorového svazku sil a její směrové kosiny (úhly)

$$P_i = \sqrt{P_{ix}^2 + P_{iy}^2 + P_{iz}^2} \qquad \cos\alpha_i = \frac{P_{ix}}{P_i} \qquad \cos\beta_i = \frac{P_{iy}}{P_i} \qquad \cos\gamma_i = \frac{P_{iz}}{P_i}$$

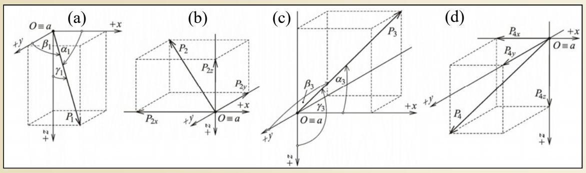
d) za působiště výslednice R je považováno většinou společné působiště a svazku sil, může mít i povahu volného vektoru

Příklad 11.1

Určení výslednice R prostorového svazku čtyř sil

Zadání sil P_1, P_2, P_3, P_4 **:**

i	P_i [kN]	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	P_{ix} [kN]	P_{iy} [kN]	P_{iz} [kN]
1	38	58	72	37,838			
2					-30,000	-16,000	-20,000
3	45	52	108	136,46			
4					-20,000	22,000	26,000



Zadání příkladu 11.1
Obr. 3.2.1. / str. 26

Příklad 11.1

Tabulkový výpočet:

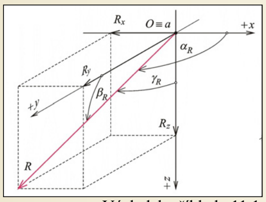
i	cos α_i	cos β_i	cos γ_i	P_{ix} [kN]	P_{iy} [kN]	P_{iz} [kN]
1	0,5299	0,3090	0,7897	20,137	11,743	30,010
2				-30,000	-16,000	-20,000
3	0,6157	-0,3090	-0,7249	27,705	-13,906	-32,620
4				-20,000	22,000	26,000
			Σ	**-2,158**	**3,837**	**3,390**

$$R = \sqrt{(-2{,}158)^2 + (3{,}837)^2 + (3{,}390)^2} = 5{,}556\,\text{kN}$$

$$\cos\alpha_R = \frac{-2{,}158}{5{,}556} = -0{,}3884 \quad \rightarrow \quad \alpha_R = 112{,}86^\circ$$

$$\cos\beta_R = \frac{3{,}837}{5{,}556} = 0{,}6905 \quad \rightarrow \quad \beta_R = 46{,}33^\circ$$

$$\cos\gamma_R = \frac{3{,}390}{5{,}556} = 0{,}6101 \quad \rightarrow \quad \gamma_R = 52{,}40^\circ$$



Výsledek příkladu 11.1
Obr. 3.2. / str. 26

Podmínky rovnováhy prostorového svazku sil

Rovnováha prostorového svazku sil - výslednice R je rovna nule:

$R = 0$

Platí v případě:

$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$ $\quad$ $R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$ $\quad$ $R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$

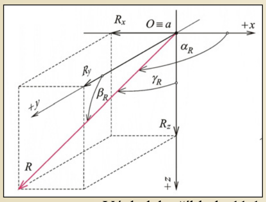
Podmínky rovnováhy prostorového svazku sil

Příklad 11.2

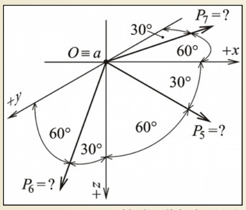
Určení velikosti tří sil P_5, P_6 a P_7, kterými se prostorový svazek sil z příkladu 3.1 doplní. Požadavek – **rovnovážný stav**.

Zadáno:

i	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$
5	30	90	60	0,8660	0,0000	0,5000
6	90	60	30	0,0000	0,5000	0,8660
7	60	150	90	0,5000	-0,8660	0,0000



Výsledek příkladu 11.1
Obr. 3.2. / str. 26



Zadání příkladu 11.2
Obr. 3.3. / str. 27

Příklad 11.2

Podmínky rovnováhy prostorového svazku sil

osa x : $P_5.\cos\alpha_5 + P_6.\cos\alpha_6 + P_7.\cos\alpha_7 + R_x = 0$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$

osa y : $P_5.\cos\beta_5 + P_6.\cos\beta_6 + P_7.\cos\beta_7 + R_y = 0$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$

osa z : $P_5.\cos\gamma_5 + P_6.\cos\gamma_6 + P_7.\cos\gamma_7 + R_z = 0$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$

Maticový zápis

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_5 & \cos\alpha_6 & \cos\alpha_7 \\ \cos\beta_5 & \cos\beta_6 & \cos\beta_7 \\ \cos\gamma_5 & \cos\gamma_6 & \cos\gamma_7 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_x \\ -R_y \\ -R_z \end{Bmatrix}$$

Obecně $[A].\{x\} = \{b\}$

Podmínka: $\det[A] \neq 0$

Číselné řešení

Matice $[A]$

0,8660	0,0000	0,5000
0,0000	0,5000	-0,8660
0,5000	0,8660	0,0000

Vektor $\{b\}$

2,158
-3,837
-3,390

Řešení - vektor $\{x\}$
kořeny soustavy

P_5 [kN] =	1,534
P_6 [kN] =	-4,801
P_7 [kN] =	1,659

← záporná hodnota, nutno upravit směrové úhly

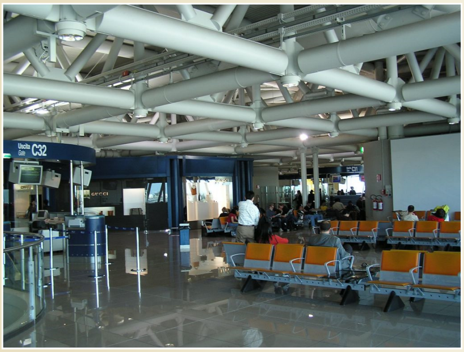
Příklad 11.2

Kontrola:

i	P_i [kN]	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	P_{ix} [kN]	P_{iy} [kN]	P_{iz} [kN]
1	38	58	72	37,838			
2					-30,000	-16,000	-20,000
3	45	52	108	136,46			
4					-20,000	22,000	26,000
5	1,534	30	90	60			
6	4,801	90	120	150			
7	1,659	60	150	90			

i	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	P_{ix} [kN]	P_{iy} [kN]	P_{iz} [kN]
1	0,5299	0,3090	0,7897	20,137	11,743	30,010
2				-30,000	-16,000	-20,000
3	0,6157	-0,3090	-0,7249	27,705	-13,906	-32,620
4				-20,000	22,000	26,000
5	0,8660	0,0000	0,5000	1,329	0,000	0,767
6	0,0000	-0,5000	-0,8660	0,000	-2,400	-4,157
7	0,5000	-0,8660	0,0000	0,829	-1,437	0,000
Prostorový svazek sil je v rovnováze $\rightarrow$			Σ	**0,000**	**0,000**	**0,000**

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

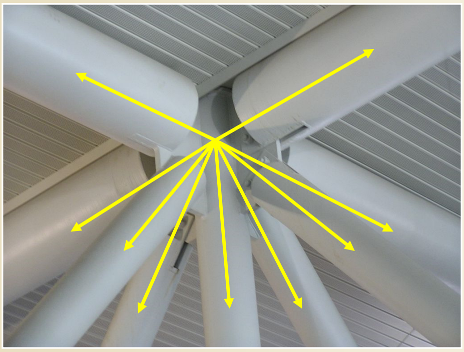


Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil



Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová konstrukce letištní haly v Římě, foto: prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Koncertní a přednášková hala pro 500 lidí „Sibelius Hall“, Lahti, Finsko, nosná konstrukce vstupní haly z lepeného lamelového dřeva ve tvaru stromů, foto: prof. Ing. Antonín Lokaj, Ph.D.

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Koncertní a přednášková hala pro 500 lidí „Sibelius Hall“, Lahti, Finsko, nosná konstrukce vstupní haly z lepeného lamelového dřeva ve tvaru stromů, foto: prof. Ing. Antonín Lokaj, Ph.D.

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Koncertní a přednášková hala pro 500 lidí „Sibelius Hall“, Lahti, Finsko, nosná konstrukce vstupní haly z lepeného lamelového dřeva ve tvaru stromů, foto: prof. Ing. Antonín Lokaj, Ph.D.

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Koncertní a přednášková hala pro 500 lidí „Sibelius Hall“, Lahti, Finsko, nosná konstrukce vstupní haly z lepeného lamelového dřeva ve tvaru stromů, foto: prof. Ing. Antonín Lokaj, Ph.D.

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Petřínská rozhledna, Praha

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Petřínská rozhledna, Praha

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová ocelová konstrukce plaveckého stadiónu v Brně,
autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová ocelová konstrukce plaveckého stadiónu v Brně,
autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

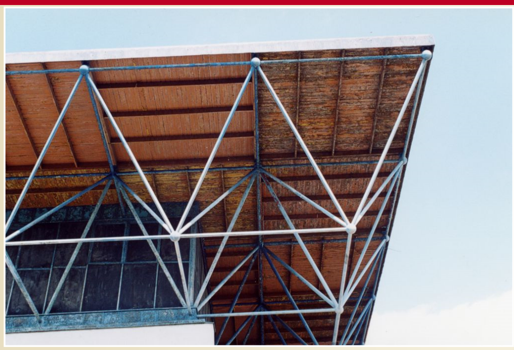
Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová ocelová konstrukce plaveckého stadiónu v Brně,
autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová ocelová konstrukce bývalého zimního stadiónu v Brně,
autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil



Prostorová příhradová ocelová konstrukce bývalého zimního stadiónu v Brně,
autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

Ukázka využití poznatků o prostorovém svazku sil

Prostorová příhradová ocelová konstrukce bývalého zimního stadiónu v Brně,
autor nosné konstrukce: Ing. Dr. Ferdinand Lederer

Statický moment síly k bodu v prostoru

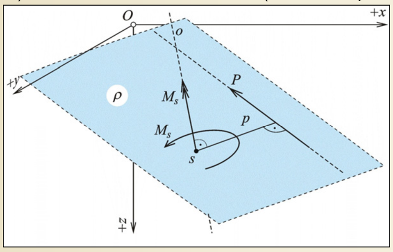
Rovina ρ – proložena paprskem síly P a momentovým středem s , je libovolně skloněna vůči souřadnicovým osám.

Pro statický moment síly k bodu s v rovině ρ platí pravidla pro rovinnou úlohu (poučky, znázornění), kromě znaménkové konvence (individuální pro každou úlohu).

Platí: $|M_s| = |P.p|$

Značení pomocí momentového vektoru, jehož paprsek o a paprsek síly tvoří **pravoúhlé mimoběžné přímky**.

Matematický popis obtížný, vhodnější pojem **statického momentu síly k ose** o.



Statický moment síly k bodu v prostoru
Obr. 3.4. / str. 29

Statický moment síly k ose

Statický moment M_o síly P k ose o, která je kolmá a přitom mimoběžná vzhledem k paprsku síly, má absolutní hodnotu dánu vzorcem: $|M_o| = |P.p|$ kde p je nejkratší délka příčky obou mimoběžných přímek.

Matematický popis stále obtížný, proto se statický moment určuje pomocí **osových složek sil**, vztažených k **souřadnicovým osám**.

Úmluva **proti-proti**, vzdálenosti p dány souřadnicemi.

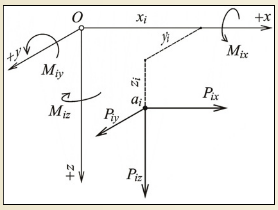
Řešení:

$$M_{ix} = -P_{iy}.z_i + P_{iz}.y_i$$

$$M_{iy} = P_{ix}.z_i - P_{iz}.x_i$$

$$M_{iz} = -P_{ix}.y_i + P_{iy}.x_i$$

(každá složka síly vyvozuje statický moment pouze ke dvěma osám, nemá vliv na statický moment k ose rovnoběžné)



Statické momenty osových složek síly k souřadnicovým osám
Obr. 3.5. / str. 29

Příklad 11.3

Zadáno: souřadnice působiště a_i, složky síly P_{ix} a P_{iz}

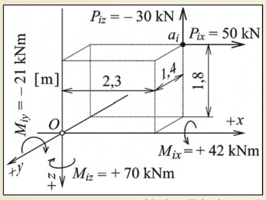
Předmět výpočtu: statické momenty M_{ix}, M_{iy} a M_{iz} k souřadnicovým osám

Řešení:

$$M_{ix} = P_{iz}.y_i = (-30).(-1{,}4) = +42\text{kNm}$$

$$M_{iy} = P_{ix}.z_i - P_{iz}.x_i = \\ = 50.(-1{,}8) - (-30).2{,}3 = -21\text{kNm}$$

$$M_{iz} = -P_{ix}.y_i = -50.(-1{,}4) = +70\text{kNm}$$



Zadání příkladu 11.3
Obr. 3.6. / str. 30

Dvojice sil v prostoru

Definována stejně jako u rovinné úlohy. Působí však v rovině ρ, která je k souřadnicovým osám libovolně nakloněna.

Statický moment dvojice sil v prostoru: $|M| = |P.p|$

Platí:

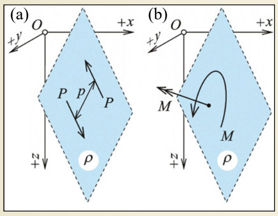
a) M je stejný ke všem bodům vyšetřovaného tuhého tělesa

b) M se nezmění, pootočí-li se dvojice sil v ρ nebo posune-li se rovnoběžně s ρ

c) Dvojici sil lze nahradit statickým momentem v **působišti momentu** dvojice sil

d) grafické znázornění stejné jako u rovinné úlohy, volný momentový vektor

e) pracuje se se statickými momenty v rovinách rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami (univerzální znaménková konvence)



Dvojice sil v prostoru
Obr. 3.7. / str. 30

Skládání statických momentů

Soustavu dvojic sil (jejich statických momentů) tvoří několik (obecně m) dvojic sil se statickými momenty M_j (j=1, … , m).

Působí-li dvojice sil v téže rovině nebo rovinách rovnoběžných – lze algebraicky sčítat, jinak nutno skládat s využitím kvádru sil.

Působení v souřadnicových rovinách

Výsledný momentový vektor:

$$M_j = \sqrt{M_{jx}^2 + M_{jy}^2 + M_{jz}^2}$$

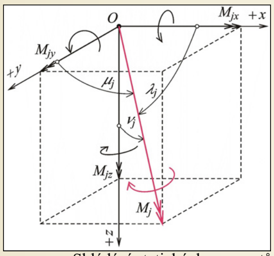
Sklon dán směrovými úhly:

$$\cos\lambda_j = \frac{M_{jx}}{M_j} \quad \cos\mu_j = \frac{M_{jy}}{M_j} \quad \cos\nu_j = \frac{M_{jz}}{M_j}$$

Opačná úloha – rozklad:

$$M_{jx} = M_j.\cos\lambda_j \quad M_{jz} = M_j.\cos\nu_j$$

$$M_{jy} = M_j.\cos\mu_j$$



Skládání statických momentů
Obr. 3.8. / str. 31

Rovnoběžný posun síly v prostoru

Společný účinek síly F a statického momentu M lze vyjádřit rovnoběžným posunutím síly F v rovině ρ o vzdálenost d, aby ke svému původnímu působišti vykazovala moment M.

Řešení: $d = \frac{|M|}{F}$

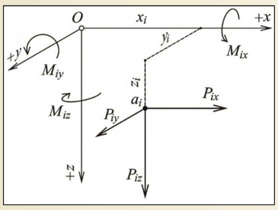
Naopak: Je-li zadána pouze síla F a v rovině ρ se posune o vzdálenost d, nutno přidat statický moment M opačného smyslu, než jaký vyvozuje síla F po svém posunu k původnímu působišti.

Řešení: $|M| = |F.d|$

Příklad:
Při posunu P_{ix} do počátku O (dvojí posunutí o z_i a y_i)

$$M_{iy} = P_{ix}.z_i$$

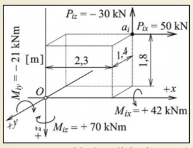
$$M_{iz} = -P_{ix}.y_i$$



Statické momenty osových složek síly k souřadnicovým osám
Obr. 3.5. / str. 29

Příklad 11.4

Předmět výpočtu: statické momenty M_{ix}, M_{iy} a M_{iz} k souřadnicovým osám, vyvolané rovnoběžným posunem sil P_{ix}, P_{iy} a P_{iz} do počátku souřadnicové soustavy (Příklad 11.3).



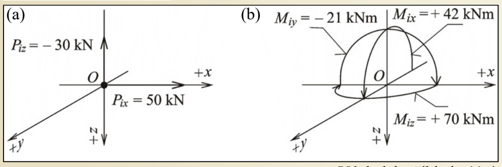
Zadání příkladu 11.3
Obr. 3.6. / str. 30

Řešení:

$$M_{ix} = P_{iz}.y_i = +42\text{kNm}$$

$$M_{iy} = P_{ix}.z_i - P_{iz}.x_i = -21\text{kNm}$$

$$M_{iz} = -P_{ix}.y_i = +70\text{kNm}$$



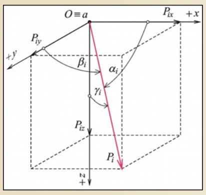
Výsledek příkladu 11.4
Obr. 3.9. / str. 32

Obecná prostorová soustava sil

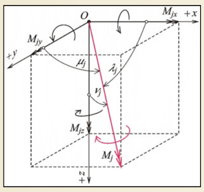
Působí-li na těleso obecně n sil P_i (i=1, …, n), jejichž různá působiště nebo paprsky neleží v téže rovině. Součástí mohou být i statické momenty dvojic sil M_j (j=1, …, m) v obecně různých rovinách.

Zadání sil: souřadnice působiště síly x_a, y_a, z_a, velikost, směr a smysl stejně jako u prostorového svazku sil.

Zadání statických momentů: obdobně jako síla, viz obr.3.8.



Zadání síly prostorového svazku
Obr. 3.1. / str. 25



Skládání statických momentů
Obr. 3.8. / str. 31

Výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil

Postup:

a) pro každou sílu P_i určit složky P_{ix} , P_{iy} , P_{iz}

b) určit osové složky výslednice R_x , R_y , R_z

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}$$

c) vypočítat velikost výslednice R a její směrové úhly, působiště v počátku

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} \quad \cos\beta_R = \frac{R_y}{R} \quad \cos\gamma_R = \frac{R_z}{R}$$

d) všechny složky sil P_{ix} , P_{iy} , P_{iz} přemístit do počátku O, určit statické momenty M_{ix}, M_{iy} a M_{iz}, otáčející kolem souřadnicových os (viz příklad 3.4)

e) vypočítat algebraické součty pravoúhlých složek momentů, způsobených přesuny sil

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}$$

Výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil

Postup:

f) pro každý zadaný moment M_j vypočítat jeho složky M_{jx}, M_{jy} a M_{jz} v souřadnicových rovinách

$$M_{jx} = M_j . \cos\lambda_j \quad M_{jy} = M_j . \cos\mu_j \quad M_{jz} = M_j . \cos\nu_j$$

g) sečíst složky zadaných momentů s momenty způsobenými přesuny sil a určit pravoúhlé složky výsledného statického momentu

$$M_{Rx} = \sum_{j=1}^{m} M_{jx} + M_x \quad M_{Ry} = \sum_{j=1}^{m} M_{jy} + M_y \quad M_{Rz} = \sum_{j=1}^{m} M_{jz} + M_z$$

h) vypočítat (pomocí pravidla o kvádru sil) výsledný statický moment a směrové úhly jeho vektorové úsečky

$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2}$$

$$\cos\lambda_R = \frac{M_{Rx}}{M_R} \quad \cos\mu_R = \frac{M_{Ry}}{M_R} \quad \cos\nu_R = \frac{M_{Rz}}{M_R}$$

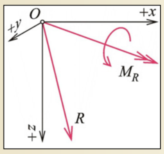
Výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil

Výsledný účinek obecné prostorové soustavy lze vyjádřit:

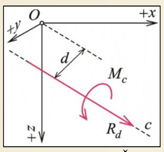
a) šesticí objektů: třemi složkami R_x , R_y , R_z silové výslednice R a třemi složkami M_{Rx} , M_{Ry} , M_{Rz} výsledného statického momentu M_R, nejčastější způsob

b) dvěma objekty: výslednicí R a výsledným statickým momentem M_R, tzv. **bivektor** nebo **dynama**, používá se zřídkakdy pro obtížnost matematického zápisu

c) tzv. **šroubem**, momentový vektor M_R lze rozložit na složku ležící v paprsku R a složku kolmou k R, která se může nahradit rovnoběžným posunem R o vzdálenost d do centrální osy prostorové soustavy sil c, nevyužívá se pro svou svízelnost.



Bivektor
Obr. 3.10. / str. 33

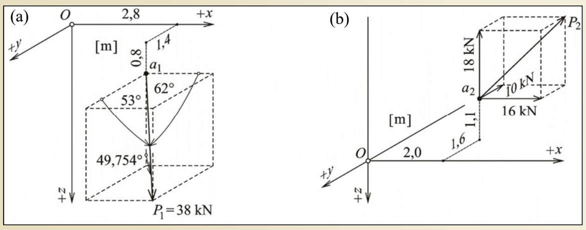


Šroub
Obr. 3.11. / str. 34

Příklad 11.5

Zadáno: síly P_1 a P_2

i	P_i [kN]	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	P_{ix} [kN]	P_{iy} [kN]	P_{iz} [kN]
1	38	62	53	49,754	0,4695	0,6018	0,6461	17,840	22,869	24,551
2								16,000	-10,000	-18,000
							Σ	33,840	12,869	6,551

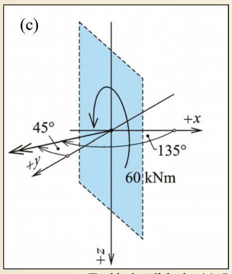


Zadání příkladu 11.5
Obr. 3.12. / str. 34

Příklad 11.5

Zadáno: statický moment M_1

j	M_j [kNm]	λ_i [°]	μ_i [°]	ν_i [°]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	M_{jx} [kNm]	M_{jy} [kNm]	M_{jz} [kNm]
1	60	135	45	90	-0,7071	0,7071	0,0000	-42,426	42,426	0,000



Zadání příkladu 11.5
Obr. 3.12. / str. 34

Příklad 11.5

Předmět výpočtu: výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil

Postup výpočtu:

a) Výpočet osových složek výslednice zadaných sil

i	P_i [kN]	α_i [°]	β_i [°]	γ_i [°]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	P_{ix} [kN]	P_{iy} [kN]	P_{iz} [kN]
1	38	62	53	49,754	0,4695	0,6018	0,6461	17,840	22,869	24,551
2								16,000	-10,000	-18,000
							Σ	33,840	12,869	6,551

b) Výpočet momentových složek způsobených přeložením sil

i	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]	M_{ix} [kNm]	M_{iy} [kNm]	M_{iz} [kNm]
1	2,8	1,4	0,8	16,076	-54,470	39,057
2	2	-1,6	-1,1	17,800	18,400	5,600
			Σ	33,876	-36,070	44,657

c) Výpočet složek zadaného momentu

j	M_j [kNm]	λ_i [°]	μ_i [°]	ν_i [°]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	M_{jx} [kNm]	M_{jy} [kNm]	M_{jz} [kNm]
1	60	135	45	90	-0,7071	0,7071	0,0000	-42,426	42,426	0,000

Příklad 11.5

d) Výpočet složek výsledného momentu a vyjádření výsledného účinku pomocí šestice objektů

R_x [kN]	R_y [kN]	R_z [kN]	M_{Rx} [kNm]	M_{Ry} [kNm]	M_{Rz} [kNm]
33,840	12,869	6,551	-8,551	6,356	44,657

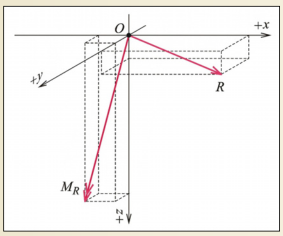
Výsledný účinek lze rovněž pomocí bivektoru:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} \quad \cos\beta_R = \frac{R_y}{R} \quad \cos\gamma_R = \frac{R_z}{R}$$

$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2}$$

$$\cos\lambda_R = \frac{M_{Rx}}{M_R} \quad \cos\mu_R = \frac{M_{Ry}}{M_R} \quad \cos\nu_R = \frac{M_{Rz}}{M_R}$$



Výsledek příkladu 11.5
Obr. 3.12. / str. 34

Podmínky rovnováhy obecné prostorové soustavy sil

Obecná prostorová soustava sil je v rovnováze, je-li splněno **6 podmínek rovnováhy**, zajišťující nulovou hodnotu výslednice ($R=0$) a nulovou hodnotu výsledného statického momentu ($M_R=0$).

3 silové podmínky

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$$

3 momentové podmínky

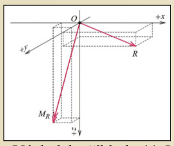
$$M_{Rx} = \sum_{j=1}^{m} M_{jx} + M_x = 0 \qquad M_{Ry} = \sum_{j=1}^{m} M_{jy} + M_y = 0 \qquad M_{Rz} = \sum_{j=1}^{m} M_{jz} + M_z = 0$$

Příklad 11.6

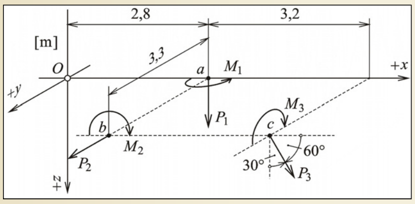
Předmět výpočtu: Určení velikosti tří sil P_1, P_2 a P_3, a tří statických momentů M_1, M_2 a M_3, kterými se doplní soustava sil z příkladu 11.5. Požadavek – **rovnovážný stav**.

Výsledný účinek soustavy z příkladu 11.5

R_x [kN]	R_y [kN]	R_z [kN]	M_{Rx} [kNm]	M_{Ry} [kNm]	M_{Rz} [kNm]
33,840	12,869	6,551	-8,551	6,356	44,657



Výsledek příkladu 11.5
Obr. 3.12. / str. 34



Zadání příkladu 11.6
Obr. 3.13. / str. 36

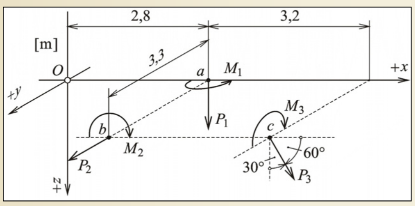
Příklad 11.6

Řešení: uplatnit jednotlivé podmínky rovnováhy ve vhodném pořadí

a) silová podmínka ve směru osy y: $R_y + P_2 = 0 \quad \rightarrow \quad P_2$

b) silová podmínka ve směru osy x: $R_x + P_3 . \cos 60^{\circ} = 0 \quad \rightarrow \quad P_3$

c) silová podmínka ve směru osy z: $R_z + P_1 + P_3 . \cos 30^{\circ} = 0 \quad \rightarrow \quad P_1$



Zadání příkladu 11.6
Obr. 3.13. / str. 36

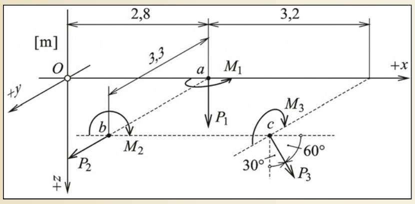
Příklad 11.6

d) momentová podmínka k ose x: $M_{Rx} - M_3 + P_3.\cos 30^\circ.3,3 = 0 \quad \rightarrow \quad M_3$

e) momentová podmínka k ose y: $M_{Ry} - M_2 - P_1.2,8 - P_3.\cos 30^\circ.6,0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_2$

f) momentová podmínka k ose z: $M_{Rz} - M_1 + P_2.2,8 - P_3.\cos 60^\circ.3,3 = 0 \quad \rightarrow \quad M_1$

Poznámka: záporné hodnoty výsledků znamenají, že skutečné smysly sil a momentů jsou opačné než předpokládané

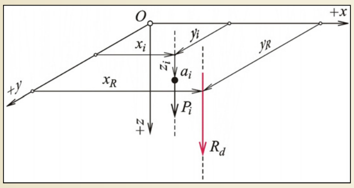


Zadání příkladu 11.6
Obr. 3.13. / str. 36

Prostorová soustava rovnoběžných sil

Jsou-li paprsky tří nebo více (obecně n) sil P_i (i=1, …, n) rovnoběžné a neleží v téže rovině.

Pokud jsou síly svislé (rovnoběžné se souřadnicovou osou z), pak každá síla musí mít zadáno působiště a (x_a, y_a, z_a), velikost a smysl (znaménkem). Souřadnice x_a, y_a jsou zároveň rameny svislých sil vůči vodorovným souřadnicovým osám.



Zadaná síla a výslednice prostorové soustavy rovnoběžných sil
Obr. 3.14. / str. 39

Výslednice prostorové soustavy rovnoběžných sil

Postup při určování výsledného účinku prostorové soustavy rovnoběžných sil:

a) vypočítat velikost výslednice $R = \sum_{i=1}^{n} P_i$

b) určit polohu výslednice R_d=R pomocí Varignonovy věty

$$M_{Rx} = R.y_R = \sum_{i=1}^{n} P_i.y_i$$

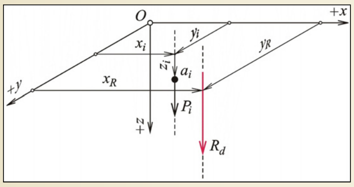
$$\downarrow$$

$$M_{Ry} = -R.x_R = -\sum_{i=1}^{n} P_i.x_i \quad \rightarrow \quad x_R = \frac{-M_{Ry}}{R} = \frac{1}{R}.\sum_{i=1}^{n} P_i.x_i \qquad y_R = \frac{M_{Rx}}{R} = \frac{1}{R}.\sum_{i=1}^{n} P_i.y_i$$

Výsledný účinek lze vyjádřit:

a) výslednicí R v počátku a M_{Rx}, M_{Ry}

b) výslednicí R_d na paprsku procházejícím bodem x_R, y_R (viz obrázek 3.14.)



Zadaná síla a výslednice prostorové soustavy rovnoběžných sil
Obr. 3.14. / str. 39

Příklad 11.7

Předmět výpočtu:
výsledný účinek prostorové soustavy rovnoběžných sil P_1 až P_4

Tabulkové řešení:

i	P_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	$P_i \cdot y_i$ [kNm]	$-P_i \cdot x_i$ [kNm]
1	30	0,0	0,0	0	0
2	50	1,4	0,6	30	-70
3	-40	1,6	1,1	-44	64
4	110	2,0	1,8	198	-220
Σ	150		Σ	184	-226

Souřadnice paprsku výslednice R_d:

$$x_R = \frac{-M_{Ry}}{R} = \frac{226}{150} = 1{,}507\,\mathrm{m} \qquad y_R = \frac{M_{Rx}}{R} = \frac{184}{150} = 1{,}227\,\mathrm{m}$$

Podmínky rovnováhy prostorové soustavy rovnoběžných sil

Prostorová soustava rovnoběžných sil je v rovnováze, jsou-li splněny **3 podmínky rovnováhy**, zajišťující nulovou hodnotu výslednice ($R=0$) a nulovou hodnotu obou složek M_{Rx}, M_{Ry} výsledného statického momentu k souřadnicovým osám x, y.

1 silová podmínka

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i = 0$$

2 momentové podmínky

$$M_{Rx} = \sum_{j=1}^{m} P_i . y_i = 0 \qquad M_{Ry} = -M_{Ry} = \sum_{j=1}^{m} P_i . x_i = 0$$

Statický střed v prostoru

Předpoklad – vyšetřovaná soustava rovnoběžných sil v prostoru má nenulovou hodnotu výslednice ($R \neq 0$) a síly P_i mají svá působiště o souřadnicích x_i, y_i, z_i .

Vyšetřovaná soustava rovnoběžných sil v prostoru se otáčí tak, že paprsky zůstávají stále rovnoběžné, síly P_i kolem svých působišť, výslednice R_d kolem pevného bodu s – **statického středu** prostorové soustavy rovnoběžných sil.

Cíl řešení – určení souřadnic x_s, y_s, z_s statického středu.

Velikost výslednice

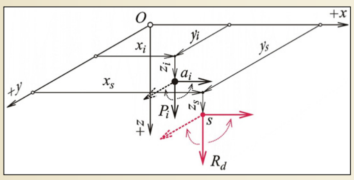
$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

souřadnice s (z Varignonovy věty)

$$x_R = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i . x_i$$

$$y_R = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i . y_i$$

$$z_R = \frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i . z_i$$



Statický střed v prostoru
Obr. 3.15. / str. 39

Příklad 11.8

Předmět výpočtu:
souřadnice statického středu s prostorové soustavy rovnoběžných sil P_1 až P_4

Tabulkové řešení:

i	P_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]	$P_i \,.\, x_i$ [kNm]	$P_i \,.\, y_i$ [kNm]	$P_i \,.\, z_i$ [kNm]
1	20	0,8	-0,6	0,0	16	-12	0
2	60	1,6	1,2	-0,4	96	72	-24
3	-80	-2,0	1,8	-1,3	160	-144	104
4	100	-2,1	-1,4	1,5	-210	-140	150
Σ	100			Σ	62	-224	230

Souřadnice statického středu:

$$x_R = \frac{1}{R} . \sum_{i=1}^{n} P_i . x_i = \frac{62}{100} = 0{,}62\text{m}$$

$$y_R = \frac{1}{R} . \sum_{i=1}^{n} P_i . y_i = \frac{-332}{100} = -3{,}32\text{m}$$

$$z_R = \frac{1}{R} . \sum_{i=1}^{n} P_i . z_i = \frac{230}{100} = 2{,}30\text{m}$$

Okruhy problémů k ústní části zkoušky

1. Prostorový svazek sil
2. Obecná prostorová soustava sil
3. Statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil
4. Prostorová soustava rovnoběžných sil