

Téma 8

Těžiště

- **Těžiště rovinných čar**
- **Těžiště jednoduchých rovinných obrazců**
- **Těžiště složených rovinných obrazců**

Těžiště

Hmotný útvar - v nejobecnějším případě trojrozměrné těleso z látky o měrné tíze γ [kN/m³], také idealizovaná tělesa jako např.:

Hmotný rovinný obrazec (tuhá deska) - o měrné tíze γ [kN/m²]

Hmotná rovinná čára - o měrné tíze γ [kN/m]

Tíhově homogenní hmotné útvary – měrná tíha je po celém útvaru konstantní

Fyzikální význam těžiště:

- a) hmotný bod se soustředěnou hmotností útvaru
- b) bod, ve kterém lze hmotný útvar vystavený tíze podepřít proti posunutí aniž by docházelo k rotaci

Těžiště je chápáno jako statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru či rovině, které tvoří vlastní tíhy elementů hmotného útvaru.

Těžnice – osa procházející těžištěm



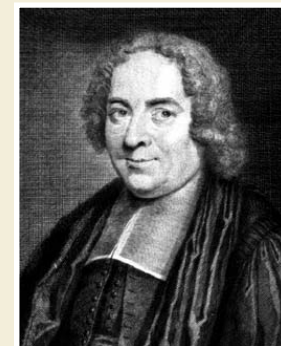
Varignonova momentová věta

Zadáno: obecná rovinná soustava n sil P_i a m statických momentů dvojic sil M_j .

Vypočteno: výslednice R_d .

Platí:

Statický moment výslednice obecné rovinné soustavy k libovolnému momentovému středu v rovině soustavy se rovná algebraickému součtu všech statických momentů sil soustavy k témuž momentovému středu a všech statických momentů dvojic sil. ... **Varignonova věta**



Pierre Varignon
(1654 - 1722)

Matematicky:

$$R_d \cdot p_R = \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^m M_j$$

Těžiště obecné rovinné čáry

Rovinné čáry **jednoduché** (po celé délce jeden matematický předpis) a **složené** (několik spojených jednoduchých čar)

Jednoduché rovinné čáry – úsečka, kružnicový oblouk, parabolický oblouk

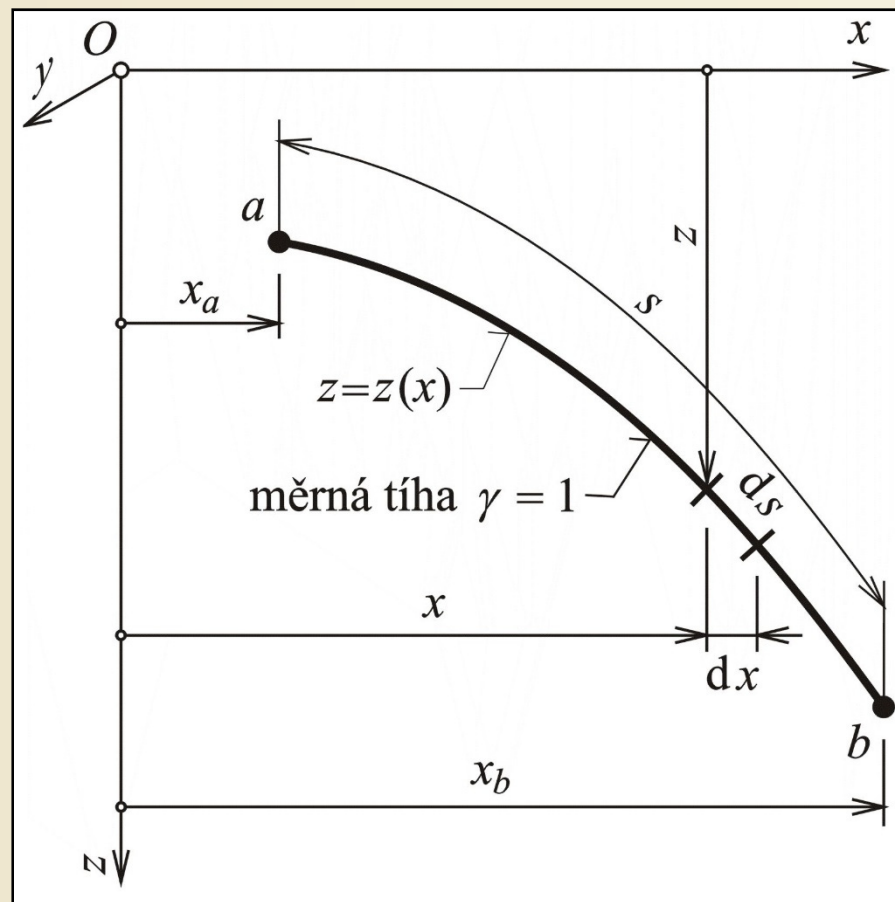
Předpoklad: čáry tíhově homogenní, u kterých hodnota měrné tíhy γ nemá na polohu těžiště žádný vliv, proto $\gamma = 1$ (bez fyzikálního rozměru)

Dle diferenciální geometrie rovinných křivek platí:

$$ds = \sqrt{1 + z'^2} dx \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

Délka (a zároveň i tíha) čáry:

$$s = \int_s ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} dx$$



Rovinná čára

Obr. 4.1. / str. 41

Těžiště obecné rovinné čáry

V každém elementu působí elementární síla vyjadřující jeho vlastní tíhu

Vzniká soustava rovnoběžných sil se statickým středem v těžišti.

Směr paprsků rovnoběžných sil lze volit:

a) v rovině vyšetřované čáry xz ,
povaha rovinné soustavy sil, směr svislý (z), pak vodorovný (x)

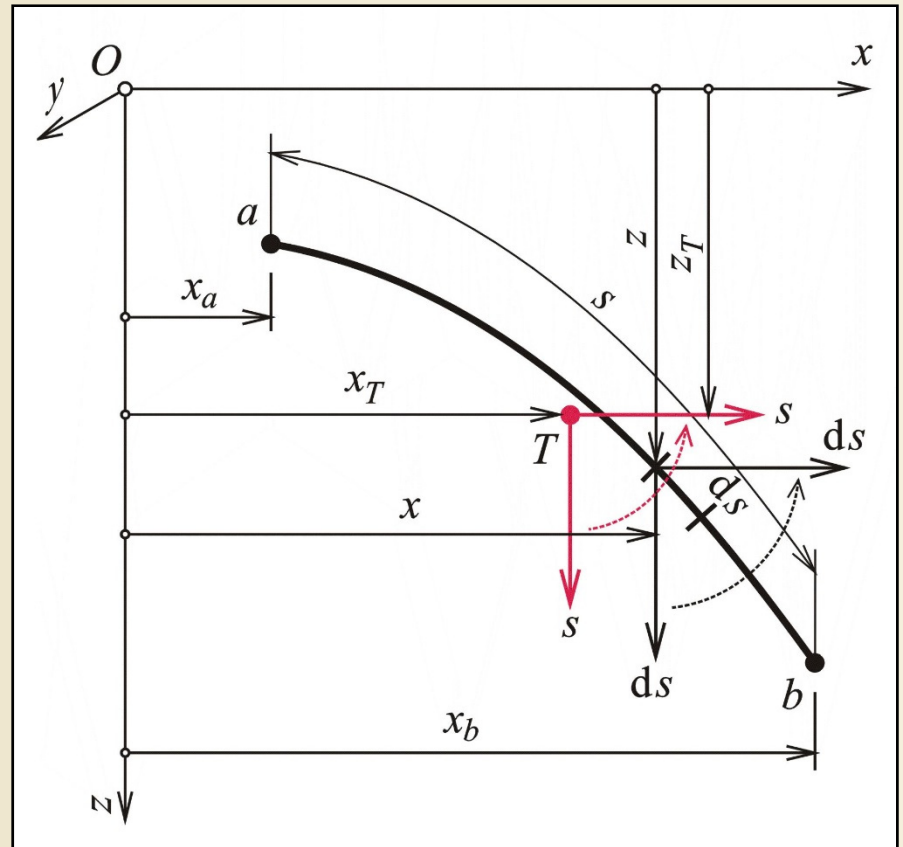
Statické momenty sil k momentovému středu (k počátku O):

$$S_z = \int_s x \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1+z'^2} dx$$

$$S_x = \int_s z \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1+z'^2} dx$$

Z Varignonovy věty: $x_T = \frac{S_z}{s}$ $z_T = \frac{S_x}{s}$

$$dP = \gamma \cdot ds = ds$$



Těžiště rovinné čáry jako statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.2.a. / str. 42

Těžiště obecné rovinné čáry

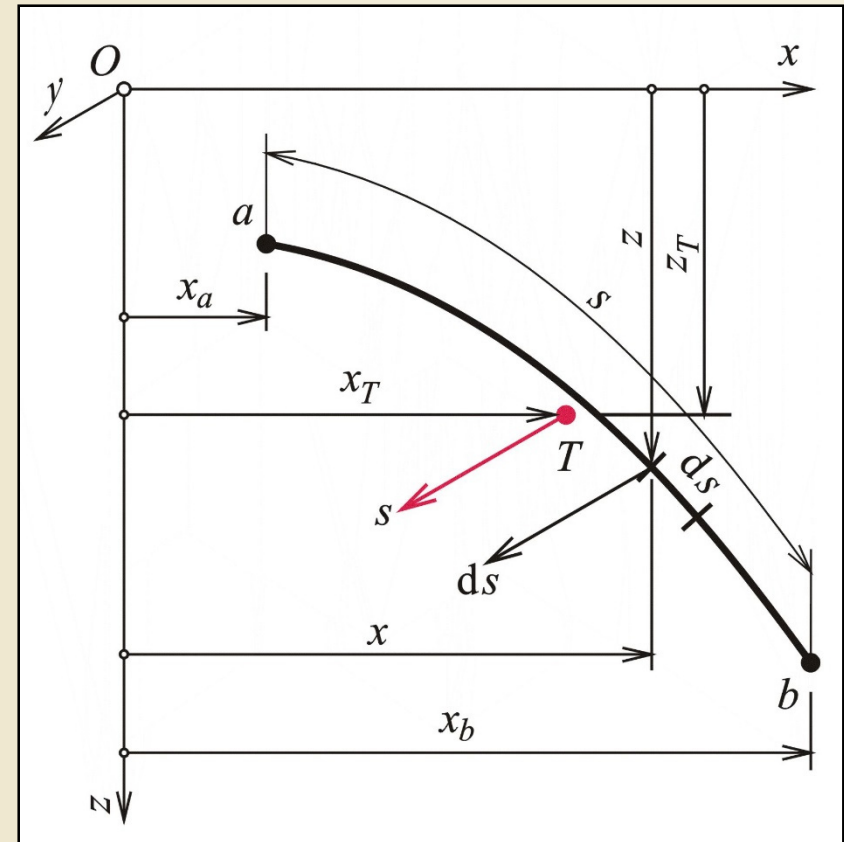
Směr paprsků rovnoběžných sil lze volit:

b) kolmo k rovině vyšetřované čáry xz , tedy ve směru y , povaha prostorové soustavy sil, výpočet statických momentů ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům

Poučka: Je-li rovinná čára (nebo jakýkoli jiný vyšetřovaný útvar) symetrická podle nějaké osy symetrie, leží těžiště čáry (útvary) nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný útvar dvě nebo více os symetrie – těžiště leží v průsečíku os symetrie a není třeba zjišťovat výpočtem.

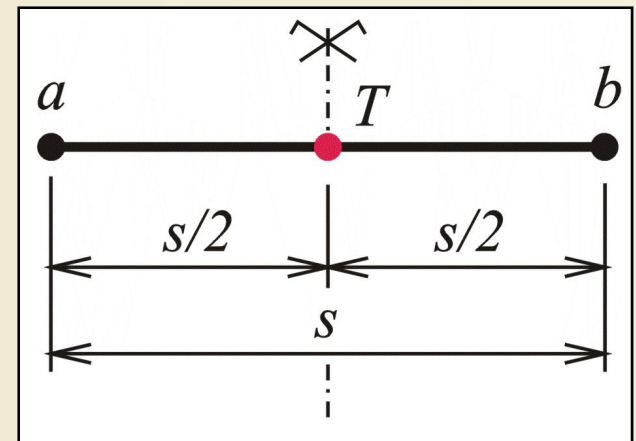


Těžiště rovinné čáry jako statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.2.b. / str. 42

Těžiště úsečky

Úsečka má osu symetrie - těžiště leží uprostřed úsečky při jakémkoliv sklonu úsečky.



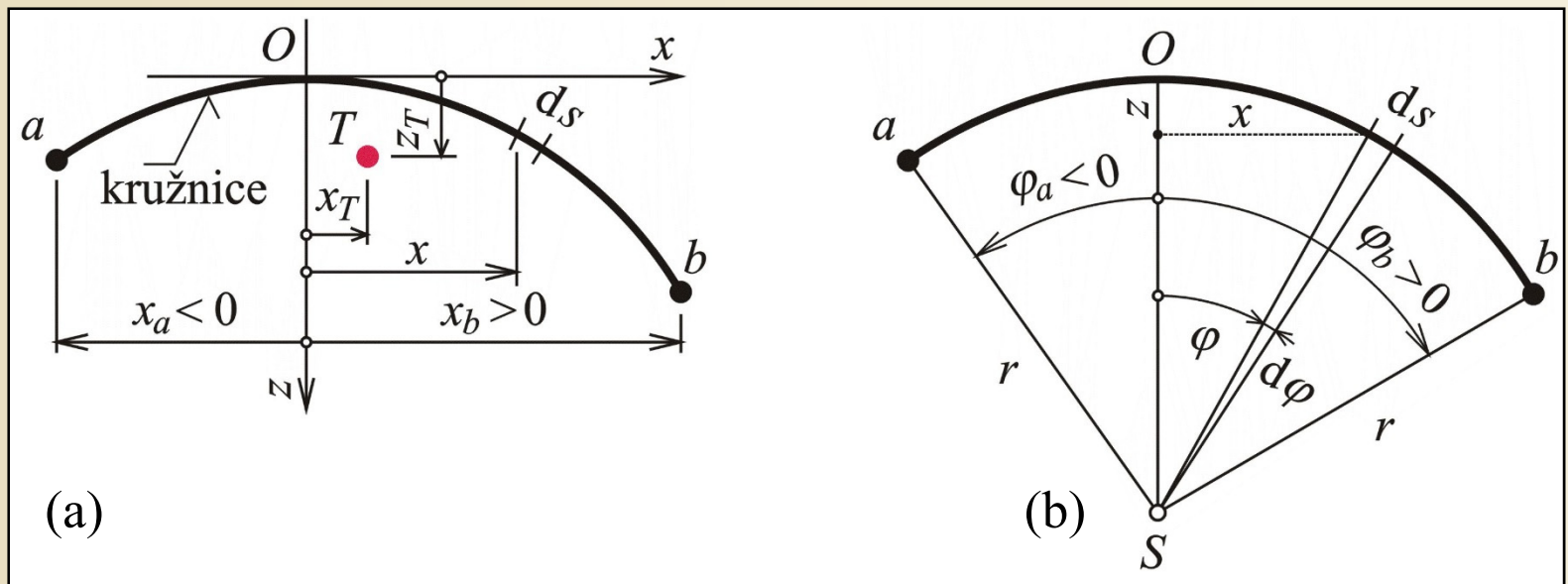
Těžiště úsečky

Obr. 4.3. / str. 43

Těžiště kružnicového oblouku

a) pravoúhlá soustava – složité matematické výrazy

b) polární soustava – pól S ve středu kružnice, úhlová souřadnice φ měřena od svislice procházející středem S kružnice, kladná ve směru hodinových ručiček, v radiánech, středové úhly φ_a a φ_b , poloměr kružnice r



Kružnicový oblouk v pravoúhlé (a) a polární (b) souřadnicové soustavě

Obr. 4.4. / str. 44

Těžiště kružnicového oblouku

Platí:

$$x = r \cdot \sin \varphi \quad x_a = r \cdot \sin \varphi_a \quad x_b = r \cdot \sin \varphi_b$$

$$z = r \cdot (1 - \cos \varphi) \quad ds = r \cdot d\varphi$$

Délka oblouku:

$$s = \int_s ds = r \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi = r \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$$

Statické momenty:

$$S_x = \int_s z \cdot ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} (1 - \cos \varphi) \cdot d\varphi = r^2 \cdot [(\varphi_b - \varphi_a) - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)]$$

$$S_z = \int_s x \cdot ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sin \varphi \cdot d\varphi = r^2 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b)$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a}$$

$$z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a}$$

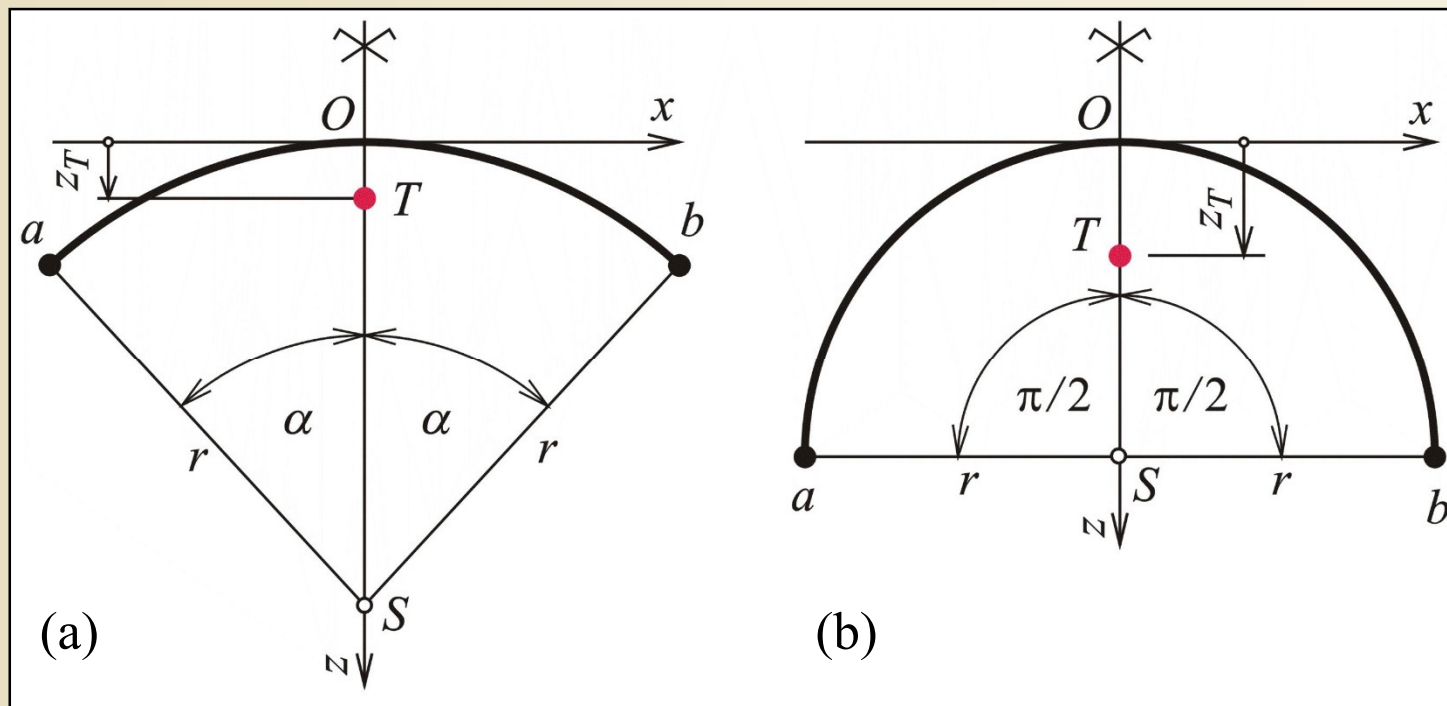
Těžiště kružnicového oblouku

a) symetrický kružnicový oblouk podle osy z , středový úhel 2α , $\varphi_a = -\alpha$, $\varphi_b = +\alpha$

$$x_T = 0 \quad z_T = r \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$$

b) půlkružnice, $\alpha = \pi/2$

$$x_T = 0 \quad z_T = r \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \doteq 0,3634 \cdot r$$



Symetrický kružnicový oblouk (a) a půlkružnice (b)

Obr. 4.5. / str. 44

Příklad 9.1

Zadáno:

$$r = 8$$

$$\varphi_a = -30^\circ = -\frac{30^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = -0,52360 \text{ rad}$$

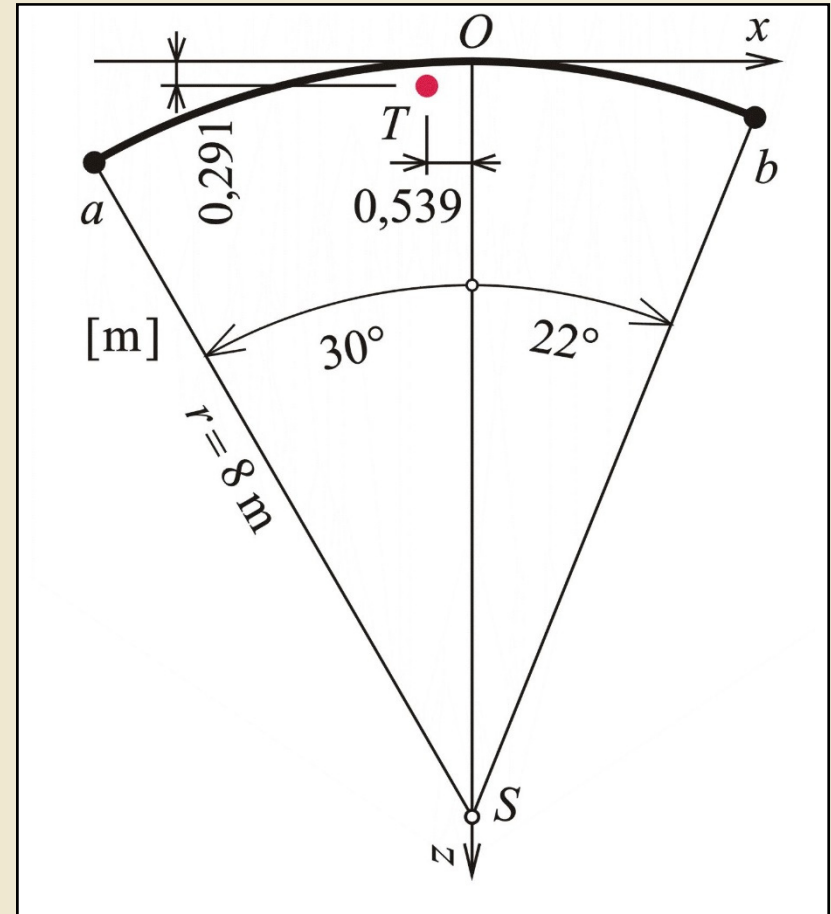
$$\varphi_b = +22^\circ = +0,38397 \text{ rad}$$

$$x_T = ? \quad z_T = ?$$

Řešení:

$$x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a} = -0,539 \text{ m}$$

$$z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a} = +0,291 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.1

Obr. 4.6. / str. 45

Težiště parabolického oblouku

Zadáno: x_a, x_b, z_a nebo z_b

Rovnice paraboly ve zvolené souřadnicové soustavě: $z = k \cdot x^2$ $k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$

Derivace rovnice paraboly: $z' = 2 \cdot k \cdot x$

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

$$S_z = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

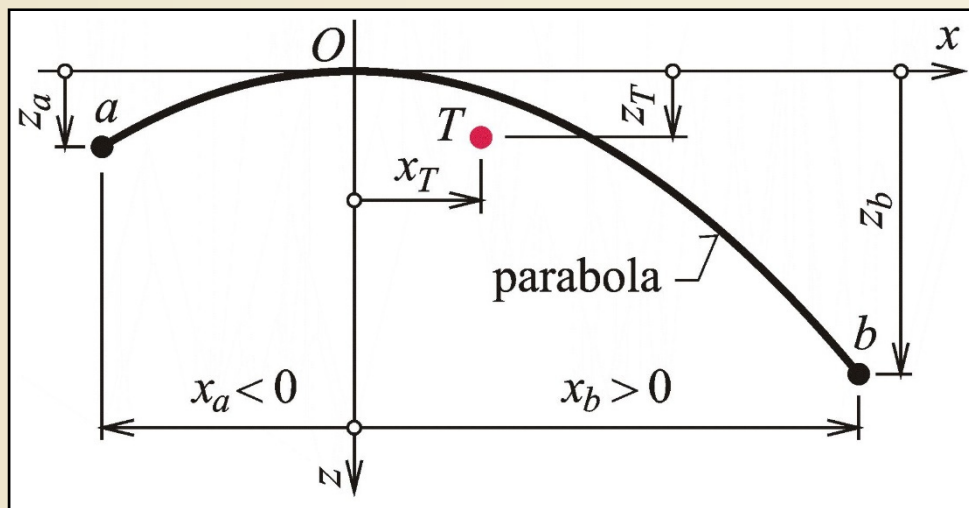
$$S_x = \int_{x_a}^{x_b} kx^2 \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

S využitím:

$$s = \int_s ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_z = \int_s x \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_x = \int_s z \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1 + z'^2} dx$$



Parabolický oblouk

Obr. 4.7. / str. 45

Numerická integrace určitých integrálů

Výpočet určitých integrálů je pracný – numerická integrace s využitím **Simpsonova pravidla**.

Postup:

- a) Rozdělit integrační obor $x_b - x_a$ na sudý počet n dílů, body dělení $i = 0, 1, \dots, n$

$$\text{Délka jednoho dílku: } \Delta = \frac{x_b - x_a}{n}$$

- b) Určit souřadnici x_i : $x_i = x_a + i \cdot \Delta$

- c) Vypočítat číselnou hodnotu f_i integrované funkce $f(x)$

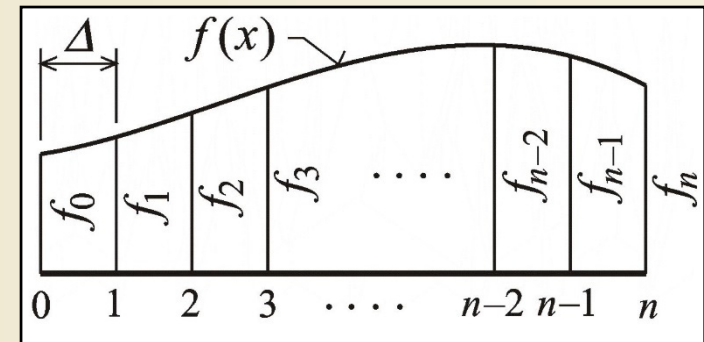
- d) Přibližná číselná hodnota integrálu je pak:

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \approx \left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + \right. \\ \left. + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n \right] \cdot \frac{\Delta}{3}$$

Přesnost výpočtu závislá na n , pro praktické účely stačí již $n=4$



Thomas Simpson
(1710-1761)



Simpsonovo pravidlo

Obr. 4.8. / str. 45

Příklad 9.2

Zadáno: $x_a, x_b, z_b,$

z_a dopočteno z rovnice paraboly, $n=4$

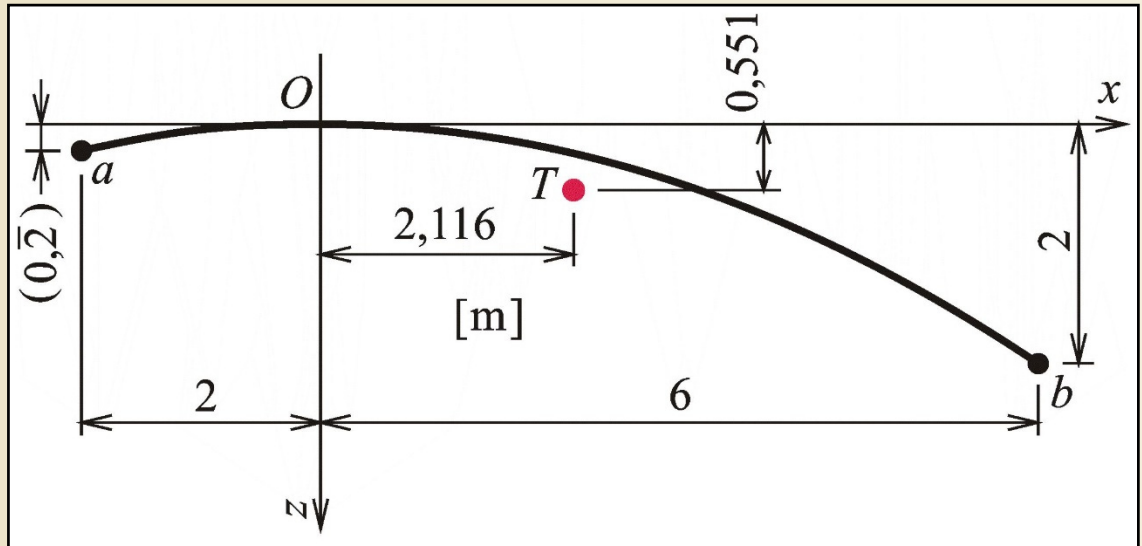
Výpočet těžiště:

Parametr k $k = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0,0\bar{5} \text{ m}^{-1}$

$$\Delta = \frac{6+2}{4} = 2 \text{ m}$$

Integrál pro $i=4$

$$\int_{-2}^{+6} f(x) dx \approx \left[\begin{array}{l} f_0 + 4(f_1 + f_3) + \\ + 2(f_2) + f_4 \end{array} \right] \cdot \frac{2}{3}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.2

Obr. 4.9. / str. 46



Příklad 9.2

Tabulkový výpočet:

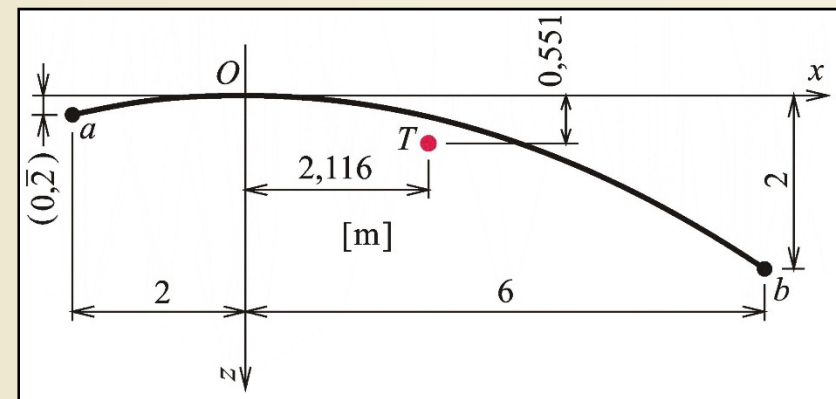
i	x [m]	$\sqrt{1+(2kx)^2}$	$kx^2 \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$	$x \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$
0	-2	1,0244	0,2276	-2,0488
1	0	1,0000	0,0000	0,0000
2	2	1,0244	0,2276	2,0488
3	4	1,0943	0,9727	4,3773
4	6	1,2019	2,4037	7,2111
		8,4349	4,6517	17,8460

$$s = 8,4349 \text{ m}$$

$$S_x = 4,6517 \text{ m}^2 \quad S_z = 17,8460 \text{ m}^2$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{S_z}{s} = 2,116 \text{ m} \quad z_T = \frac{S_x}{s} = 0,551 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.2

Těžiště rovinné složené čáry

Rovinná **složená** čára vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných čar v téže rovině. Prvky s označením $i=1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - homogenní složená čára.

Postup:

- Složenou čáru umístit do pravoúhlé souřadnicové soustavy xz
- Pro každý prvek i vypočítat délku s_i a odpovídající tíhovou sílu $P_i = \gamma_i \cdot s_i$
- Pro každý prvek i určit souřadnice x_i a z_i jeho těžiště T_i
- Zavést sílu P_i do těžiště T_i a určit:

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

- Vypočítat souřadnice těžiště rovinné složené čáry

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

Příklad 9.3

Zadáno:

- a) Svislá úsečka s hraničními body a_1 a a_2 , $\gamma_1 = 1$
- b) Kružnicový oblouk s hraničními body a_2 a a_3 , $\varphi_{a_2} = -1,1760$ rad, $\varphi_{a_3} = 0$,
 $r = 3,25$ m, $\gamma_2 = 1,5$
- c) Svislá úsečka s hraničními body a_3 a a_4 , $\gamma_3 = 1,2$

Řešení:

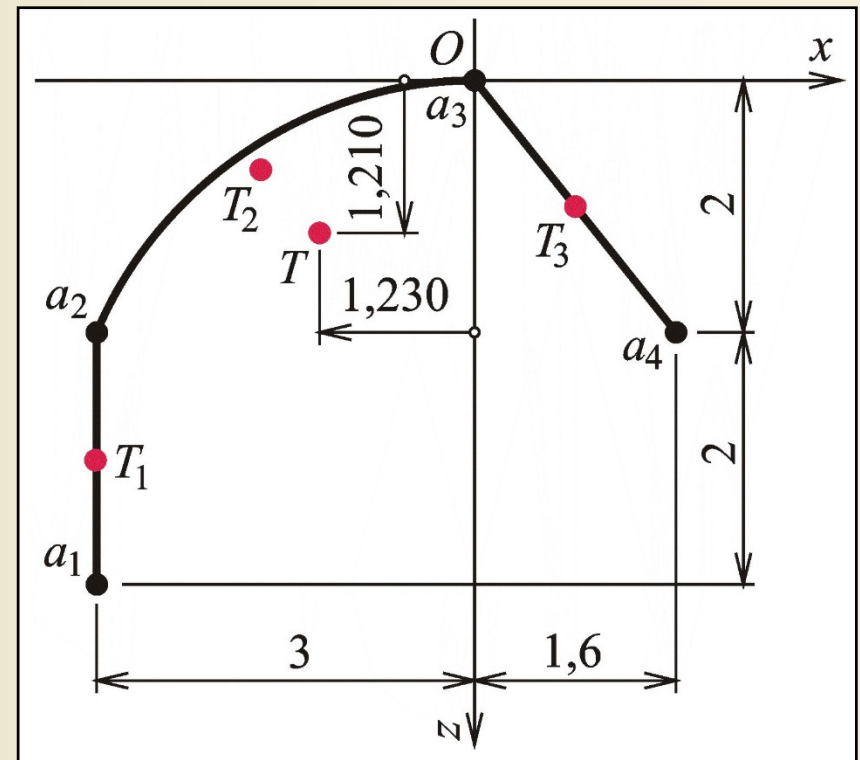
- a) délky, tíhy a těžiště prvků i
($x_2 = -1,7007$ m, $z_2 = 0,6990$ m)

- b) souřadnice těžiště

$$R = 10,807 \text{ m}$$

$$S_x = 13,081 \text{ m}^2 \quad S_z = -13,291 \text{ m}^2$$

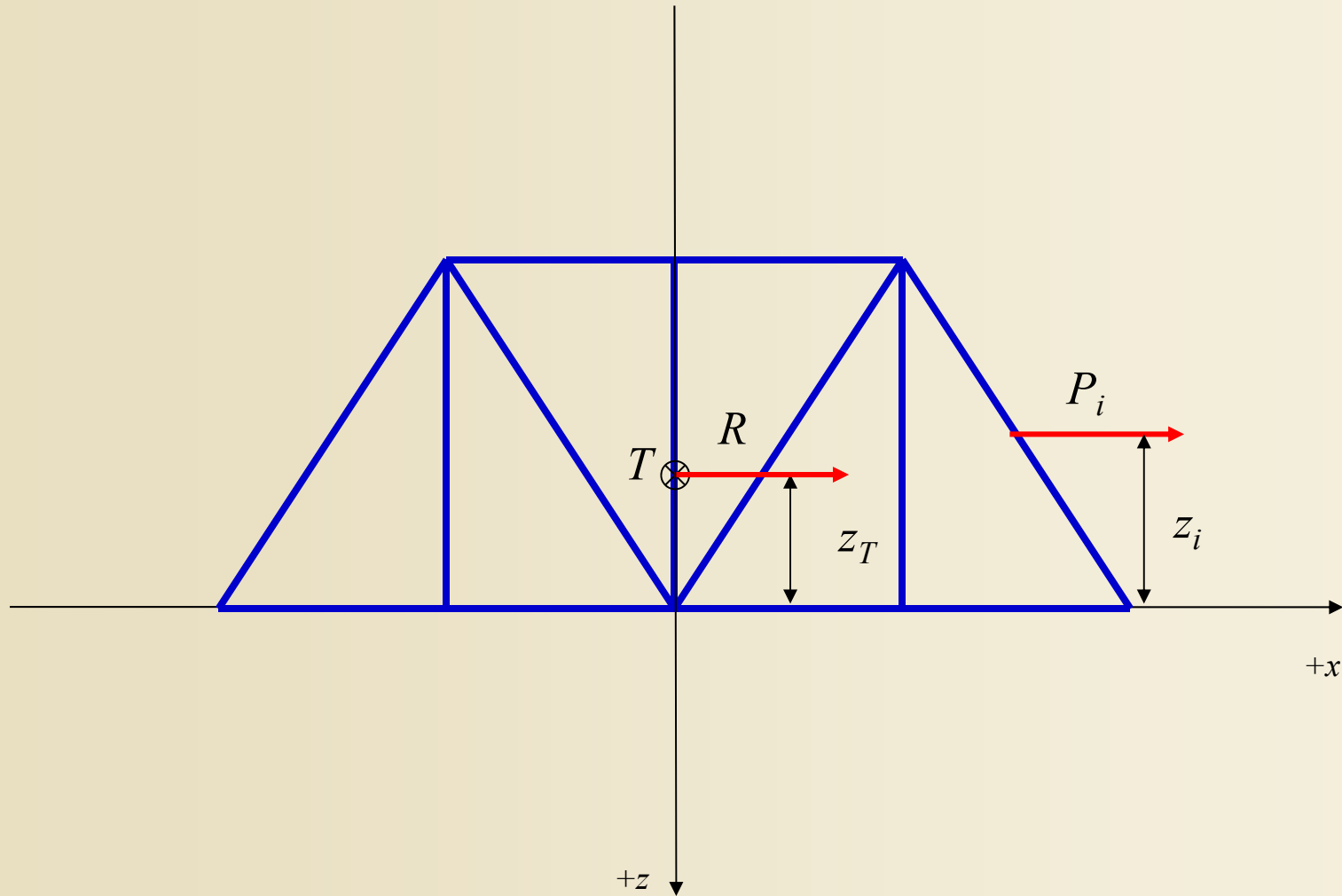
$$x_T = -1,230 \text{ m} \quad z_T = 1,210 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.3

Obr. 4.10. / str. 47

Těžiště rovinných příhradových nosníků



Dřevěné příhradové vazníky



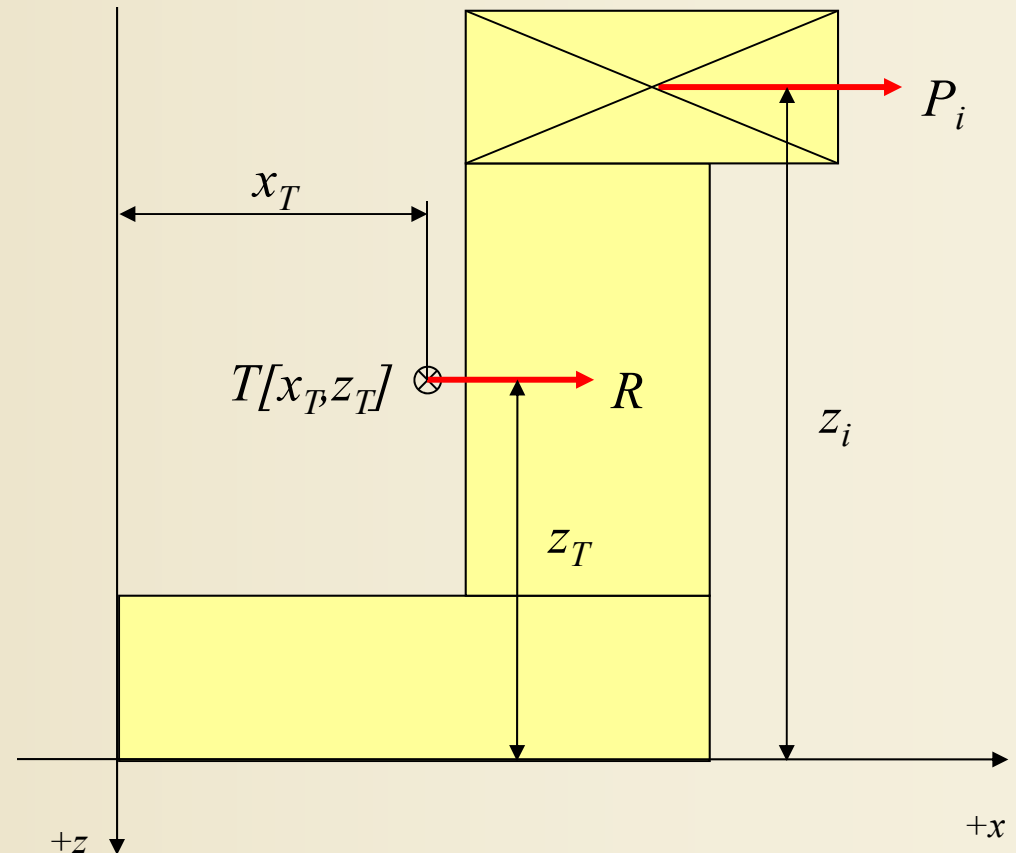
Dřevěné příhradové vazníky



Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

Jednoduchý rovinný obrazec – obrys umožňuje určit polohu těžiště bez výpočtu na základě symetrie nebo výpočtem podle jednoduchého matematického předpisu, tíhově homogenní

Složený rovinný obrazec – několik spojených jednoduchých obrazců



Těžiště obecného rovinného obrazce

Plošný **obsah (plocha)** rovinného obrazce A . $\gamma = 1 \rightarrow A = \gamma \cdot A$

Plocha elementárního obdélníka:

$$dA = dx \cdot dz$$

Celková plocha obrazce: $A = \iint_A dA = \iint_A dx \cdot dz$

Směr rovnoběžných elementárních sil dP
lze volit:

$$dP = \gamma \cdot dA = dA$$

a) v rovině vyšetřovaného obrazce xz ,
povaha rovinné soustavy sil, směr svislý
(z), pak vodorovný (x)

Statické momenty obrazce k
momentovému středu O :

Rozměr [m^3]

$$S_z = \iint_A x \cdot dA = \iint_A x \cdot dx \cdot dz$$

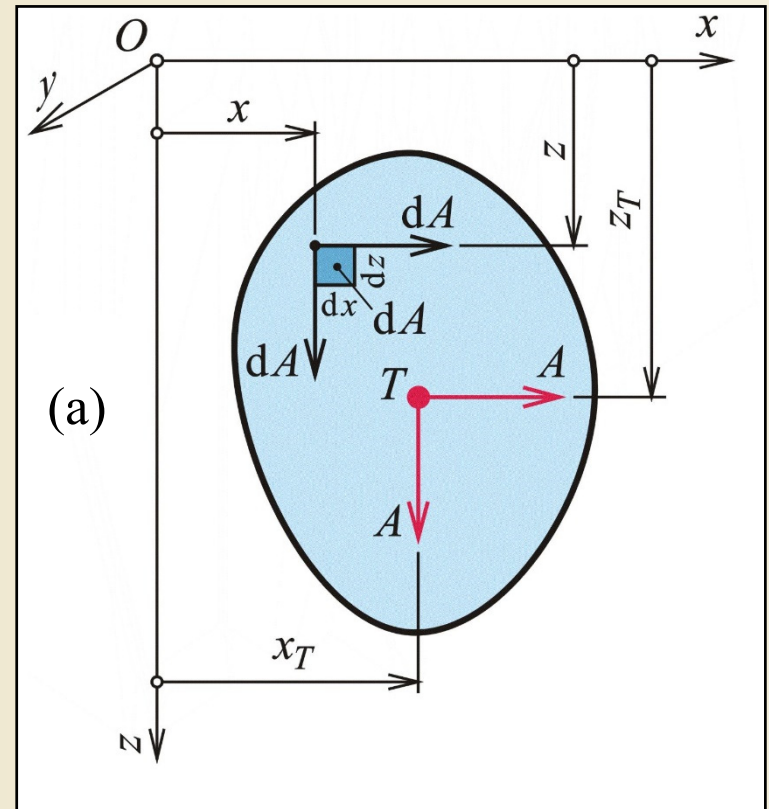
$$S_x = \iint_A z \cdot dA = \iint_A z \cdot dx \cdot dz$$

$$x_T = \frac{S_z}{A}$$

$$z_T = \frac{S_x}{A}$$

Souřadnice těžiště:

Z Varignonovy věty:



Těžiště rovinného obrazce jako statický střed
rovinné soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.11.a. / str. 48

Těžiště obecného rovinného obrazce

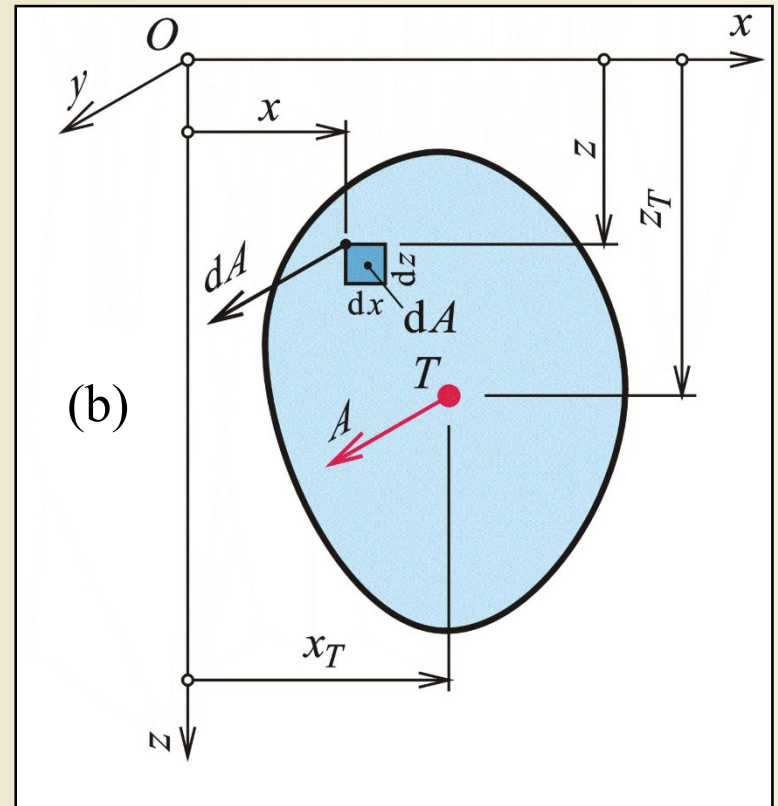
Směr rovnoběžných elementárních sil dP lze volit: $dP = \gamma \cdot dA = dA$

b) kolmo k rovině vyšetřovaného obrazce xz , tedy ve směru y , povaha prostorové soustavy sil, výpočet statických momentů obrazce ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům

Poučka: Je-li rovinný obrazec symetrický podle nějaké osy symetrie, leží těžiště obrazce nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný obrazec dvě nebo více os symetrie – těžiště leží v průsečíku os symetrie a není třeba zjišťovat výpočtem.

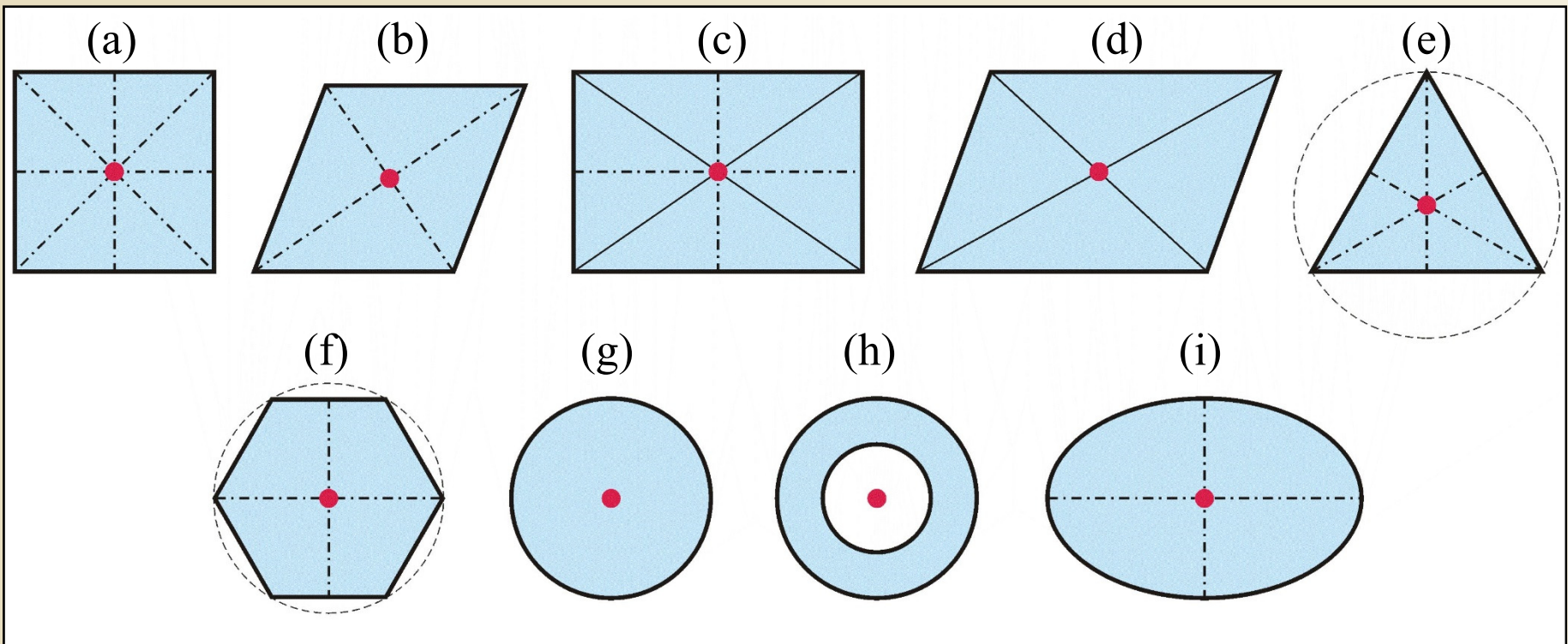


Těžiště rovinného obrazce jako statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.11.b. / str. 48

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

a) čtverec **b)** kosočtverec **c)** obdélník **d)** kosodélník **e)** rovnostranný trojúhelník **f)** pravidelný šestiúhelník **g)** kruh **h)** mezikruží **i)** elipsa



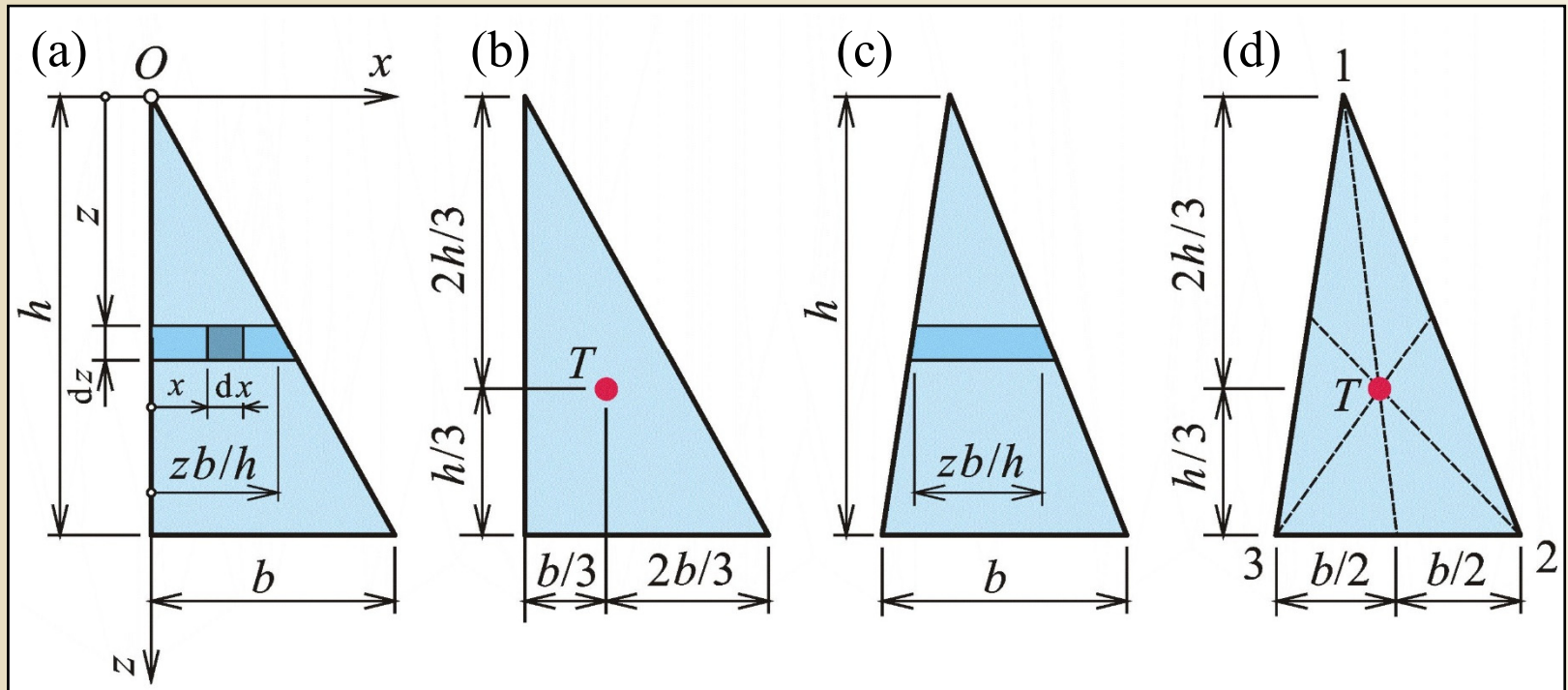
Těžiště některých jednoduchých rovinných obrazců

Obr. 4.12. / str. 50

Těžiště pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Plocha trojúhelníku: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Statický moment: $S_x = \iint_A z \cdot dx \cdot dz = \int_0^h z \left[\int_0^{zb/h} dx \right] dz = \int_0^h z \left[\frac{z \cdot b}{h} \right] dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 dz = \frac{b \cdot h^2}{3}$



Těžiště trojúhelníku

Obr. 4.13. / str. 50

Těžiště pravoúhlého a obecného trojúhelníku

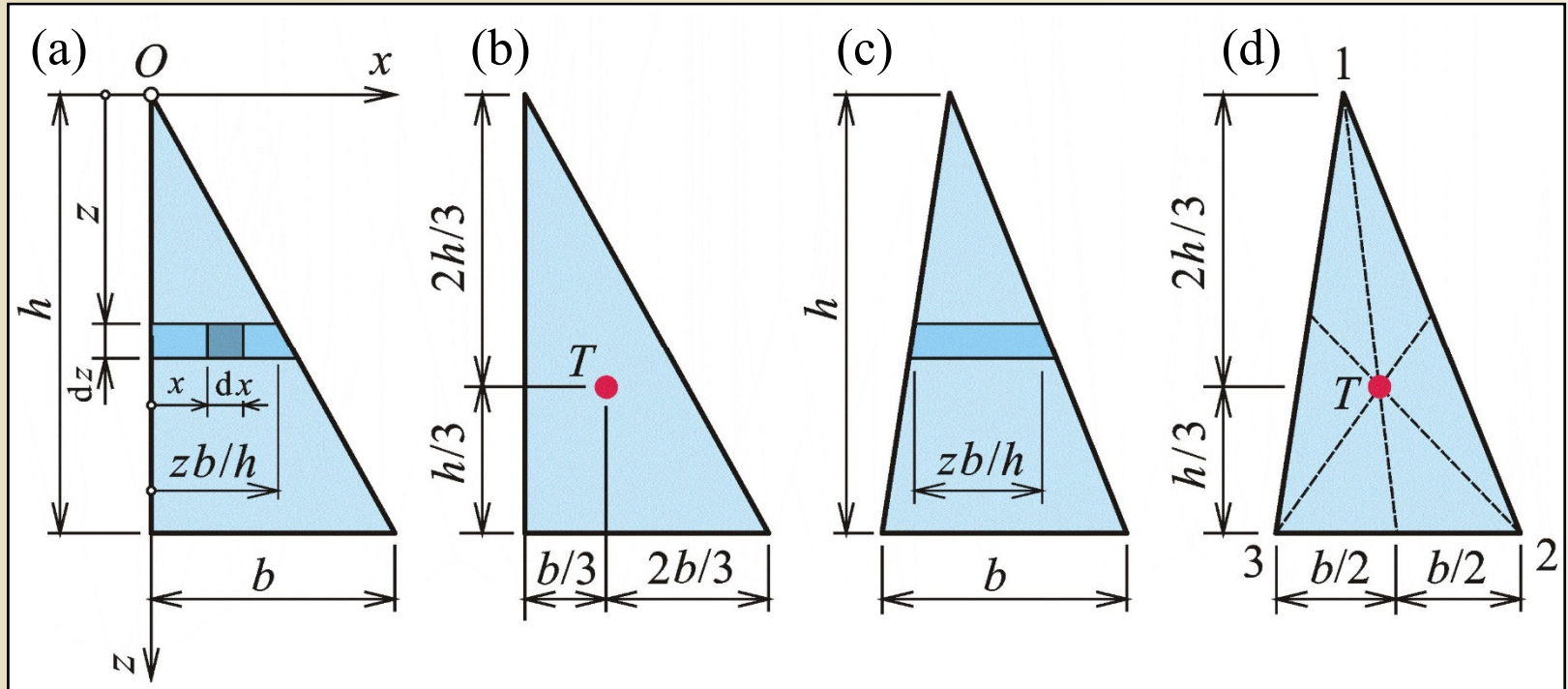
Svislá pořadnice těžiště:

$$z_T = \frac{b \cdot h^2}{3} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{2}{3} \cdot h$$

Výpočet ze souřadnic vrcholů:

$$x_T = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$z_T = \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3)$$



Těžiště trojúhelníku

Obr. 4.13. / str. 50

Plocha kruhové úseče

Symetrie podle osy z , polární soustava – středový úhel 2α , poloměr kružnice r

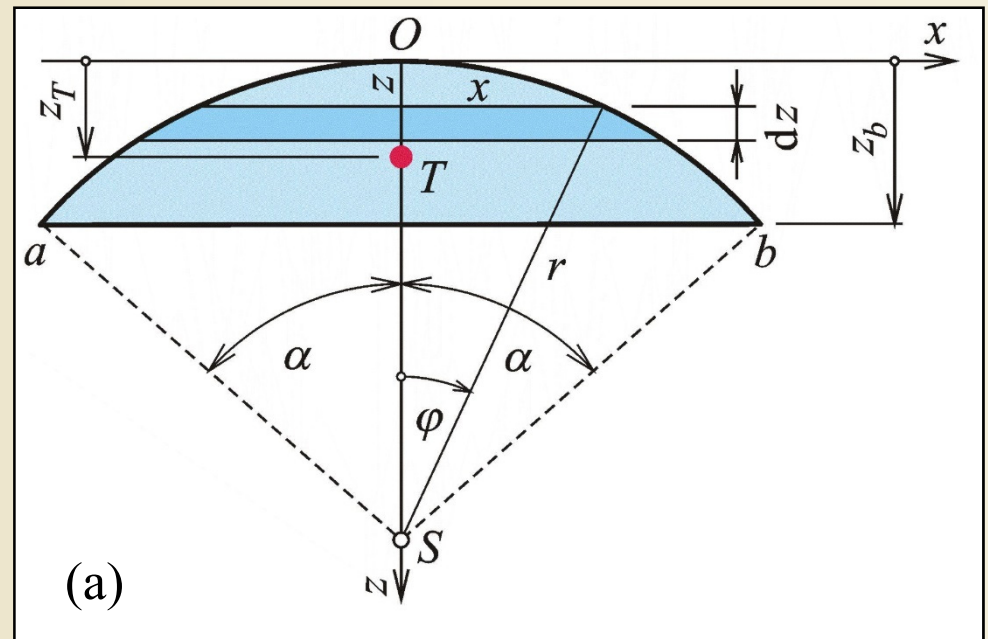
Platí: $x = r \cdot \sin \varphi$ $z = r \cdot (1 - \cos \varphi)$ $dx = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ $dz = r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$ (převod z pravoúhlé soustavy do polární)

Plocha úseče:

$$A = \iint_A dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = 2 \cdot r^2 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

Statický moment:

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_A z \cdot dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{z_b} x \cdot z \cdot dz = \\ &= 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2 \cdot r^3 \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2 \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) \end{aligned}$$



Těžiště kruhové úseče

Obr. 4.14.a. / str. 51

Těžiště kruhové úseče, půlkruhu a čtvrtkruhu

Souřadnice kruhové úseče:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = \frac{2 \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right)}{r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$$

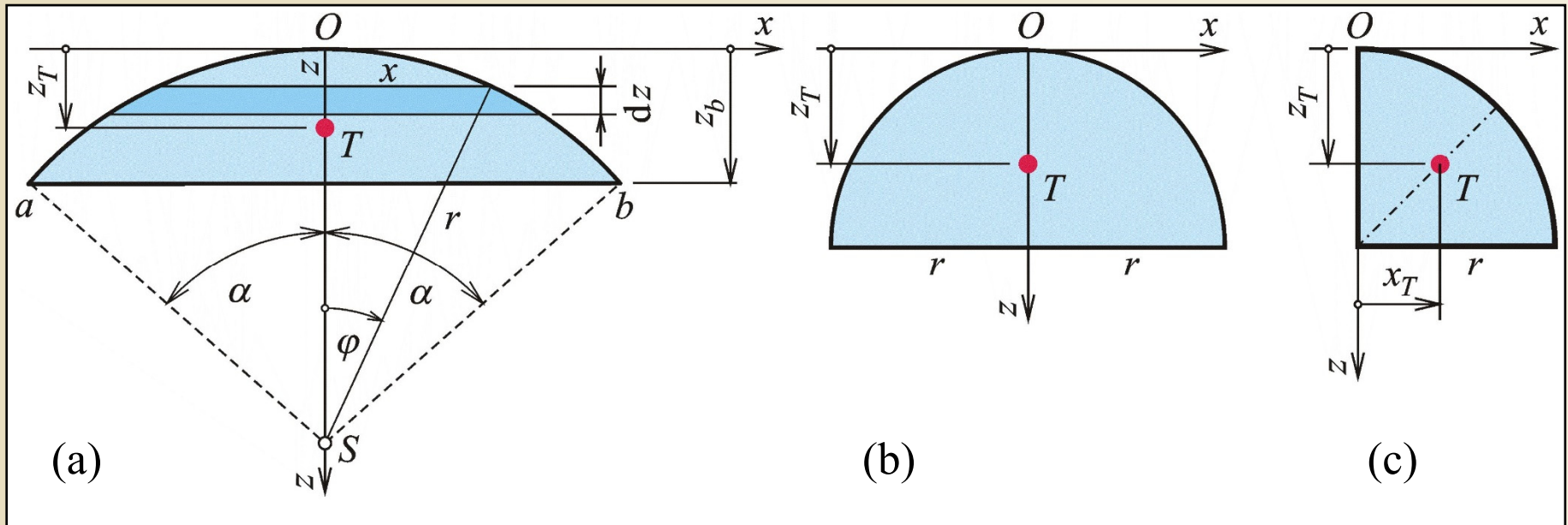
Půlkruh:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3 \cdot \pi} \right) \doteq 0,5756r$$

Čtvrtkruh:

$$x_T = r - z_T = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \doteq 0,4244r$$



Těžiště kruhové úseče (a), půlkruhu (b) a čtvrtkruhu (c)

Obr. 4.14. / str. 51

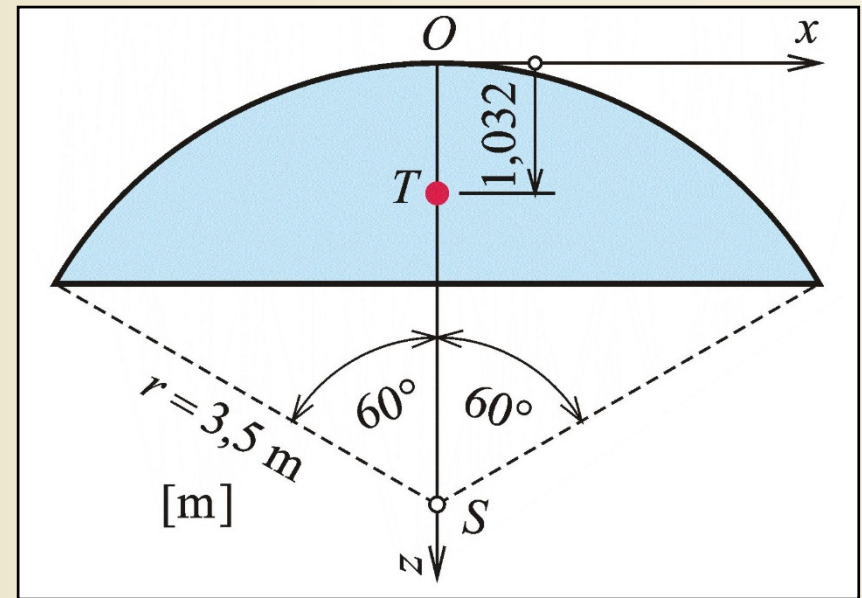
Příklad 9.4

Zadáno: $r = 3,5\text{m}$ $2\alpha = 120^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} = 1,0472\text{rad}$

$z_T = ?$

Řešení:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = 1,032 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.4

Obr. 4.15. / str. 52

Těžiště parabolické úseče

Plocha parabolické úseče:

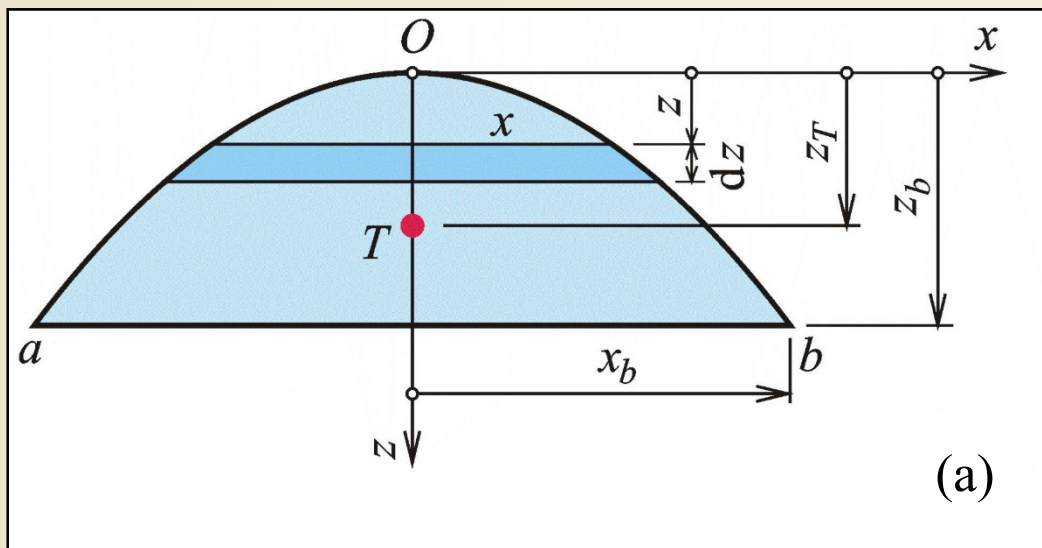
$$A = \iint_A dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{z_b} x \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} x \cdot 2kx \cdot dx = 4k \cdot \int_0^{x_b} x^2 \cdot dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{z_b}{x_b^2} \cdot x_b^3 = \frac{4}{3} \cdot x_b z_b.$$

Statický moment parabolické úseče:

$$S_x = \iint_A z \cdot dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{z_b} z \cdot x \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} kx^3 \cdot 2kx \cdot dx = 4k^2 \cdot \int_0^{x_b} x^4 \cdot dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{z_b^2}{x_b^4} \cdot x_b^5 = \frac{4}{5} \cdot x_b z_b^2.$$

Vzdálenost těžiště:

$$z_T = \frac{4}{5} \cdot x_b z_b^2 \cdot \frac{3}{4 \cdot x_b z_b} = \frac{3}{5} z_b$$



Těžiště parabolické úseče

Obr. 4.16.a. / str. 53

Těžiště poloviny parabolické úseče

Plocha poloviny
parabolické úseče:

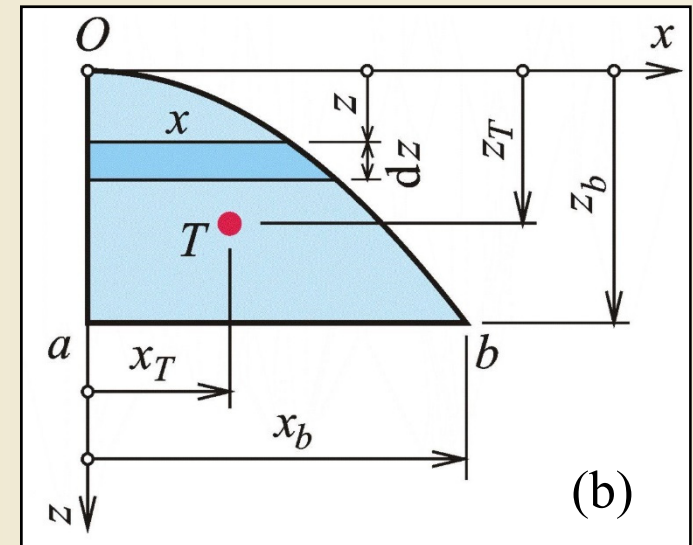
$$A = \frac{2}{3} \cdot x_b z_b.$$

Statický moment
poloviny
parabolické úseče:

$$S_z = \iint_A x \cdot dx \cdot dz = \int_0^{z_b} \left[\int_0^x x \cdot dx \right] dz = \int_0^{z_b} \frac{x^2}{2} \cdot 2kx \cdot dx = k \cdot \int_0^{x_b} x^3 \cdot dx = \frac{z_b}{x_b^2} \cdot \frac{x_b^4}{4} = \frac{1}{4} \cdot x_b^2 z_b$$

Vzdálenost těžiště:

$$x_T = \frac{1}{4} \cdot x_b^2 z_b \cdot \frac{3}{2 \cdot x_b z_b} = \frac{3}{8} x_b$$

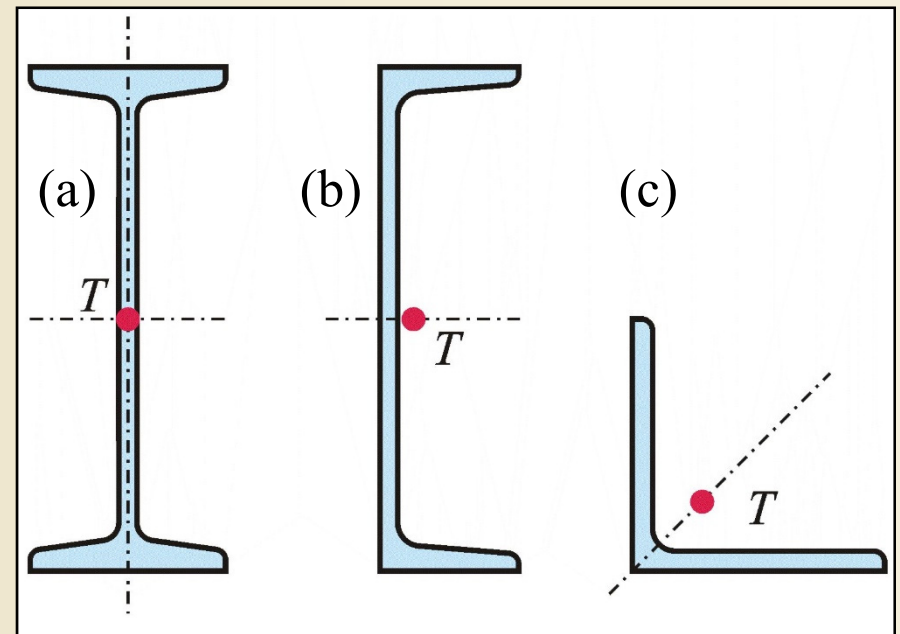


Těžiště poloviny parabolické úseče

Obr. 4.16.b. / str. 53

Těžiště ocelových válcovaných tyčí

Válcované průřezy (profily): různé tvary, I-profil, U-profil, rovnoramenný úhelník



Příklady válcovaných profilů

Obr. 4.17. / str. 53

Ocelové válcované tyče



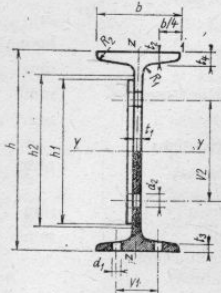
Tabulky ocelových válcovaných profilů

3 SORTIMENT VÁLCOVANÝCH PRŮŘEZŮ

3.1 PRŮŘEZY VÁLCOVANÉ ZA TEPLA

3.1.1 TYČE PRŮŘEZU I, IE, IPE, HEB

3.1.1.1 Tyče průřezu I



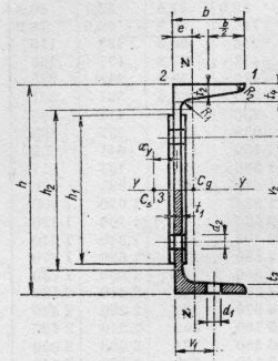
Sklon přírub: I 80—I 330 14 %
I 400 15 %
I 450 16 %
I 500 17 %

- Odpovídající normy:
ČSN 42 5550 Tyče průřezu I. Rozměrová norma.
ON 73 1580 Hodnoty statických veličin průřezů.
ČSN 42 0135 Technické dodací podmínky.
 - Tyče průřezu I se vyrábějí:
z oceli 11 373.0 v rozměrech I 80—I 240
z oceli 11 375.0 v rozměrech I 260—I 500
z oceli 11 523.0 v rozměrech I 80—I 500
 - Tyče průřezu I se dodávají:
 - Ve výrobních délkách. Při objednávce se jejich délka nepředepisuje. Dodavatel dodá tyče v délkách 3 až 12 m.
 - V omezených délkách. Omezené délky volí objednatel v rozsahu výrobních délek v celých metrech s rozmezím nejméně 1,0 m.
 - V přesných délkách. Jmenovanou délkou volí objednatel v rozmezích 3 až 12 m.
- Mezní úchytky jsou:
±100 mm; ±50 mm; ±25 mm; ±10 mm
+200 mm; +100 mm; +50 mm; +20 mm
Mezní úchytky musí být v objednávce uvedena. Pokud není, dodá hut tyče v mezní úchytky ±100 mm.
- V násobcích přesných délek. Při objednávce tyčí v násobcích se dodávají tyče s přídatkem 10 mm na každý řez s celkovou úchytkou +200 mm na délku celé tyče.
 - Délky větší než 12,0 m jen po dohodě s hutí.

Průřez I	Jmenovité rozměry										Vrtání				Povrch
	b	h	h ₁	h ₂	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	R ₁	R ₂	v ₁	d ₁	v ₂	d ₂	A _{su}
	mm														m ² m ⁻¹
80	42	80	45	59	3,9	5,9	4,43	7,4	3,9	2,3	22	8,5	—	13	0,304
100	50	100	65	75	4,5	6,8	5,05	8,6	4,5	2,7	26	11	—	13	0,370
120	58	120	80	92	5,1	7,7	5,67	9,7	5,1	3,1	30	11	40	13	0,439
140	66	140	100	109	5,7	8,6	6,29	10,9	5,7	3,4	34	11	60	13	0,502
160	74	160	110	125	6,3	9,5	6,91	12,1	6,3	3,8	38	13	60	17	0,575
180	82	180	130	142	6,9	10,4	7,53	13,3	6,9	4,1	44	13	80	17	0,640
200	90	200	150	159	7,5	11,3	8,15	14,4	7,5	4,5	46	17	90	21	0,709
220	98	220	160	175	8,1	12,2	8,77	15,6	8,1	4,9	52	17	100	21	0,775
240	106	240	180	192	8,7	13,1	9,39	16,8	8,7	5,2	56	17	120	21	0,844
260	113	260	200	208	9,4	14,1	10,2	18,1	9,4	5,6	58	17	130	21	0,906
280	119	280	210	225	10,1	15,2	11,0	19,4	10,1	6,1	62	21	140	25	0,966
300	125	300	230	241	10,8	16,2	11,8	20,6	10,8	6,5	64	21	150	25	1,03
320	131	320	250	257	11,5	17,3	12,7	21,9	11,5	6,9	70	21	170	25	1,09
340	137	340	270	274	12,2	18,3	13,5	23,1	12,2	7,3	74	21	190	25	1,15
360	143	360	290	290	13,0	19,5	14,5	24,5	13,0	7,8	74	21	200	25	1,21
380	149	380	300	306	13,7	20,5	15,3	25,7	13,7	8,2	80	21	220	25	1,27
400	155	400	320	323	14,4	21,6	16,2	27,0	14,4	8,6	84	25	240	25	1,33
450	170	450	360	363	16,2	24,3	18,4	30,3	16,2	9,7	92	25	280	25	1,48
500	185	500	400	404	18,0	27,0	20,5	33,5	18,0	10,8	100	25	320	25	1,63

3.1.2 TYČE PRŮŘEZU U, UE, UPE

3.1.2.1 Tyče průřezu U

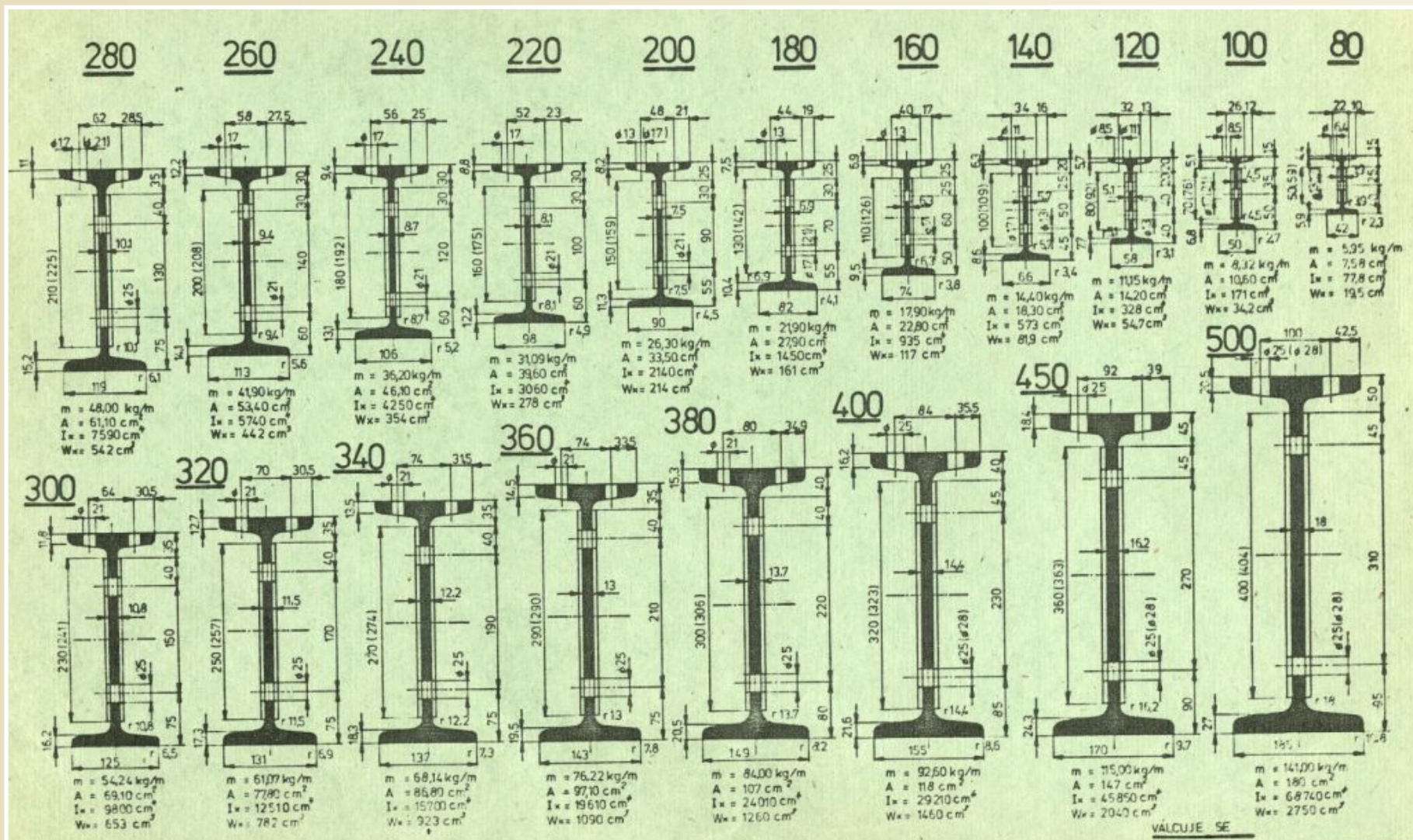


Sklon přírub 8 %

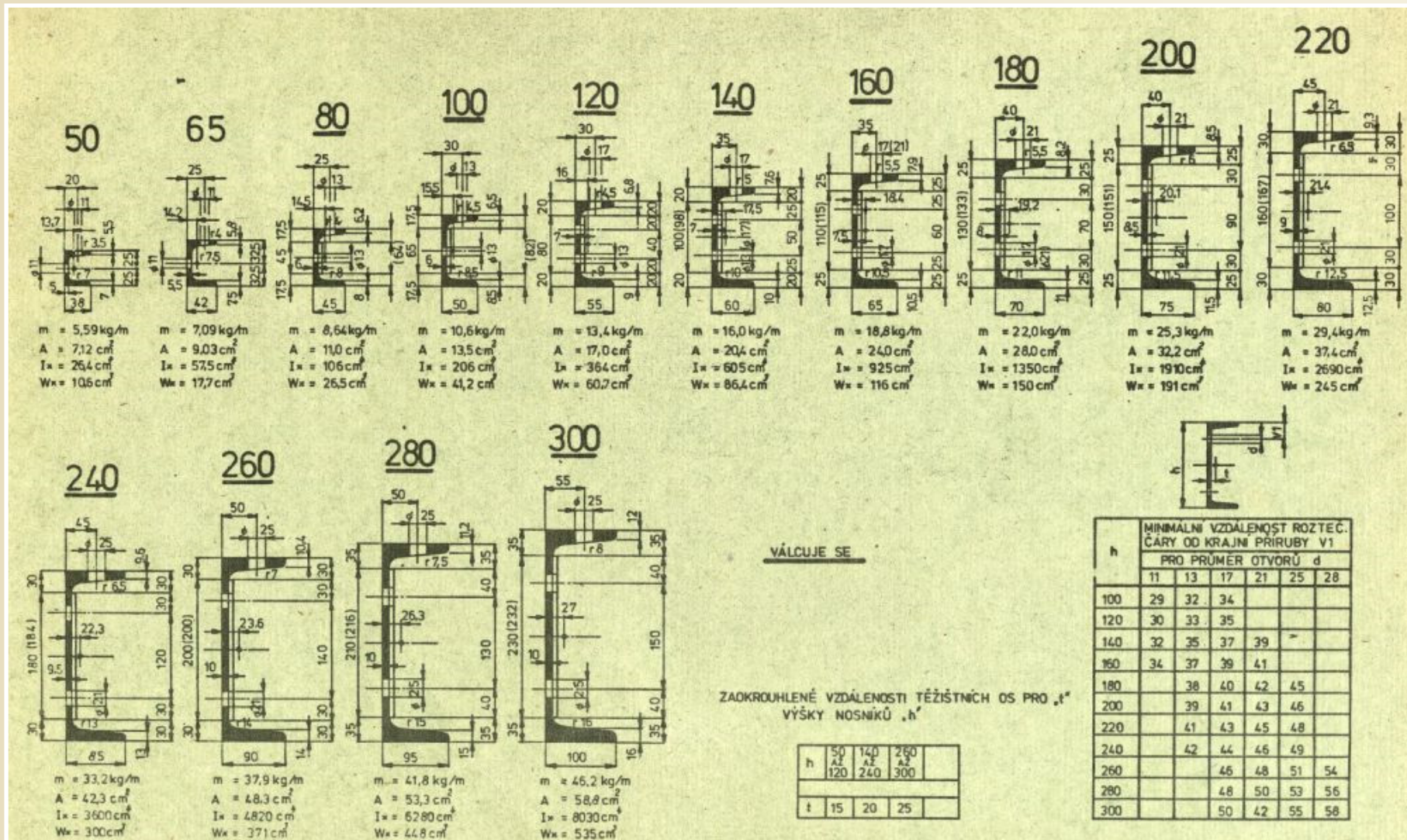
- Odpovídající normy:
ČSN 42 5570 Tyče průřezu U. Rozměrová norma.
ON 73 1580 Hodnoty statických veličin průřezů.
ČSN 42 0135 Technické dodací podmínky.
- Tyče U se vyrábějí:
z oceli 11 373.0 v rozměrech U 50—U 240,
z oceli 11 375.0 v rozměrech U 260—U 300,
z oceli 11 523.0 v rozměrech U 80—U 300.
- Tyče U se dodávají:
 - Ve výrobních délkách. Při objednávce se délka nepředepisuje. Dodavatel dodá tyče v délkách 3 až 12 m.
 - V omezených délkách. Omezené délky volí objednatel v rozsahu výrobních délek v celých metrech s rozmezím nejméně 1,0 m.
 - V přesných délkách. Délky volí objednatel v rozmezí 3 až 12 m.
Mezní úchytky jsou:
±100 mm; ±50 mm; ±25 mm; ±10 mm
+200 mm; +100 mm; +50 mm; +20 mm
Mezní úchytky musí být uvedena v objednávce. Není-li uvedena, dodá hut tyče s mezní úchytkou ±100 mm.
 - V násobcích přesných délek. Tyče se dodávají s přídatkem 10 mm na každý řez a s celkovou úchytkou +200 mm na délku celé tyče.
 - Větší délky než 12,0 m se dodávají jen po dohodě s hutí.

Průřez U	Jmenovité rozměry										Vrtání				Povrch
	b	h	h ₁	h ₂	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	R ₁	R ₂	v ₁	d ₁	v ₂	d ₂	A _{su}
	mm														m ² m ⁻¹
50	38	50	—	—	5,0	7,0	5,48	8,52	7,0	3,5	13,7	20	11	—	0,23
65	42	65	—	—	5,5	7,5	5,82	9,18	7,5	4,0	14,2	25	11	—	0,27
80	45	80	45	46	6,0	8,0	6,2	9,80	8,0	4,0	14,5	25	13	—	0,31
100	50	100	65	64	6,0	8,5	6,5	10,5	8,5	4,5	15,5	30	13	—	0,37
120	55	120	80	82	7,0	9,0	6,8	11,2	9,0	4,5	16,1	30	17	40	0,43
140	60	140	100	98	7,0	10,0	7,6	12,4	10,0	5,0	17,6	35	17	60	0,49
160	65	160	110	115	7,5	10,5	7,9	13,1	10,5	5,5	18,4	35	17	60	0,54
180	70	180	130	133	8,0	11,0	8,2	13,8	11,0	5,5	19,3	40	21	80	0,60
200	75	200	150	151	8,5	11,5	8,5	14,5	11,5	6,0	20,1	40	21	90	0,66
220	80	220	160	167	9,0	12,5	9,3	15,7	12,5	6,5	21,4	45	21	100	0,72
240	85	240	180	184	9,5	13,0	9,6	16,4	13,0	6,5	22,4	45	21	120	0,78
260	90	260	200	200	10,0	14,0	10,4	17,6	14,0	7,0	23,7	50	21	140	0,83
280	95	280	210	216	10,0	15,0	11,2	18,8	15,0	7,5	25,3	50	21	130	0,89
300	100	300	230	232	10,0	16,0	12,0	20,0	16,0	8,0	27,0	55	21	150	0,95

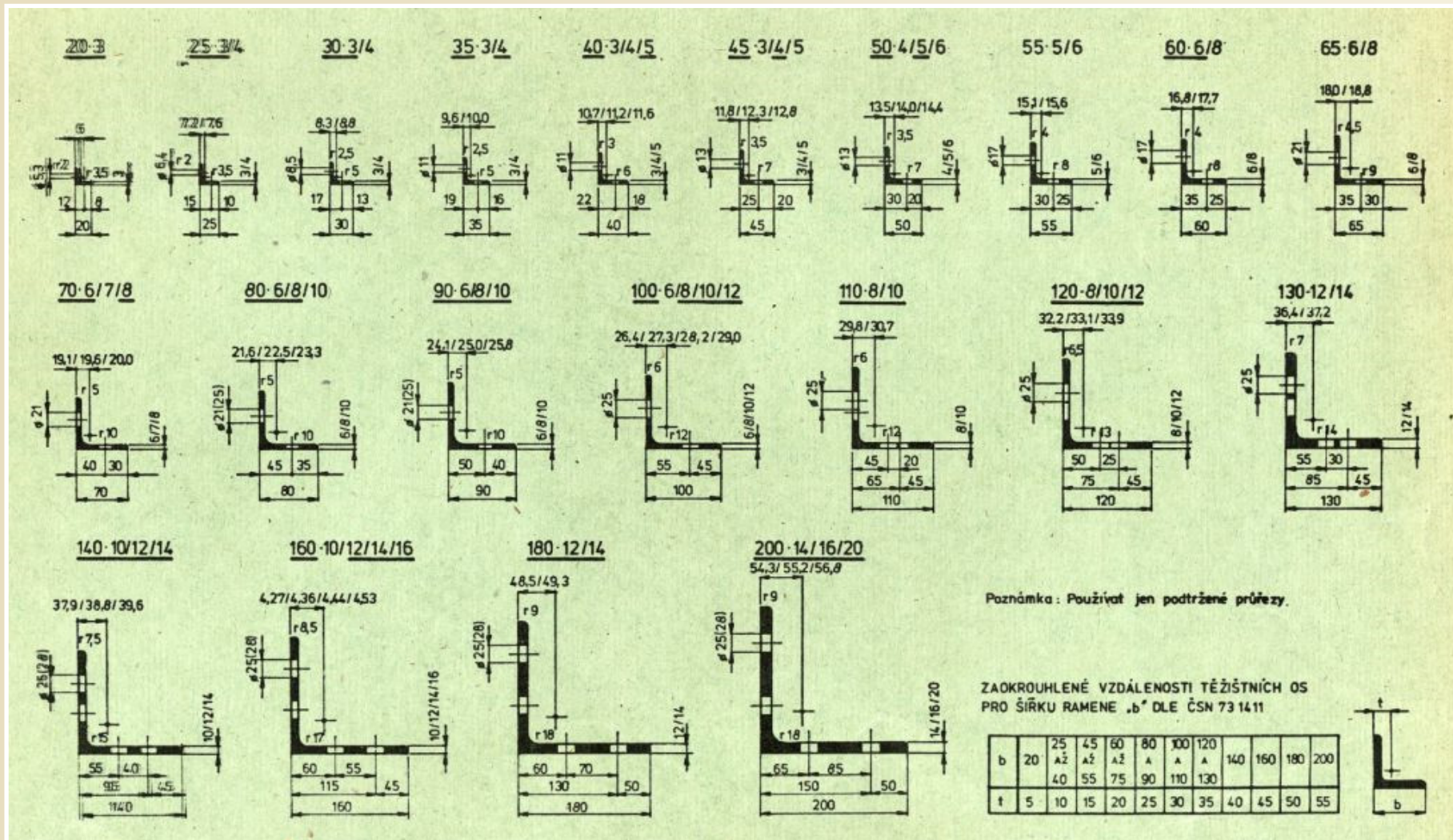
Ocelové válcované tyče profilu I



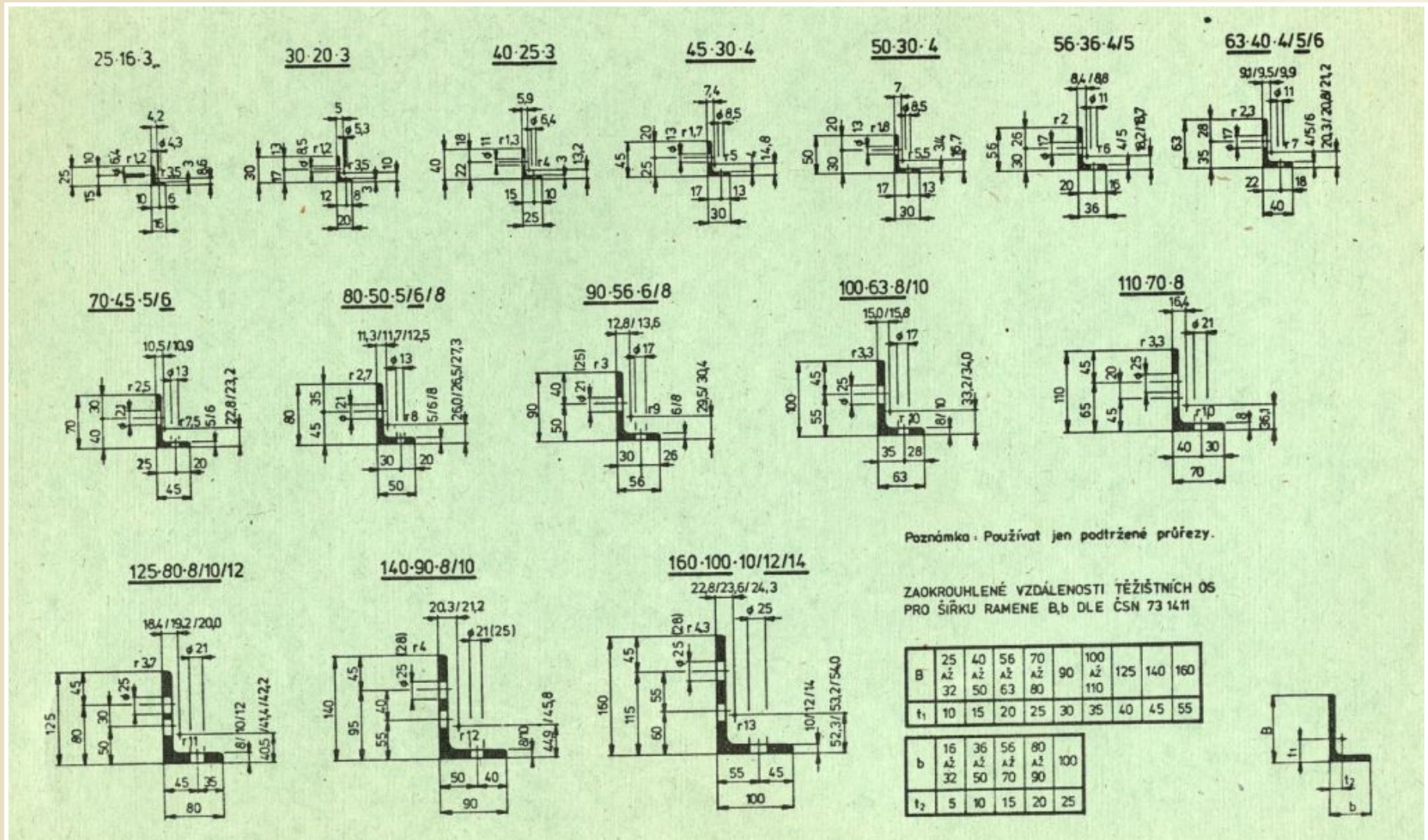
Ocelové válcované tyče profilu U



Ocelové válcované rovnoramenné úhelníky



Ocelové válcované nerovnoramenné úhelníky



Těžiště složených rovinných obrazců

Složený rovinný obrazec vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných obrazců v téže rovině. Prvky s označením $i=1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - homogenní složený rovinný obrazec.

Postup:

- Složený obrazec umístit do pravoúhlé souřadnicové soustavy xz
- Pro každý prvek i vypočítat plochu A_i a odpovídající tíhovou sílu $P_i = \gamma_i \cdot A_i$
- Pro každý prvek i určit souřadnice x_i a z_i jeho těžiště T_i , možno použít lokální souřadnicovou soustavu
- Zavést sílu P_i do těžiště T_i a určit:
(pro homogenní obrazce platí $R=A$)
$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$
- Vypočítat souřadnice těžiště složeného rovinného obrazce

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

Těžiště kosodélníku, lichoběžníku a obecného čtyřúhelníku

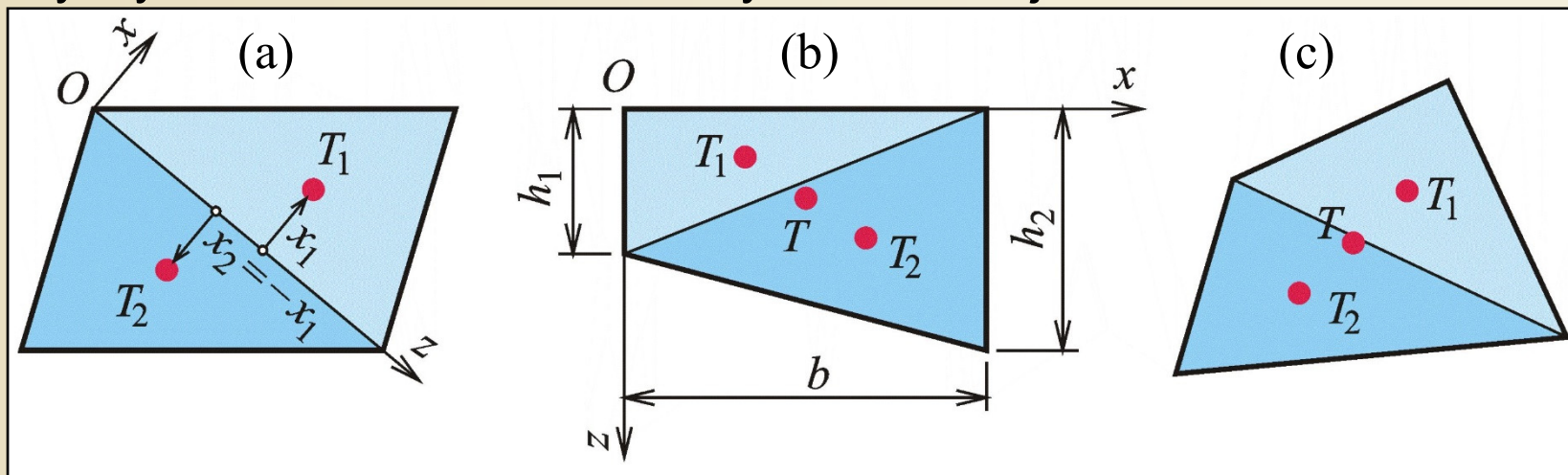
a) kosodélník – úhlopříčka souřadnicová osa z

b) lichoběžník: $A_1 = \frac{b \cdot h_1}{2}$ $x_1 = \frac{b}{3}$ $z_1 = \frac{h_1}{3}$ $A_2 = \frac{b \cdot h_2}{2}$ $x_2 = \frac{2 \cdot b}{3}$ $z_2 = \frac{(h_1 + h_2)}{3}$

$$R = A = \frac{b \cdot (h_1 + h_2)}{2} \quad S_x = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{3} = \frac{b}{6} \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)$$

$$S_z = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{b}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{2 \cdot b}{3} = \frac{b^2}{6} \cdot (h_1 + 2 \cdot h_2) \quad x_T = \frac{b}{3} \cdot \frac{h_1 + 2 \cdot h_2}{h_1 + h_2} \quad z_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2}$$

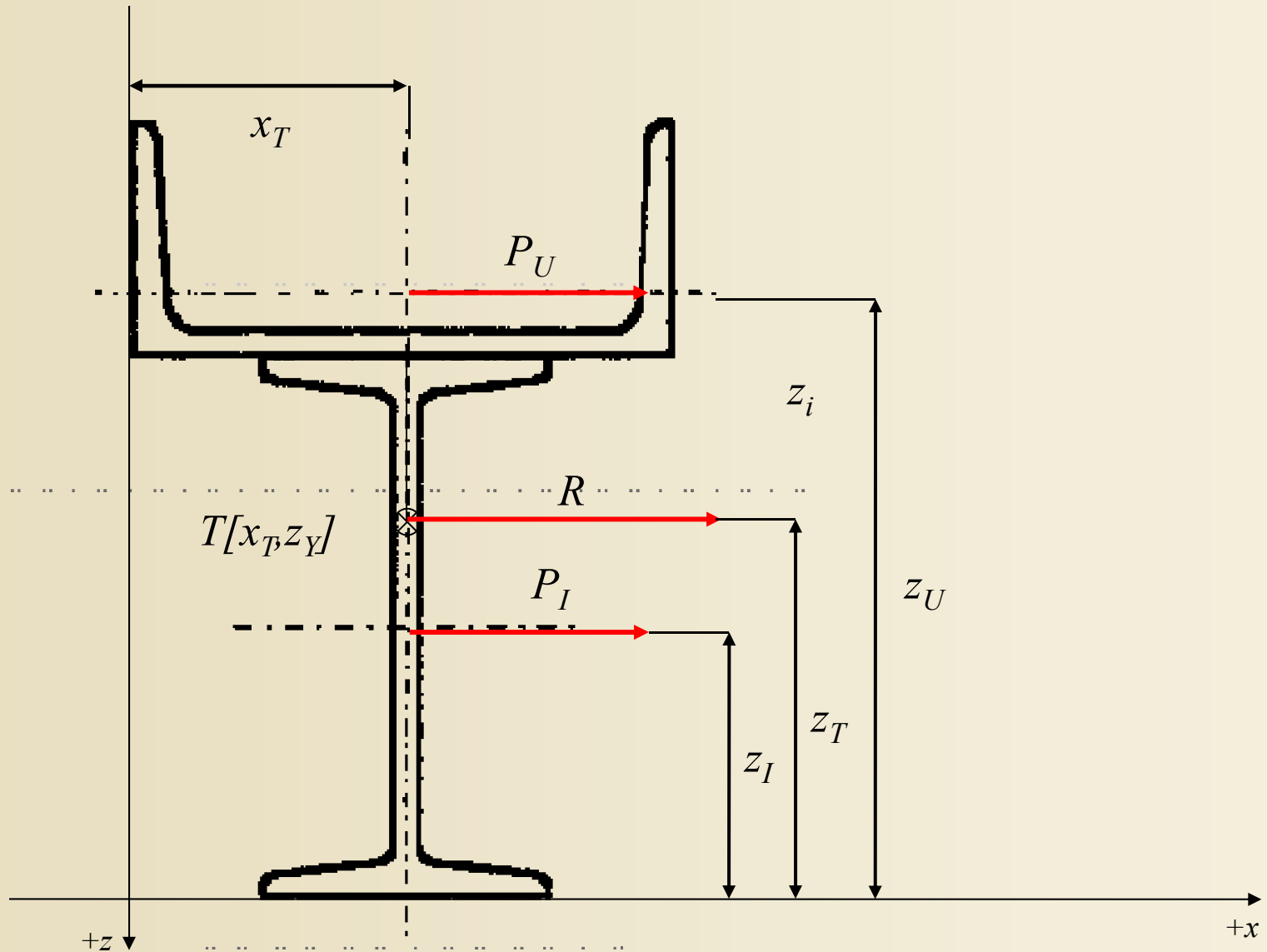
c) obecný čtyřúhelník – obrazec složený ze dvou trojúhelníků



Těžiště kosodélníku (a), lichoběžníku (b) a obecného čtyřúhelníku (c)

Obr. 4.18. / str. 54

Těžiště rovinného obrazce složeného z válcovaných tyčí



Těžiště složených obrazců s otvory a výřezy

Zvláštní případ složených obrazců – **s otvory** (*s oslabením*) nebo **s výřezy** (otvory sousedící s obrysem obrazce)

Výpočet:

Jednotlivé obrazce považovat za samostatné prvky bez otvorů, otvory považovat za další prvky se *zápornou* plochou a měrnou tíhou stejnou jako obrazec obklopující.

Příklad 9.5

Zadáno: homogenní složený rovinný obrazec oslabený otvory, složený z půlkruhu $r=0,3\text{m}$, obdélníku a dvou kruhových otvorů o $r=0,1\text{m}$.

Výpočet těžiště:

a) plochy a souřadnice těžišť prvků i

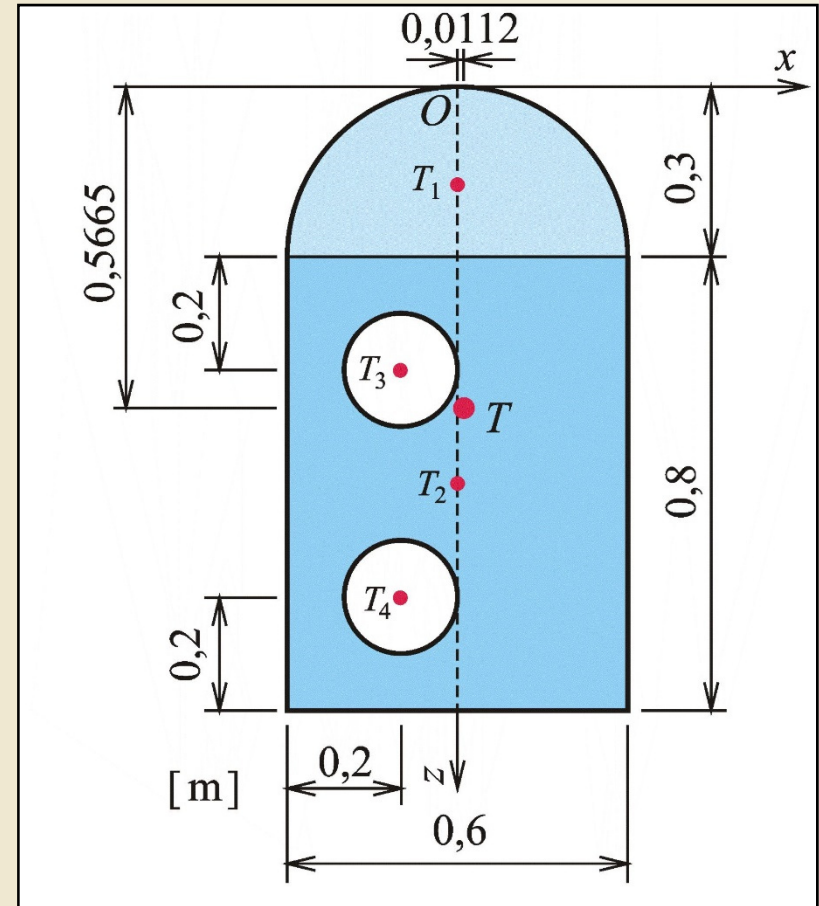
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,5585 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,3164 \text{ m}^3 \quad S_z = +0,00628 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = 0,0112 \text{ m} \quad z_T = 0,5665 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.5

Obr. 4.19. / str. 55

Příklad 9.6

Zadáno: tíhově homogenní rovinný obrazec tvaru **L** (lze řešit jako dva obdélníky nebo jako obdélník opsán průřezu a jeho obdélníkový výřez)

Výpočet těžiště:

a) plochy a souřadnice těžišť prvků i

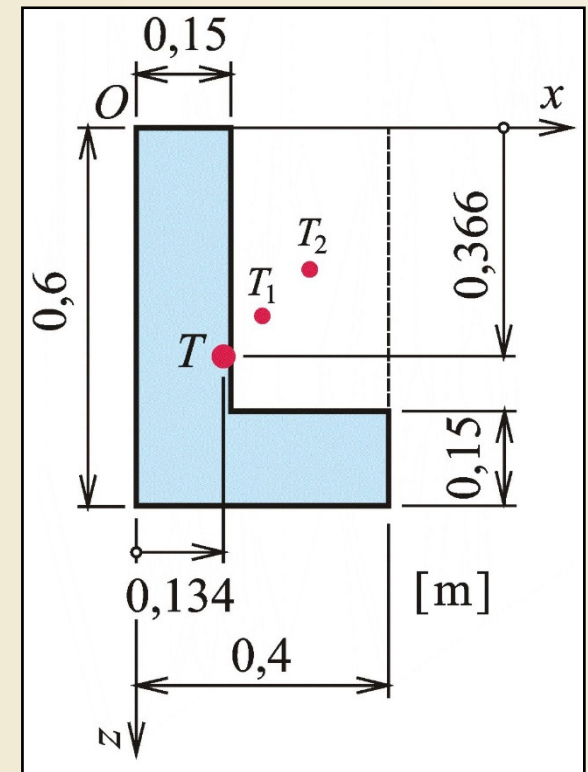
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,1275 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,04669 \text{ m}^3 \quad S_z = 0,01706 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = 0,134 \text{ m} \quad z_T = 0,366 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.6

Obr. 4.20. / str. 56

Příklad 9.7

Zadáno: tíhově nehomogenní rovinný obrazec ze tří obdélníků, γ_1 a $\gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 3$

Výpočet těžiště:

a) tíhové síly a souřadnice těžišť prvků i

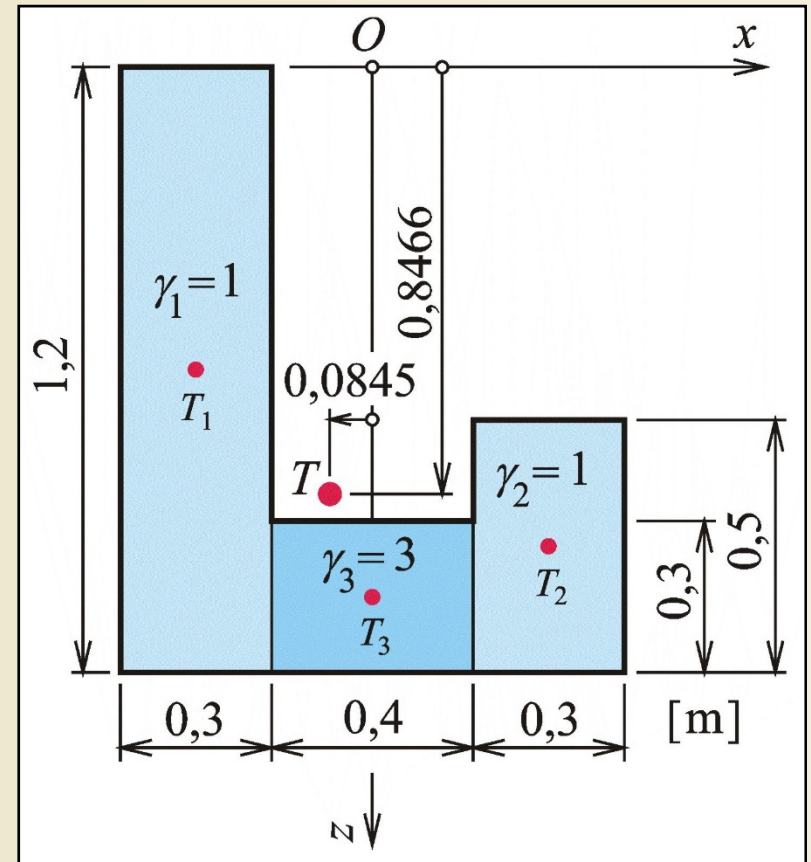
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,87 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,7365 \text{ m}^3 \quad S_z = -0,0735 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = -1,230 \text{ m} \quad z_T = 1,210 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.7

Obr. 4.21. / str. 56

1. Výpočet těžiště rovinných čar
2. Výpočet těžiště jednoduchých rovinných obrazců
3. Výpočet těžiště složených rovinných obrazců