

Téma 5 Lomený a zakřivený nosník

- Rovinně lomený nosník v rovinné úloze
- Rovinně lomený nosník v příčné úloze
- Prostorově lomený nosník
- Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze



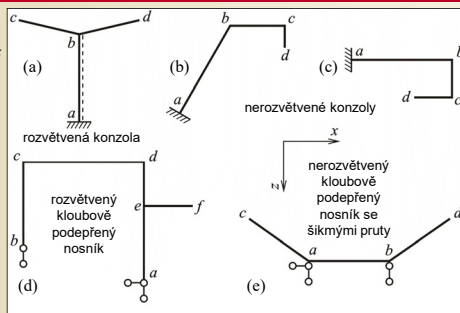
Katedra stavební mechaniky
Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava

Rovinně lomený nosník v rovinné úloze

- $n_r = 3$
- hlavní rovina xz
- uzly $a..f$

Orientace prutů – **levý** a **pravý** uzel dle uspořádané dvojice písmen

Výpočet složek reakcí dle podmínek rovnováhy.



Příklady různých tvarů a způsobů podepření rovinně lomených nosníků v rovinné úloze
Obr. 8.1. / str. 124

Rovinně lomený nosník v rovinné úloze

2 / 55

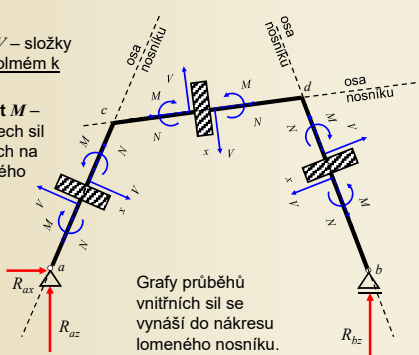
Rovinně lomený nosník v rovinné úloze

Výpočet vnitřních sil:

a) **Posouvající síla V** – složky všech sil ve směru kolmém k ose prutu

b) **Ohybový moment M** – statické momenty všech sil a momentů působících na zvolenou část lomeného nosníku

c) **Normálová síla N** – složky všech sil ve směru osy prutu

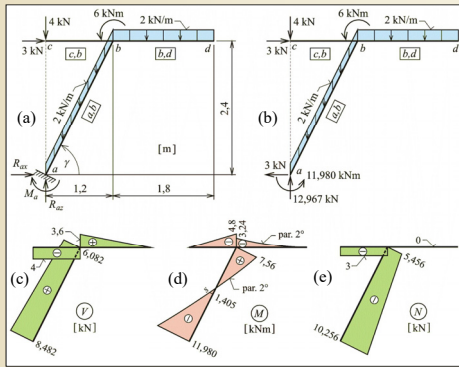


Rovinně lomený nosník v rovinné úloze

3 / 55

Příklad 5.1

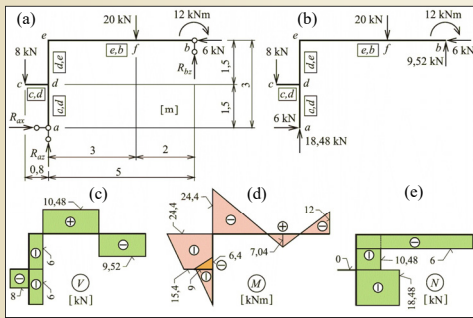
Zadání:
výpočet všech tří složek reakcí lomené konzoly a průběhy vnitřních sil



Zadání a řešení příkladu 5.1
Obr. 8.2. / str. 126

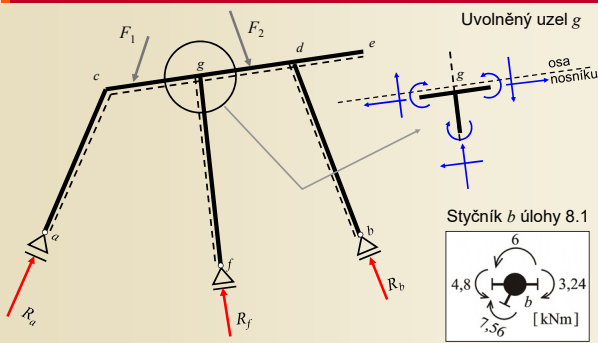
Příklad 5.2

Zadání:
výpočet všech tří složek reakcí kloubové podepřené rovinné lomené nosníku a průběhy vnitřních sil

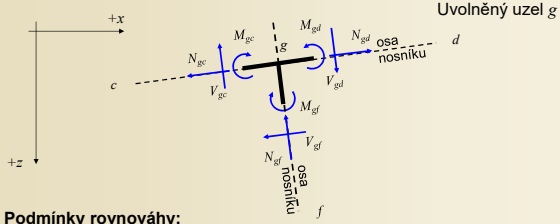


Zadání a řešení příkladu 5.2
Obr. 8.3. / str. 128

Kontrola rovnováhy styčnicků



Kontrola rovnováhy styčnicků



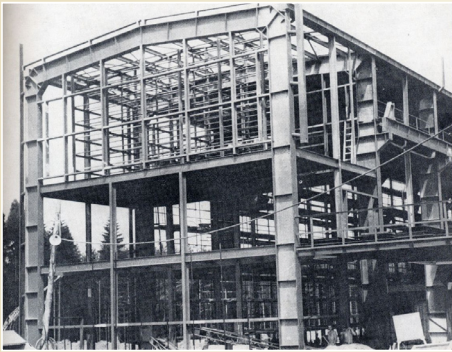
Podmínky rovnováhy:

1. $R_x = 0$ $-N_{gc,x} - V_{gc,x} - N_{gf,x} - V_{gf,x} + N_{gd,x} + V_{gd,x} = 0$
2. $R_z = 0$ $N_{gc,z} - V_{gc,z} - N_{gf,z} + V_{gf,z} - N_{gd,z} + V_{gd,z} = 0$
3. $\Sigma M_{ig} = 0$ $-M_{gc} - M_{gf} + M_{gd} = 0$

Rovinně lomený nosník v rovinné úložce

7 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovinné úložce



Typická ocelová rámová konstrukce, rozpětí 20,5 m

Rovinně lomený nosník v rovinné úložce

8 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovinné úložce

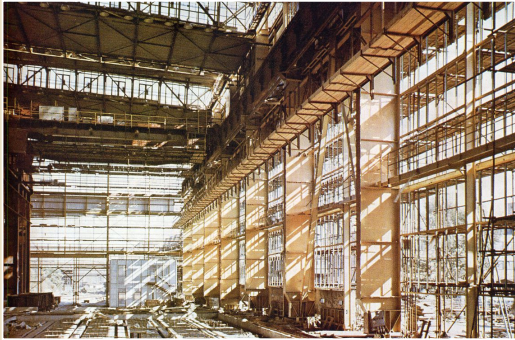


Hala pro výrobu komponent jaderných elektráren, půdorys 130 x 320 m, jeřáby o nosnosti 80 a 200 t, poddolované území, Ostrava - Vítkovice

Rovinně lomený nosník v rovinné úložce

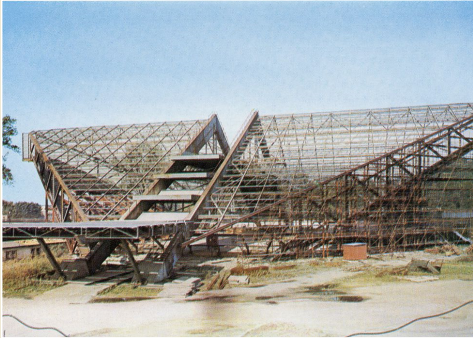
9 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovinné úložce



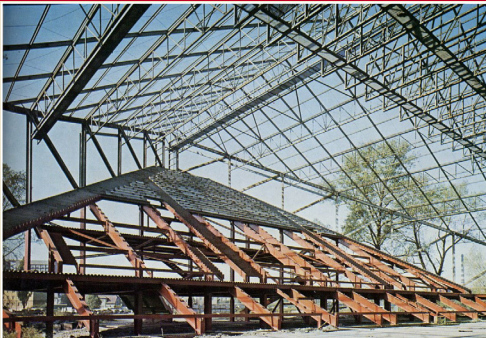
Dvojhalí, půdorys 30 a 24 m, jeřáby o nosnosti 80 a 50 t, poddolované území, Ostrava - Vítkovice
Rovinné lomený nosník v rovinné úložce 10 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovinné úložce



Víceúčelová hala, čtvercový půdorys o straně 82,26 m, výška 31,06 m, hlavní nosný prvek střechy tvoří 2 rámy tvaru A, rozpětí 118,12 m, vzdálenost 10,2 m, průřez truhlíkový 3,65 m x 0,8 m, F-M
Rovinné lomený nosník v rovinné úložce 11 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovinné úložce



Víceúčelová hala, čtvercový půdorys o straně 82,26 m, výška 31,06 m, hlavní nosný prvek střechy tvoří 2 rámy tvaru A, rozpětí 118,12 m, vzdálenost 10,2 m, průřez truhlíkový 3,65 m x 0,8 m, F-M
Rovinné lomený nosník v rovinné úložce 12 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovině úloze

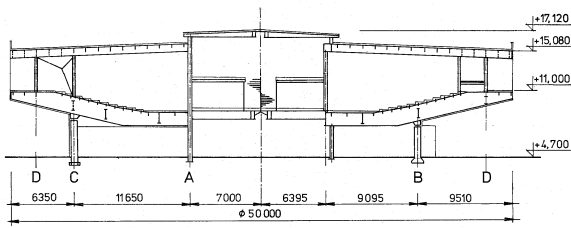


Posluchárny Vysoké školy báňské – Technická univerzita Ostrava

Rovinně lomený nosník v rovině úloze

13 / 55

Ukázky lomených nosníků v rovině úloze



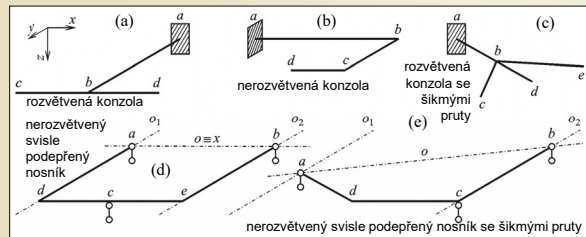
Posluchárny Vysoké školy báňské – Technická univerzita Ostrava, průměr budovy 50 m, 15 radiálně umístěných plnostěnných svařovaných nosníků ve středu vetknuty do prstence uzavřeného průřezu

Rovinně lomený nosník v rovině úloze

14 / 55

Rovinně lomený nosník v příčné úloze

- $n_v = 3$ Orientace prutů – levý a pravý uzel dle uspořádané dvojice písmen
- hlavní rovina xy
- uzly $a..e$ Výpočet složek reakcí dle podmínek rovnováhy.



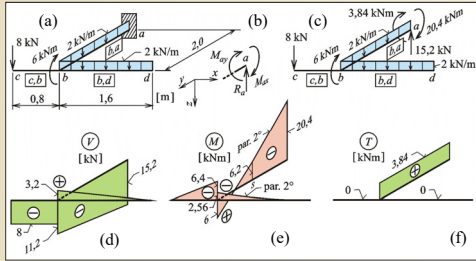
Příklady různých tvarů a způsobů podepření rovinně lomených nosníků v příčné úloze
 Obr. 8.5. / str. 130

Rovinně lomený nosník v příčné úloze

15 / 55

Příklad 5.3

Zadání:
výpočet všech tří složek reakcí rovinně lomené konzoly a průběhy vnitřních sil

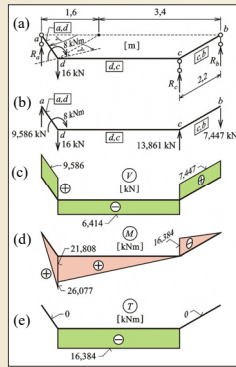


Zadání a řešení příkladu 5.3
Obr. 8.6. / str. 132

Rovinně lomený nosník v příčné úložce

Příklad 5.4

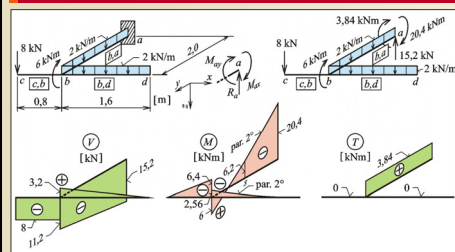
Zadání:
výpočet všech tří složek reakcí svise podepřeného rovinně lomeného nosníku a průběhy vnitřních sil



Zadání a řešení příkladu 5.4
Obr. 8.7. / str. 133

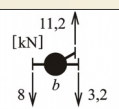
Rovinně lomený nosník v příčné úložce

Kontrola rovnováhy styčníků



Styčnick \$b\$ úlohy 5.3

$$R_c = 0: -V_{bc} + V_{bd} + V_{ba} = 0$$



Silová rovnováha styčnicku
Obr. 8.8. / str. 135

Rovinně lomený nosník v příčné úložce

Ukázka zakřiveného nosníku v příčné úloze

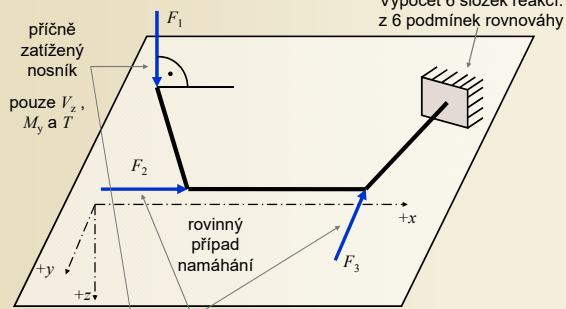


Balkónové nosníky nosné konstrukce základní školy, Brumov – Bylnice, projekt OKM

Rovinně lomený nosník v příčné úloze

19 / 55

Rovinně lomený nosník v příčné úloze



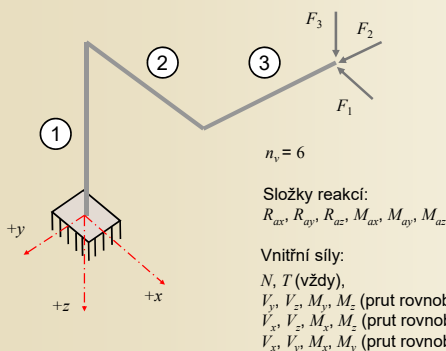
Výpočet 6 složek reakcí: z 6 podmínek rovnováhy

Zatížení i složky reakcí lze rozložit do roviny střednice a do roviny kolmé

Rovinně lomený nosník v příčné úloze

20 / 55

Prostorově lomený nosník



$$n_v = 6$$

Složky reakcí:
 $R_{ax}, R_{ay}, R_{az}, M_{ax}, M_{ay}, M_{az}$

Vnitřní síly:

- N, T (vždy),
- V_y, V_z, M_y, M_z (prut rovnoběžný s osou x)
- V_x, V_z, M_x, M_z (prut rovnoběžný s osou y)
- V_x, V_y, M_x, M_y (prut rovnoběžný s osou z)

Prostorově lomený nosník

21 / 55

Příklad 5.5

Zadání:
výpočet všech šesti složek reakcí
prostorově lomeného nosníku a průběhy
vnitřních sil

Vnitřní síly:
 N, T (vždy),
 V_y, V_z, M_y, M_z (prut rovnoběžný s osou x)
 $\bar{V}_y, \bar{V}_z, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ (prut rovnoběžný s osou y)
 V_x, V_y, M_x, M_y (prut rovnoběžný s osou z)

Zadání a řešení příkladu 5.5
Obr. 8.9. / str. 137

Prostorově lomený nosník 22 / 55

Tvar a podepření rovinného zakřiveného nosníku v rovinné úložce

Tvar střednice:
nejčastěji **oblouk kvadratické paraboly**, kružnice, paraboly
 4° , řetězovky.

$$z(x) = k \cdot x^2 \quad k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{dx} = [k \cdot x^2] = 2k \cdot x$$

Složky reakcí z podmínek rovnováhy

Tvar a podepření rovinného zakřiveného nosníku v rovinné úložce
Obr. 8.10. / str. 139

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce 23 / 55

Zatížení rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úložce

Spojitá zatížení: svislá a vodorovná na jednotku délky, délky vodorovné, svislého průmětu, kolmé, tečné ke střednici.

$$\bar{q} = q \cdot \cos \psi \quad \bar{p} = p \cdot \sin \psi \quad \bar{q} = q^* \cdot \cos \psi \quad \bar{p} = -q^* \cdot \sin \psi \quad \bar{p} = n \cdot \cos \psi \quad \bar{q} = n \cdot \sin \psi$$

Různé typy zatížení rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úložce
Obr. 8.11. / str. 140

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce 24 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Gateway Arch, rozpětí a vzepětí ocelového oblouku z roku 1966 192,5 m, Saint Louis, Missouri.
Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze 25 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Gateway Arch, rozpětí a vzepětí ocelového oblouku z roku 1966 192,5 m, Saint Louis, Missouri.
Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze 26 / 55

Prostorově zakřivený nosník



Prostorově zakřivený nosník mostu Zubizuri Bridge, Bilbao, Španělsko
Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze 27 / 55

Prostorově zakřivený nosník



Prostorově zakřivený nosník mostu Zubizuri Bridge, Bilbao, Španělsko

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

28 / 55

Prostorově zakřivený nosník

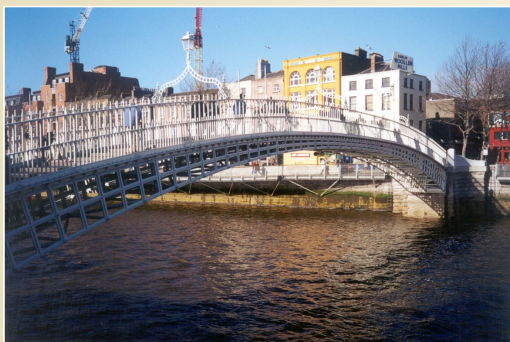


Detail prostorově zakřiveného nosníku mostu Zubizuri Bridge, Bilbao, Španělsko

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

29 / 55

Zakřivený rámový nosník



Zakřivený rámový nosník mostu Ha'penny Bridge, Dublin, Irsko

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

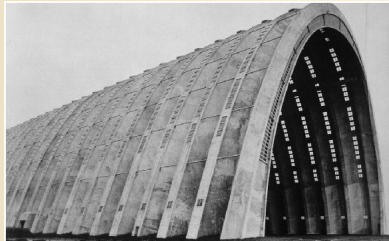
30 / 55

Klenbová parabolická skořepina



Eugene Freyssinet
(1879-1962)

Francouzský inženýr, průkopník v oblasti předpjatého železobetonu, tvůrce mnoha konstrukcí a mostů s využitím optimální geometrie nosného systému.

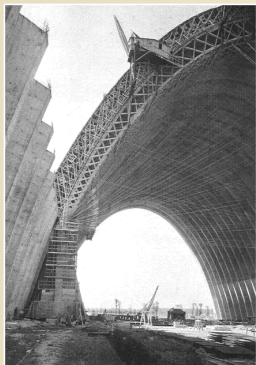


Hangáry pro říditelné vzducholoďe v Orly, Paříž, Francie, žebrovaná válcová klenbová železobetonová skořepina s parabolickým tvarem, rozpětí 75 m, výstavba 1921-23, zničeno 1944.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

31 / 55

Klenbová parabolická skořepina

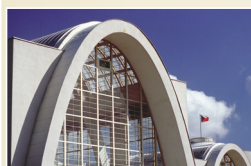


Hangáry pro říditelné vzducholoďe v Orly, Paříž, Francie, žebrovaná válcová klenbová železobetonová skořepina s parabolickým tvarem, rozpětí 75 m, výstavba 1921-23, zničeno 1944.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

32 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Výstavní pavilon A ve funkcionalistickém stylu z roku 1928 o ploše 12 500 m², autor projektu železobetonové konstrukce arch. Emil Králík, výstaviště, Brno.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

33 / 55

Rovinně zakřivený nosník

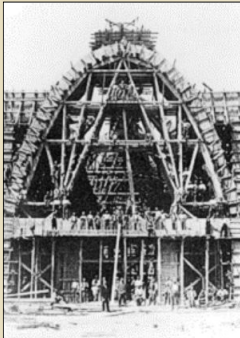


Výstavní pavilon A ve funkcionalistickém stylu z roku 1928 o ploše 12 500 m², autor projektu železobetonové konstrukce arch. Emil Králík, výstaviště, Brno.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

34 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Výstavní pavilon A ve funkcionalistickém stylu z roku 1928 o ploše 12 500 m², autor projektu železobetonové konstrukce arch. Emil Králík, výstaviště, Brno.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

35 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

36 / 55

Rovinně zakřivený nosník

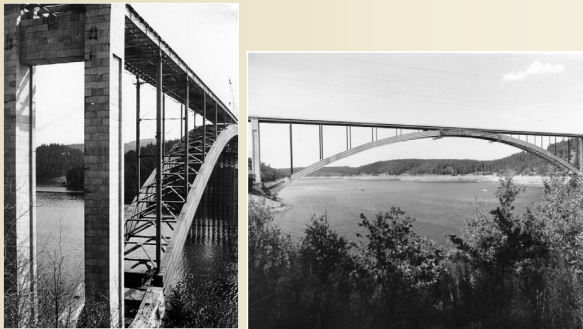


Žďákovský obloukový most z roku 1965, délka 540 m, hlavní oblouk o rozpětí 330 m podpírá konstrukci mostovky ve výšce 50 m nad hladinou jezera Orlické přehrady.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

37 / 55

Rovinně zakřivený nosník

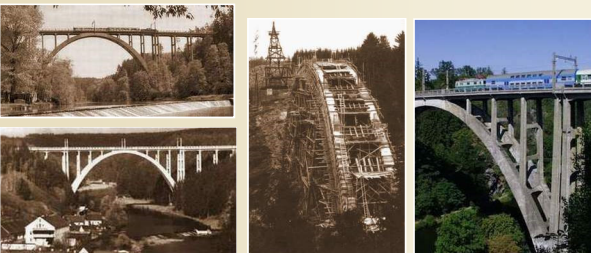


Žďákovský obloukový most z roku 1965, délka 540 m, hlavní oblouk o rozpětí 330 m podpírá konstrukci mostovky ve výšce 50 m nad hladinou jezera Orlické přehrady.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

38 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Železobetonový obloukový most „Bechyňská duha“ z roku 1928 přes řeku Lužnici, 2 obloukové pásy obdélníkového průřezu, rozpětí oblouku 90 m, vzepětí 38 m, oblouky se směrem k vrcholu zužují z 8,25 na 6,0 m, celková délka mostu 224,8 m.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

39 / 55

Rovinně zakřivený nosník



Rovinně zakřivený vazník, Výzkumné energetické centrum VŠB-TU Ostrava

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

40 / 55

Prostorově zakřivený nosník

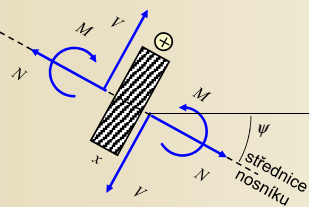


Železobetonový předpjatý tramvajový most Brno – Pisárky, specifický svým zakřivením, stoupáním a nestějnou tloušťkou, šířky 9 m.

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

41 / 55

Výpočet vnitřních sil v zadaném průřezu

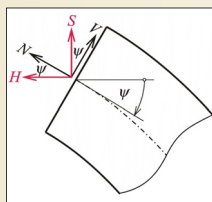
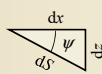


Sklon tečny ke střednici nosníku

$$z(x) = k \cdot x^2$$

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{dx} = [k \cdot x^2]' = 2 \cdot k \cdot x$$



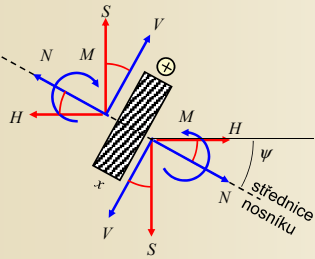
Pomocné vnitřní síly
Obr. 8.12. / str. 141

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

42 / 55

Výpočet vnitřních sil v zadaném průřezu

Rozklad sil na složky rovnoběžné a kolmé k tečně



$$\operatorname{tg} \psi = 2 \cdot k \cdot x$$

$$N = H \cdot \cos \psi + S \cdot \sin \psi$$

$$V = -H \cdot \sin \psi + S \cdot \cos \psi$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

43 / 55

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu

$$R_{\text{kolmo ke střednici}} = 0: (V + dV) \cdot \cos d\psi - V + (N + dN) \cdot \sin d\psi + q^* \cdot ds = 0 \rightarrow \frac{dV}{ds} = -\frac{N}{r} - q^*$$

$$R_{\text{směr tečny ke střednici}} = 0: (N + dN) \cdot \cos d\psi - N + (V + dV) \cdot \sin d\psi + n \cdot ds = 0 \rightarrow \frac{dN}{ds} = \frac{V}{r} - n$$

$\Sigma M_{i,s} = 0:$

$$(M + dM) - M - (V + dV) \cdot ds + m \cdot ds = 0$$

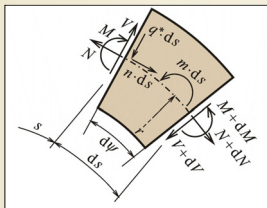
$$\rightarrow \frac{dM}{ds} = V - m$$

Extrémy vnitřních sil:

a) lokální extrém $V \rightarrow N = 0$

b) lokální extrém $N \rightarrow V = 0$

c) lokální extrém $M \rightarrow V = 0$



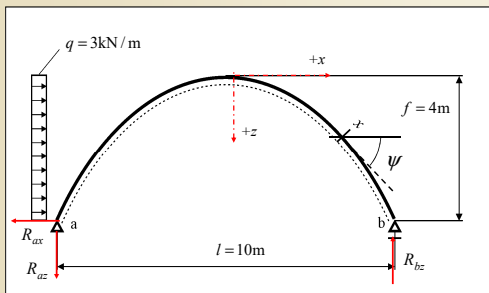
Diferenciální podmínky rovnováhy elementu rovinně zakřiveného nosníku v rovinné úloze
Obr. 8.13. / str. 141

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

44 / 55

Příklad rovinně zakřiveného nosníku

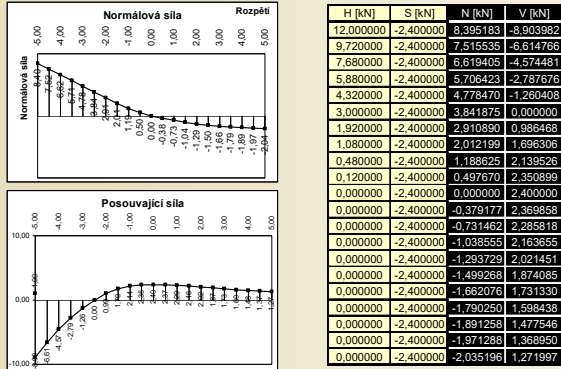
Zadání geometrie konstrukce a zatížení:



Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze

45 / 55

Příklad – výpočet normálových a posouvajících sil



Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

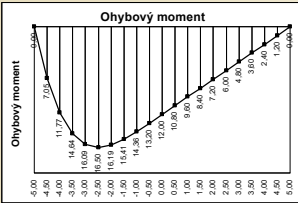
Příklad – výpočet ohybového momentu

levá polovina

$$M = R_{ax}(f-z) - R_{az}\left(\frac{f}{2} + x\right) - \frac{q(f-z)^2}{2}$$

pravá polovina

$$M = R_{ax}(f-z) - R_{az}\left(\frac{f}{2} + x\right) + qf\left(\frac{f-z}{2}\right)$$

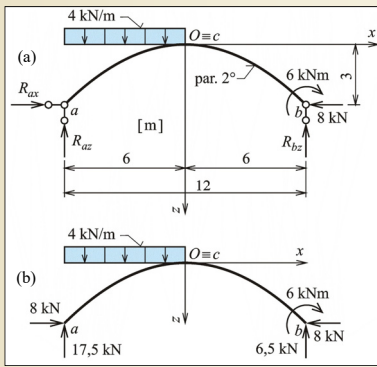


$-R_{ax}(f/2+x)$	$+R_{az}(f-z)$	$-q(f-z)^2/2$	M [kNm]
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-1,200000	9,120000	-0,866400	7,053600
-2,400000	17,280000	-3,110400	14,769600
-3,600000	24,480000	-6,242400	14,637600
-4,800000	30,720000	-9,330400	16,089600
-6,000000	36,000000	-13,500000	16,500000
-7,200000	40,320000	-16,934400	16,185600
-8,400000	43,680000	-19,874400	15,405600
-9,600000	46,080000	-22,118400	14,381600
-10,800000	47,520000	-23,522400	13,197600
-12,000000	48,000000	-24,000000	12,000000
-13,200000	47,520000	-23,520000	10,800000
-14,400000	46,080000	-22,080000	9,600000
-15,600000	43,680000	-19,680000	8,400000
-16,800000	40,320000	-16,320000	7,200000
-18,000000	36,000000	-12,000000	6,000000
-19,200000	30,720000	-6,720000	4,800000
-20,400000	24,480000	-0,480000	3,600000
-21,600000	17,280000	6,720000	2,400000
-22,800000	9,120000	14,880000	1,200000
-24,000000	0,000000	24,000000	0,000000
-q · f(f/2-z)			

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

Příklad 5.6

Zadáni:
určit tři složky reakci rovinného zakřiveného nosníku v rovinné úložce se střednicí tvořenou kvadratickou parabolou, sestrojít průběhy vnitřních sil.



Zadáni příkladu 5.6
Obr. 8.14 / str. 142

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

Příklad 5.6

Tabulkový výpočet (Excel)

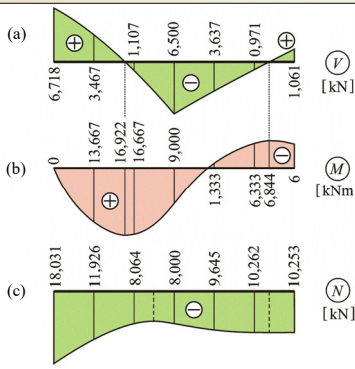
x	z	lg v	v [rad]	v [deg]	cos v	sin v	H [kN]	S [kN]	N [kN]	V [kN]	M [kNm]
-6,00	3,00	-1,000000	-0,785398	-45,000000	0,707107	-0,707107	-8,000000	17,500000	-18,031223	6,717514	0,000000
-5,40	2,43	-0,900000	-0,732515	-41,987212	0,743294	-0,668995	-8,000000	15,100000	-16,047721	5,874024	-0,222000
-4,80	1,82	-0,800000	-0,674741	-38,655868	0,780869	-0,624652	-8,000000	12,700000	-14,138876	4,919473	-0,443000
-4,20	1,47	-0,700000	-0,610726	-34,992020	0,819232	-0,573462	-8,000000	10,300000	-12,468318	3,853389	-0,738000
-3,60	1,08	-0,600000	-0,540420	-30,963757	0,857493	-0,514496	-8,000000	7,900000	-10,924469	2,689228	-1,120000
-3,00	0,75	-0,500000	-0,463648	-26,565051	0,894427	-0,447214	-8,000000	5,500000	-9,515092	1,341841	-1,650000
-2,40	0,48	-0,400000	-0,380506	-21,801409	0,928477	-0,371391	-8,000000	3,100000	-8,279125	-0,092848	-1,692000
-1,80	0,27	-0,300000	-0,291457	-16,699244	0,957826	-0,287348	-8,000000	0,700000	-7,863754	-1,628305	-1,638000
-1,20	0,12	-0,200000	-0,197396	-11,309932	0,980581	-0,196116	-8,000000	-1,700000	-7,511248	-3,235916	-1,488000
-0,60	0,03	-0,100000	-0,099669	-5,710593	0,995037	-0,099504	-8,000000	-4,100000	-7,552332	-4,675682	-1,242000
0,00	0,00	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	-8,000000	-6,500000	-8,000000	-6,500000	9,000000
0,60	0,03	0,100000	0,099669	5,710593	0,995037	0,099504	-8,000000	-6,500000	-8,607072	-5,671712	5,340000
1,20	0,12	0,200000	0,197396	11,309932	0,980581	0,196116	-8,000000	-6,500000	-9,119400	-4,804845	2,160000
1,80	0,27	0,300000	0,291457	16,699244	0,957826	0,287348	-8,000000	-6,500000	-9,533872	-3,927088	-0,840000
2,40	0,48	0,400000	0,380506	21,801409	0,928477	0,371391	-8,000000	-6,500000	-9,841653	-3,030373	-2,760000
3,00	0,75	0,500000	0,463648	26,565051	0,894427	0,447214	-8,000000	-6,500000	-10,048308	-2,238898	-4,500000
3,60	1,08	0,600000	0,540420	30,963757	0,857493	0,514496	-8,000000	-6,500000	-10,204168	-1,457738	-5,780000
4,20	1,47	0,700000	0,610726	34,992020	0,819232	0,573462	-8,000000	-6,500000	-10,281361	-0,737309	-6,540000
4,80	1,92	0,800000	0,674741	38,655868	0,780869	0,624656	-8,000000	-6,500000	-10,307468	-0,078087	-6,840000
5,40	2,43	0,900000	0,732515	41,987212	0,743294	0,668995	-8,000000	-6,500000	-10,284624	0,520306	-6,660000
6,00	3,00	1,000000	0,785398	45,000000	0,707107	0,707107	-8,000000	-6,500000	-10,253948	1,068660	-6,000000

Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

52 / 55

Příklad 5.6

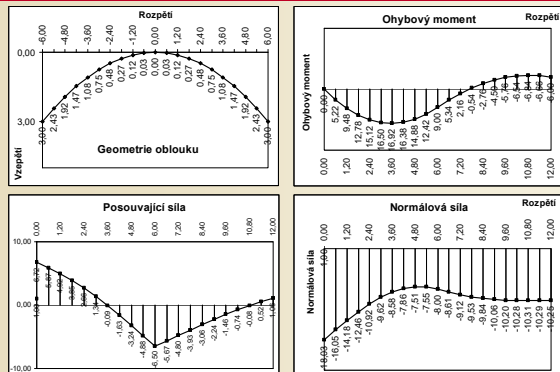
Řešení příkladu 5.6
Obr. 8.15. / str. 144



Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

53 / 55

Příklad 5.6



Rovinně zakřivený nosník v rovinné úložce

54 / 55

Okruhy problémů k ústní části zkoušky

1. Rovinně lomený nosník v rovinné úloze
2. Rovinně lomený nosník v příčné úloze
3. Kontrola rovnováhy styčnicku rovinně lomeného nosníku
4. Prostorově lomený nosník
5. Rovinně zakřivený nosník v rovinné úloze
