

Téma 8 Těžiště

- Těžiště rovinných čar
- Těžiště jednoduchých rovinných obrazců
- Těžiště složených rovinných obrazců



Těžiště

Hmotný útvar - v nejobecnějším případě trojrozměrné těleso z látky o měrné tíze γ [kN/m³], také idealizovaná tělesa jako např.:

Hmotný rovinný obrazec (tuhá deska) - o měrné tíze γ [kN/m²]

Hmotná rovinná čára - o měrné tíze γ [kN/m]

Tíhově homogenní hmotné útvary – měrná tíha je po celém útvaru konstantní

Fyzikální význam těžiště:

- hmotný bod se soustředěnou hmotností útvaru
- bod, ve kterém lze hmotný útvar vystavený tíze podepřít proti posunutí aniž by docházelo k rotaci

Těžiště je chápáno jako statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru či rovině, které tvoří vlastní tíhy elementů hmotného útvaru.

Těžnice – osa procházející těžištěm



Varignonova momentová věta

Zadáno: obecná rovinná soustava n sil P_i a m statických momentů dvojic sil M_j .

Vypočteno: výslednice R_d .

Platí:

Statický moment výslednice obecné rovinné soustavy k libovolnému momentovému středu v rovině soustavy se rovná algebraickému součtu všech statických momentů sil soustavy k témuž momentovému středu a všech statických momentů dvojic sil. ... **Varignonova věta**

Matematicky:

$$R_d \cdot p_R = \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^m M_j$$



Pierre Varignon
(1654 - 1722)

Těžiště obecné rovinné čáry

Rovinné čáry **jednoduché** (po celé délce jeden matematický předpis) a **složené** (několik spojených jednoduchých čar)

Jednoduché rovinné čáry – úsečka, kružnicový oblouk, parabolický oblouk

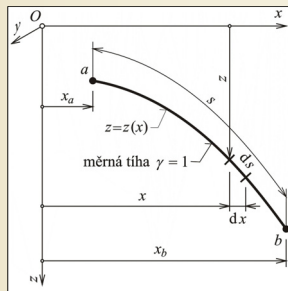
Předpoklad: čáry tíhově homogenní, u kterých hodnota měrné tíhy γ nemá na polohu těžiště žádný vliv, proto $\gamma = 1$ (bez fyzikálního rozměru)

Dle diferenciální geometrie rovinných křivek platí:

$$ds = \sqrt{1 + z'^2} dx \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

Délka (a zároveň i tíha) čáry:

$$s = \int_a^b ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} dx$$



Rovinná čára

Obr. 4.1. / str. 41

Těžiště rovinných čar

4 / 48

Těžiště obecné rovinné čáry

V každém elementu působí elementární síla vyjadřující jeho vlastní tíhu

Vzniká soustava rovnoběžných sil se statickým středem v těžišti.

Směr paprsků rovnoběžných sil lze volit:

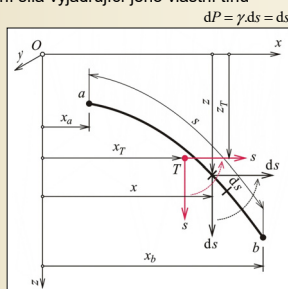
a) v rovině vyšetřované čáry xz , povaha rovinné soustavy sil, směr svislý (z), pak vodorovný (x)

Statické momenty sil k momentovému středu (k počátku O):

$$S_x = \int_a^b x \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_z = \int_a^b z \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1 + z'^2} dx$$

Z Varignonovy věty: $x_T = \frac{S_x}{s}$ $z_T = \frac{S_z}{s}$



Těžiště rovinné čáry jako statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.2.a. / str. 42

Těžiště rovinných čar

5 / 48

Těžiště obecné rovinné čáry

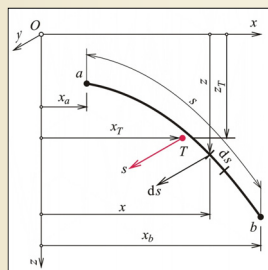
Směr paprsků rovnoběžných sil lze volit:

b) kolmo k rovině vyšetřované čáry xz , tedy ve směru y , povaha prostorové soustavy sil, výpočet statických momentů ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům

Poučka: Je-li rovinná čára (nebo jakýkoli jiný vyšetřovaný útvar) symetrická podle nějaké osy symetrie, leží těžiště čáry (útvary) nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný útvar dvě nebo více os symetrie – **těžiště leží v průsečíku os symetrie** a není třeba zjišťovat výpočtem.



Těžiště rovinné čáry jako statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil

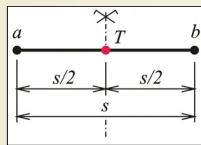
Obr. 4.2.b. / str. 42

Těžiště rovinných čar

6 / 48

Těžiště úsečky

Úsečka má osu symetrie - těžiště leží uprostřed úsečky při jakémkoliv sklonu úsečky.

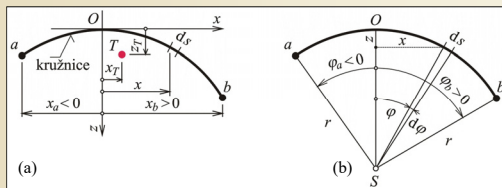


Těžiště úsečky
Obr. 4.3. / str. 43

Těžiště kružnicového oblouku

a) pravoúhlá soustava – složité matematické výrazy

b) polární soustava – pól S ve středu kružnice, úhlová souřadnice φ měřena od vřivlice procházející středem S kružnice, kladná ve směru hodinových ručiček, v radiánech, středové úhly φ_a a φ_b , poloměr kružnice r



Kružnicový oblouk v pravoúhlé (a) a polární (b) souřadnicové soustavě

Obr. 4.4. / str. 44

Těžiště kružnicového oblouku

Platí: $x = r \cdot \sin \varphi$ $x_a = r \cdot \sin \varphi_a$ $x_b = r \cdot \sin \varphi_b$
 $z = r \cdot (1 - \cos \varphi)$ $ds = r \cdot d\varphi$

Délka oblouku: $s = \int_s ds = r \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi = r \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$

Statické momenty: $S_x = \int_s z \cdot ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} (1 - \cos \varphi) d\varphi = r^2 \cdot [(\varphi_b - \varphi_a) - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)]$

$S_z = \int_s x \cdot ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sin \varphi d\varphi = r^2 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b)$

Souřadnice těžiště: $x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a}$

$z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a}$

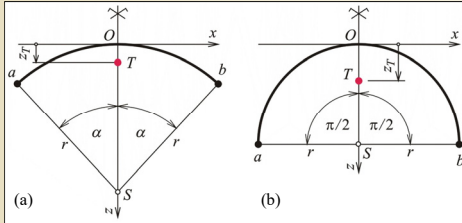
Těžiště kružnicového oblouku

a) symetrický kružnicový oblouk podle osy z , středový úhel 2α , $\varphi_a = -\alpha$, $\varphi_b = +\alpha$

$$x_T = 0 \quad z_T = r \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

b) půlkružnice, $\alpha = \pi/2$

$$x_T = 0 \quad z_T = r \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \approx 0,3634 \cdot r$$



Symetrický kružnicový oblouk (a) a půlkružnice (b)

Obr. 4.5. / str. 44

Těžiště rovinných čar

10 / 48

Příklad 9.1

Zadáno:

$$r = 8$$

$$\varphi_a = -30^\circ = -\frac{30^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = -0,52360 \text{ rad}$$

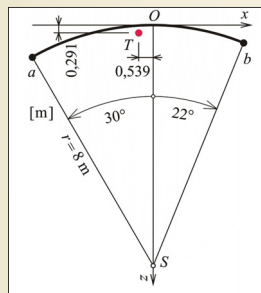
$$\varphi_b = +22^\circ = +0,38397 \text{ rad}$$

$$x_T = ? \quad z_T = ?$$

Řešení:

$$x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a} = -0,539 \text{ m}$$

$$z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a} = +0,291 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.1

Obr. 4.6. / str. 45

Těžiště rovinných čar

11 / 48

Těžiště parabolického oblouku

Zadáno: x_a, x_b, z_a nebo z_b

Rovnice paraboly ve zvolené souřadnicové soustavě: $z = k \cdot x^2$ $k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$

Derivace rovnice paraboly: $z' = 2 \cdot k \cdot x$

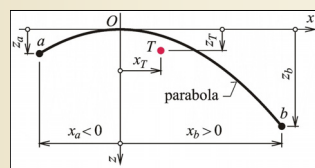
$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx \quad S_z = \int_{x_a}^{x_b} x \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx \quad S_x = \int_{x_a}^{x_b} kx^2 \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

S využitím:

$$s = \int_{x_a}^{x_b} ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_z = \int_{x_a}^{x_b} x ds = \int_{x_a}^{x_b} x \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_x = \int_{x_a}^{x_b} z ds = \int_{x_a}^{x_b} z \sqrt{1 + z'^2} dx$$



Parabolický oblouk

Obr. 4.7. / str. 45

Těžiště rovinných čar

12 / 48

Numerická integrace určitých integrálů

Výpočet určitých integrálů je pracný – numerická integrace s využitím **Simpsonova pravidla**.

Postup:

- a) Rozdělit integrační obor $x_b - x_a$ na sudý počet n dílů, body dělení $i = 0, 1, \dots, n$

Délka jednoho dílku: $\Delta = \frac{x_b - x_a}{n}$

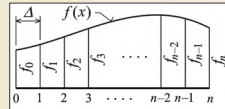
- b) Určit souřadnici x_i : $x_i = x_a + i\Delta$

- c) Vypočítat číselnou hodnotu f_i integrované funkce $f(x)$

- d) Přibližná číselná hodnota integrálu je pak:

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \approx \left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + \right] \frac{\Delta}{3} \\ \left[+ 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n \right]$$

Přesnost výpočtu závislá na n , pro praktické účely stačí již $n=4$



Simpsonovo pravidlo
Obr. 4.8. / str. 45

Těžiště rovinných čar

13 / 48

Příklad 9.2

Zadáno: x_a, x_b, z_b ,
 z_a dopočteno z rovnice paraboly, $n=4$

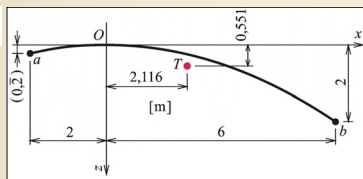
Výpočet těžiště:

Parametr k $k = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0,055 \text{ m}^{-1}$

$\Delta = \frac{6+2}{4} = 2 \text{ m}$

Integrál pro $i=4$

$$\int_{-2}^{6} f(x) dx \approx \left[f_0 + 4(f_1 + f_3) + \right] \frac{2}{3} \\ \left[+ 2(f_2) + f_4 \right]$$



Zadání a výsledek příkladu 9.2

Obr. 4.9. / str. 46

Těžiště rovinných čar

14 / 48

Příklad 9.2

Tabulkový výpočet:

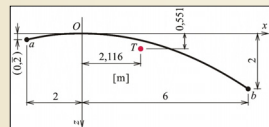
i	x [m]	$\sqrt{1+(2kx)^2}$	$kx^2 \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$	$x \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$
0	-2	1,0244	0,2276	-2,0488
1	0	1,0000	0,0000	0,0000
2	2	1,0244	0,2276	2,0488
3	4	1,0943	0,9727	4,3773
4	6	1,2019	2,4037	7,2111
		8,4349	4,6517	17,8460

$s = 8,4349 \text{ m}$

$S_x = 4,6517 \text{ m}^2$ $S_z = 17,8460 \text{ m}^2$

Souřadnice těžiště:

$x_T = \frac{S_x}{s} = 2,116 \text{ m}$ $z_T = \frac{S_z}{s} = 0,551 \text{ m}$



Zadání a výsledek příkladu 9.2

Obr. 4.9. / str. 46

Těžiště rovinných čar

15 / 48

Těžiště rovinné složené čáry

Rovinná **složená** čára vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných čar v téže rovině. Prvky s označením $i=1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - homogenní složená čára.

Postup:

- Složenou čáru umístít do pravoúhlé souřadnicové soustavy xz
- Pro každý prvek i vypočítat délku s_i a odpovídající tíhovou sílu $P_i = \gamma_i \cdot s_i$
- Pro každý prvek i určit souřadnice x_i a z_i jeho těžiště T_i
- Zavést sílu P_i do těžiště T_i a určit:

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

- Vypočítat souřadnice těžiště rovinné složené čáry

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

Těžiště rovinných čar

16 / 48

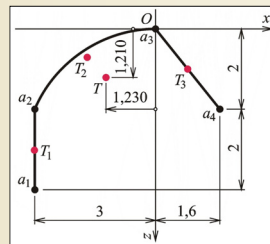
Příklad 9.3

Zadáno:

- Svislá úsečka s hraničními body a_1 a a_2 , $\gamma_1 = 1$
- Kružnicový oblouk s hraničními body a_2 a a_3 , $\varphi_{a_2} = -1,1760$ rad, $\varphi_{a_3} = 0$, $r = 3,25$ m, $\gamma_2 = 1,5$
- Svislá úsečka s hraničními body a_3 a a_4 , $\gamma_3 = 1,2$

Řešení:

- délky, tíhy a těžiště prvků i
($x_2 = -1,7007$ m, $z_2 = 0,6990$ m)
- souřadnice těžiště
 $R = 10,807$ m
 $S_x = 13,081$ m² $S_z = -13,291$ m²
 $x_T = -1,230$ m $z_T = 1,210$ m

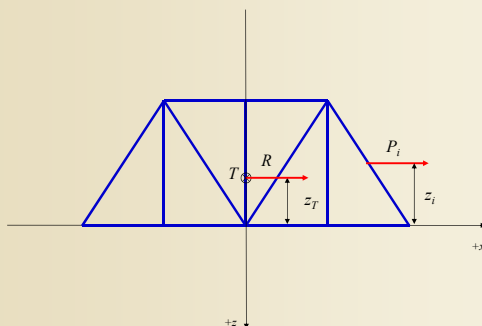


Zadání a výsledek příkladu 9.3
Obr. 4.10./ str. 47

Těžiště rovinných čar

17 / 48

Těžiště rovinných příhradových nosníků



Těžiště rovinných čar

18 / 48

Dřevěné příhradové vazníky



Těžiště rovinných čar

19 / 48

Dřevěné příhradové vazníky



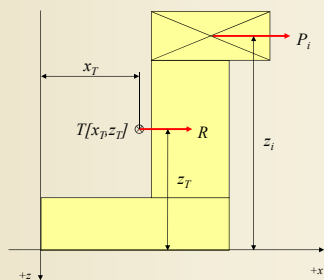
Těžiště rovinných čar

20 / 48

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

Jednoduchý rovinný obrazec – obrys umožňuje určit polohu těžiště bez výpočtu na základě symetrie nebo výpočtem podle jednoduchého matematického předpisu, tíhově homogenní

Složený rovinný obrazec – několik spojených jednoduchých obrazců



Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

21 / 48

Těžiště obecného rovinného obrazce

Plošný **obsah (plocha)** rovinného obrazce A . $\gamma = 1 \rightarrow A = \gamma \cdot A$
 Plocha elementárního obdélníka: $dA = dx \cdot dz$

Celková plocha obrazce: $A = \iint_A dA = \iint_A dx \cdot dz$

Směr rovnoběžných elementárních sil dP lze volit: $dP = \gamma \cdot dA = dA$

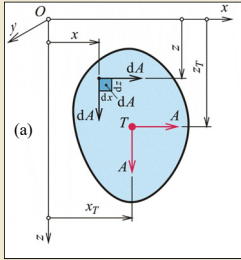
a) v rovině vyšetřovaného obrazce xz ,
 povaha rovinné soustavy sil, směr svislý (z), pak vodorovný (x)

Statické momenty obrazce k momentovému středu O : Rozměr [m³]

$$S_x = \iint_A x \cdot dA = \iint_A x \cdot dx \cdot dz \quad S_z = \iint_A z \cdot dA = \iint_A z \cdot dx \cdot dz$$

Souřadnice těžiště:
 Z Varignonovy věty: $x_T = \frac{S_x}{A}$
 $z_T = \frac{S_z}{A}$

Těžiště rovinného obrazce jako statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil
 Obr. 4.11.a. / str. 48



Těžiště obecného rovinného obrazce

Směr rovnoběžných elementárních sil dP lze volit: $dP = \gamma \cdot dA = dA$

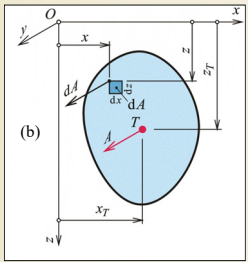
b) kolmo k rovině vyšetřovaného obrazce xz , tedy ve směru y , povaha prostorové soustavy sil, výpočet statických momentů obrazce ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojatí vedou ke shodným výsledkům

Poučka: Je-li rovinný obrazec symetrický podle nějaké osy symetrie, leží těžiště obrazce nutně na této ose symetrie.

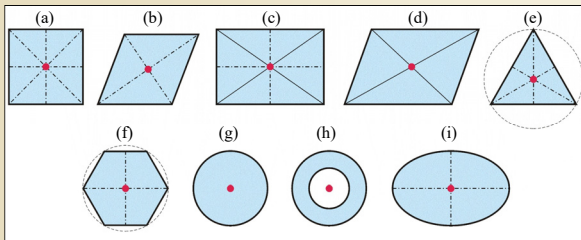
Má-li vyšetřovaný obrazec dvě nebo více os symetrie – **těžiště leží v průsečíku os symetrie** a není třeba zjišťovat výpočtem.

Těžiště rovinného obrazce jako statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil
 Obr. 4.11.b. / str. 48



Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

a) čtverec b) kosočtverec c) obdélník d) kosodélník e) rovnostranný trojúhelník f) pravidelný šestiúhelník g) kruh h) mezikružší i) elipsa

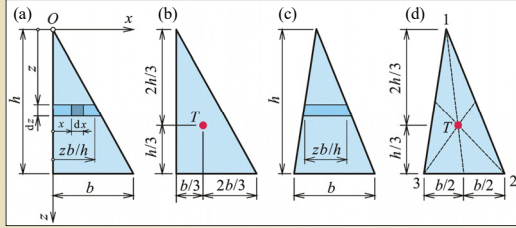


Těžiště některých jednoduchých rovinných obrazců
 Obr. 4.12. / str. 50

Těžiště pravouhlého a obecného trojúhelníku

Plocha trojúhelníku: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Statický moment: $S_x = \int_A z \cdot dx \cdot dz = \int_0^h z \left[\int_0^{zb/h} dx \right] dz = \int_0^h z \left[\frac{zb}{h} \right] dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 dz = \frac{b \cdot h^2}{3}$



Těžiště trojúhelníku
Obr. 4.13. / str. 50

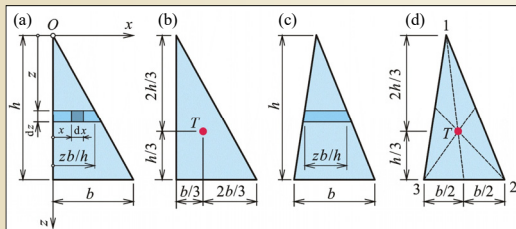
Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

25 / 48

Těžiště pravouhlého a obecného trojúhelníku

Svislá pořadnice těžiště: $z_r = \frac{b \cdot h^2}{3} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{2}{3} h$

Výpočet ze souřadnic vrcholů: $x_r = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$ $z_r = \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3)$



Těžiště trojúhelníku
Obr. 4.13. / str. 50

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

26 / 48

Plocha kruhové úseče

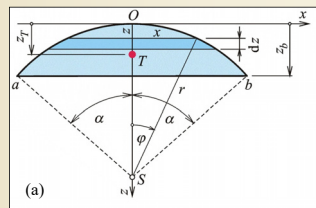
Symetrie podle osy z, polární soustava – středový úhel 2α , poloměr kružnice r

Platí: $x = r \cdot \sin \varphi$ $z = r \cdot (1 - \cos \varphi)$ $dx = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ $dz = r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$ (převod z pravouhlé soustavy do polární)

Plocha úseče: $A = \int_A dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot d\varphi = 2r^2 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = r^2 \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$

Statický moment:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A z \cdot dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^\alpha x \cdot z \cdot dz = \\ &= 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2r^3 \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2r^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) \end{aligned}$$



Těžiště kruhové úseče
Obr. 4.14.a. / str. 51

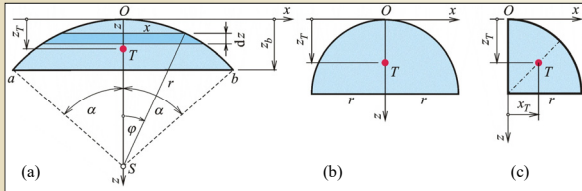
Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

27 / 48

Těžiště kruhové úseče, půlkruhu a čtvrtkruhu

Souřadnice kruhové úseče:
$$z_T = \frac{S_x}{A} = \frac{2r^3 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right)}{r^2 \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)} = r \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$$

Půlkruh: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $z_T = \frac{S_x}{A} = r \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) \approx 0,5756r$ Čtvrtkruh: $x_T = r - z_T = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4244r$



Těžiště kruhové úseče (a), půlkruhu (b) a čtvrtkruhu (c)

Obr. 4.14. / str. 51

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

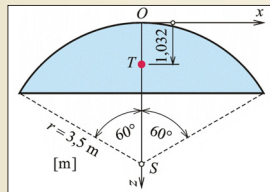
28 / 48

Příklad 9.4

Zadáno: $r = 3,5\text{m}$ $2\alpha = 120^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} = 1,0472\text{rad}$
 $z_T = ?$

Řešení:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = 1,032\text{m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.4

Obr. 4.15. / str. 52

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

29 / 48

Těžiště parabolické úseče

Plocha parabolické úseče:

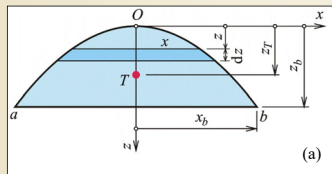
$$A = \int_a^b dx \cdot dz = 2 \int_0^{\frac{z_b}{2}} x \cdot dz = 2 \int_0^{\frac{z_b}{2}} x \cdot 2kx \cdot dx = 4k \int_0^{\frac{z_b}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{4}{3} \frac{z_b^3}{x_b^3} x_b^3 = \frac{4}{3} x_b z_b$$

Statický moment parabolické úseče:

$$S_x = \int_a^b z \cdot dx \cdot dz = 2 \int_0^{\frac{z_b}{2}} z \cdot x \cdot dz = 2 \int_0^{\frac{z_b}{2}} kx^3 \cdot 2kx \cdot dx = 4k^2 \int_0^{\frac{z_b}{2}} x^4 \cdot dx = \frac{4}{5} \frac{z_b^5}{x_b^5} x_b^5 = \frac{4}{5} x_b z_b^2$$

Vzdálenost těžiště:

$$z_T = \frac{4}{5} x_b z_b^2 \cdot \frac{3}{4 x_b z_b} = \frac{3}{5} z_b$$



Těžiště parabolické úseče

Obr. 4.16.a. / str. 53

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

30 / 48

Těžiště poloviny parabolické úseče

Plocha poloviny parabolické úseče:

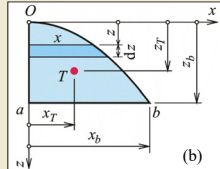
$$A = \frac{2}{3} x_b z_b$$

Statický moment poloviny parabolické úseče:

$$S_x = \iint_A x \, dx \, dz = \int_0^{z_b} \left[\int_0^x x \, dx \right] dz = \int_0^{z_b} \frac{x^2}{2} dz = \frac{2kx}{2} dz = k \int_0^{z_b} x^2 dz = \frac{kz_b}{x_b} \cdot \frac{x_b^3}{4} = \frac{1}{4} x_b^2 z_b$$

Vzdálenost těžiště:

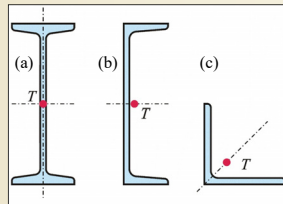
$$x_T = \frac{1}{4} x_b^2 z_b \cdot \frac{3}{2 x_b z_b} = \frac{3}{8} x_b$$



Těžiště poloviny parabolické úseče
Obr. 4.16.b. / str. 53

Těžiště ocelových válcovaných tyčí

Válcované průřezy (profily): různé tvary, I-profil, U-profil, rovnoramenný úhelník

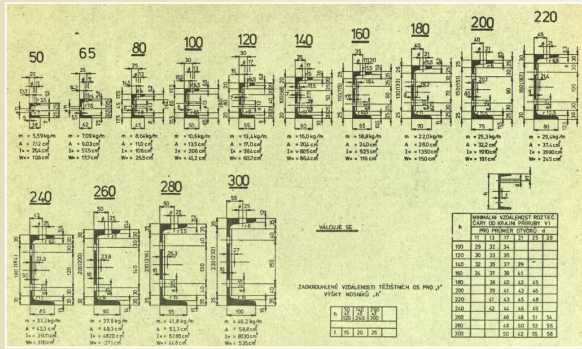


Příklady válcovaných profilů
Obr. 4.17. / str. 53

Ocelové válcované tyče

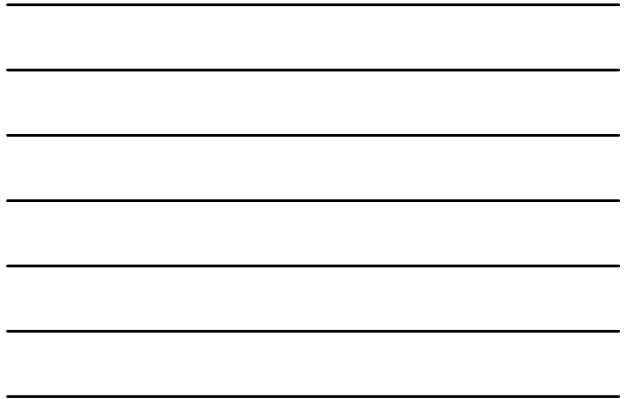


Ocelové válcované tyče profilu U

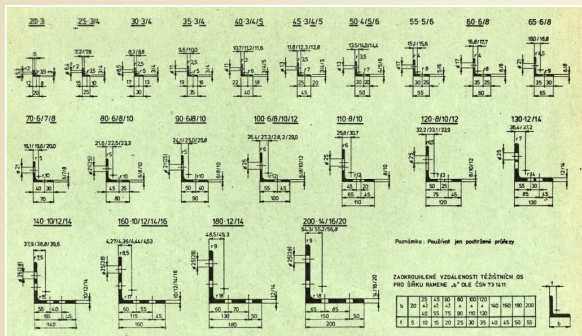


Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

37 / 48

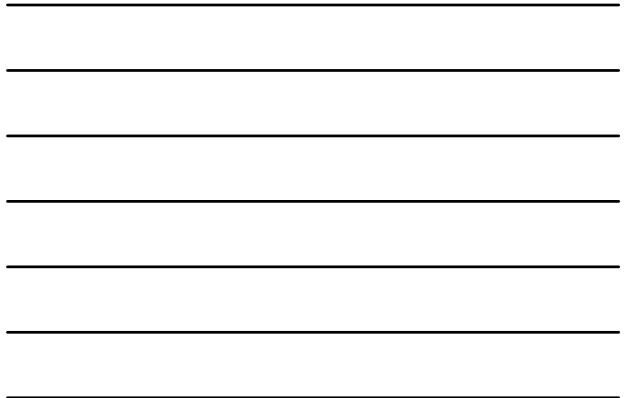


Ocelové válcované rovnoramenné úhelníky

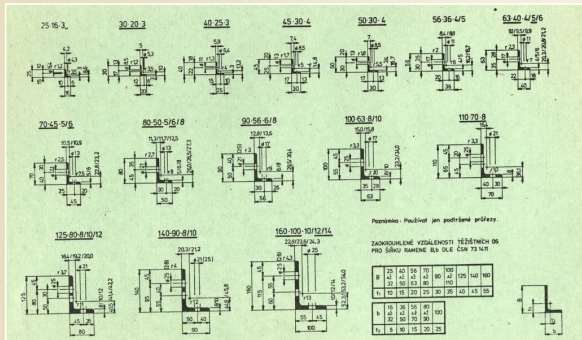


Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

38 / 48



Ocelové válcované nerovnoramenné úhelníky

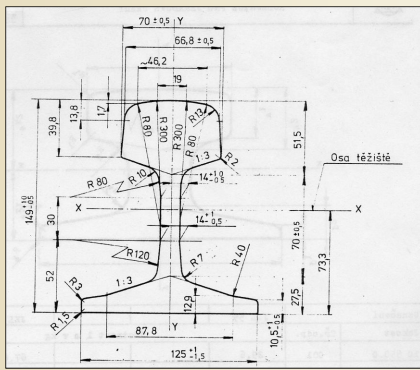


Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

39 / 48



Ocelové železniční kolejnice



Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

40 / 48

Těžiště složených rovinných obrazců

Složený rovinný obrazec vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných obrazců v téže rovině. Prvky s označením $i=1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - homogenní složený rovinný obrazec.

Postup:

- Složený obrazec umístit do pravouhlé souřadnicové soustavy xz
- Pro každý prvek i vypočítat plochu A_i a odpovídající tíhovou sílu $P_i = \gamma_i \cdot A_i$
- Pro každý prvek i určit souřadnice x_i a z_i jeho těžiště T_i , možno použít lokální souřadnicovou soustavu
- Zavést sílu P_i do těžiště T_i a určit: (pro homogenní obrazce platí $R=A$)
$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$
- Vypočítat souřadnice těžiště složeného rovinného obrazce

$$x_r = \frac{S_z}{R} \quad z_r = \frac{S_x}{R}$$

Těžiště složených rovinných obrazců

41 / 48

Těžiště kosodélníku, lichoběžníku a obecného čtyřúhelníku

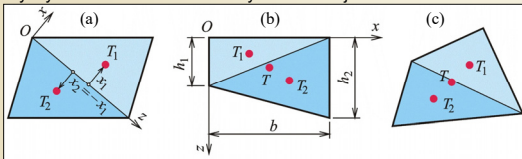
a) kosodélník – úhlopříčka souřadnicová osa z

b) lichoběžník: $A_1 = \frac{b \cdot h_1}{2} \quad x_1 = \frac{b}{3} \quad z_1 = \frac{h_1}{3} \quad A_2 = \frac{b \cdot h_2}{2} \quad x_2 = \frac{2b}{3} \quad z_2 = \frac{(h_1 + h_2)}{3}$

$$R = A = \frac{b \cdot (h_1 + h_2)}{2} \quad S_x = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{3} = \frac{b}{6} (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)$$

$$S_z = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{b}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{2b}{3} = \frac{b^2}{6} (h_1 + 2 \cdot h_2) \quad x_r = \frac{b}{3} \cdot \frac{h_1 + 2 \cdot h_2}{h_1 + h_2} \quad z_r = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2}$$

c) obecný čtyřúhelník – obrazec složený ze dvou trojúhelníků



Těžiště kosodélníku (a), lichoběžníku (b) a obecného čtyřúhelníku (c)
Obr. 4.18. / str. 54

Těžiště složených rovinných obrazců

42 / 48

Těžiště rovinného obrazce složeného z válcovaných tyčí

Těžiště složených rovinných obrazců 43 / 48

Těžiště složených obrazců s otvory a výřezy

Zvláštní případ složených obrazců – s **otvory** (s *oslabením*) nebo s **výřezy** (otvory sousedící s obrysem obrazce)

Výpočet:
 Jednotlivé obrazce považovat za samostatné prvky bez otvorů, otvory považovat za další prvky se *zápornou* plochou a měrnou tíhou stejnou jako obrazec obklopující.

Těžiště složených rovinných obrazců 44 / 48

Příklad 9.5

Zadáno: homogenní složený rovinný obrazec oslabený otvory, složený z půlkruhu $r=0,3m$, obdélníku a dvou kruhových otvorů o $r=0,1m$.

Výpočet těžiště:

a) plochy a souřadnice těžišť prvků i

b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$R = 0,5585 m^2$
 $S_x = 0,3164 m^3$ $S_y = +0,00628 m^3$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$x_T = 0,0112 m$ $z_T = 0,5665 m$

Zadáni a výsledek příkladu 9.5
 Obr. 4.19. / str. 55

Těžiště složených rovinných obrazců 45 / 48

Příklad 9.6

Zadáno: tíhově homogenní rovinný obrazec tvaru L (lze řešit jako dva obdélníky nebo jako obdélník opsán průřezu a jeho obdélníkový výřez)

Výpočet těžiště:

a) plochy a souřadnice těžišť prvků i

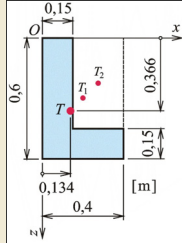
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,1275 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,04669 \text{ m}^3 \quad S_y = 0,01706 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = 0,134 \text{ m} \quad z_T = 0,366 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.6
Obr. 4.20. / str. 56

Příklad 9.7

Zadáno: tíhově nehomogenní rovinný obrazec ze tří obdélníků, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 3$

Výpočet těžiště:

a) tíhové síly a souřadnice těžišť prvků i

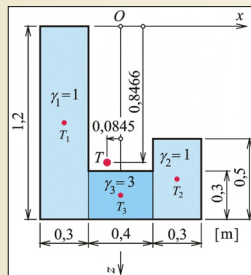
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,87 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,7365 \text{ m}^3 \quad S_y = -0,0735 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = -1,230 \text{ m} \quad z_T = 1,210 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.7
Obr. 4.21. / str. 56

Okruhy problémů k ústní části zkoušky

1. Výpočet těžiště rovinných čar
2. Výpočet těžiště jednoduchých rovinných obrazců
3. Výpočet těžiště složených rovinných obrazců
