

Téma 8

Těžiště

- **Těžiště rovinných čar**
- **Těžiště jednoduchých rovinných obrazců**
- **Těžiště složených rovinných obrazců**

Těžiště

Hmotný útvar - v nejobecnějším případě trojrozměrné těleso z látky o měrné tíze γ [kN/m³], také idealizovaná tělesa jako např.:

Hmotný rovinný obrazec (tuhá deska) - o měrné tíze γ [kN/m²]

Hmotná rovinná čára - o měrné tíze γ [kN/m]

Tíhově homogenní hmotné útvary – měrná tíha je po celém útvaru konstantní

Fyzikální význam těžiště:

- a) hmotný bod se soustředěnou hmotností útvaru
- b) bod, ve kterém lze hmotný útvar vystavený tíze podepřít proti posunutí aniž by docházelo k rotaci

Těžiště je chápáno jako statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru či rovině, které tvoří vlastní tíhy elementů hmotného útvaru.

Těžnice – osa procházející těžištěm



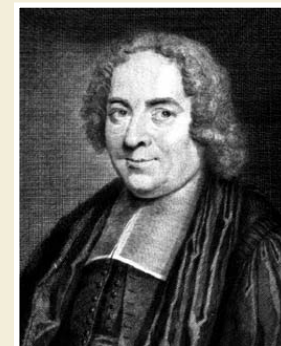
Varignonova momentová věta

Zadáno: obecná rovinná soustava n sil P_i a m statických momentů dvojic sil M_j .

Vypočteno: výslednice R_d .

Platí:

Statický moment výslednice obecné rovinné soustavy k libovolnému momentovému středu v rovině soustavy se rovná algebraickému součtu všech statických momentů sil soustavy k témuž momentovému středu a všech statických momentů dvojic sil. ... **Varignonova věta**



Pierre Varignon
(1654 - 1722)

Matematicky:

$$R_d \cdot p_R = \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i + \sum_{j=1}^m M_j$$

Těžiště obecné rovinné čáry

Rovinné čáry **jednoduché** (po celé délce jeden matematický předpis) a **složené** (několik spojených jednoduchých čar)

Jednoduché rovinné čáry – úsečka, kružnicový oblouk, parabolický oblouk

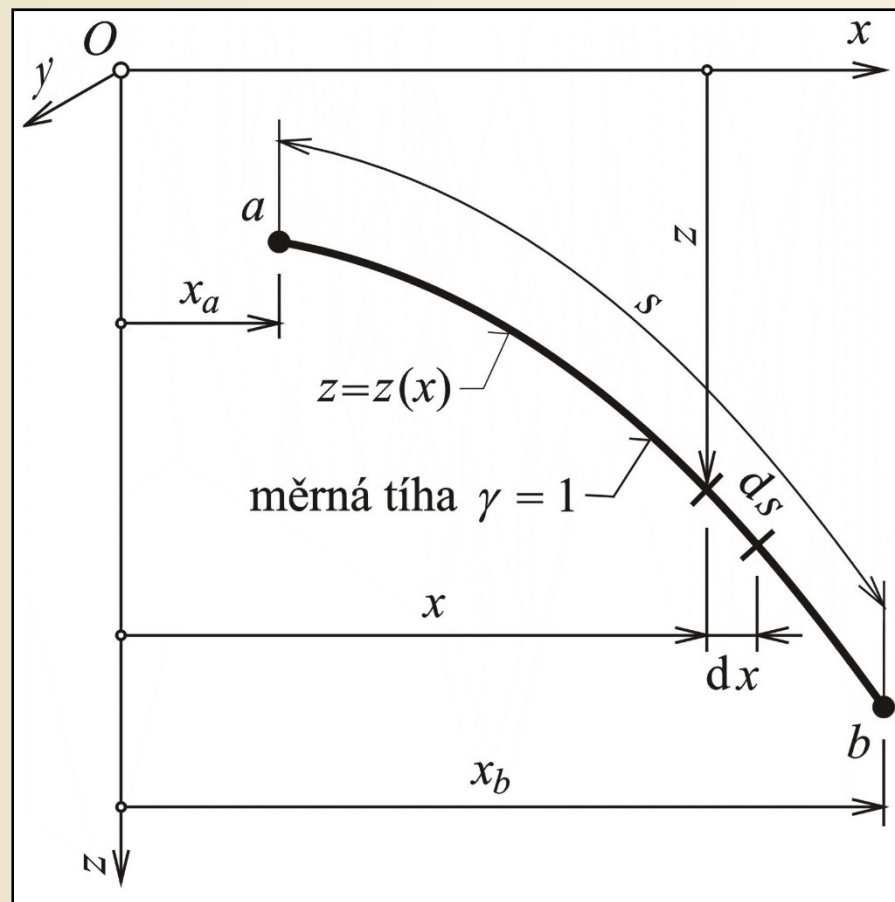
Předpoklad: čáry tíhově homogenní, u kterých hodnota měrné tíhy γ nemá na polohu těžiště žádný vliv, proto $\gamma = 1$ (bez fyzikálního rozměru)

Dle diferenciální geometrie rovinných křivek platí:

$$ds = \sqrt{1 + z'^2} dx \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

Délka (a zároveň i tíha) čáry:

$$s = \int_s ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} dx$$



Rovinná čára
Obr. 4.1. / str. 41

Těžiště obecné rovinné čáry

V každém elementu působí elementární síla vyjadřující jeho vlastní tíhu

Vzniká soustava rovnoběžných sil se statickým středem v těžišti.

Směr paprsků rovnoběžných sil lze volit:

a) v rovině vyšetřované čáry xz ,
povaha rovinné soustavy sil, směr svislý (z), pak vodorovný (x)

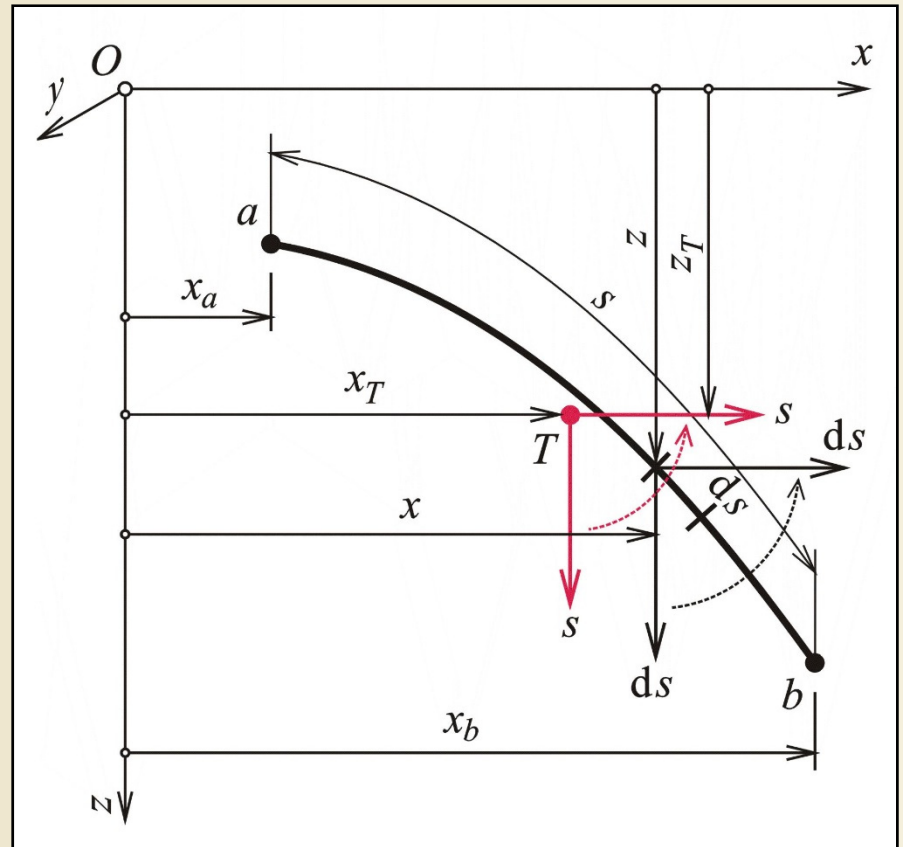
Statické momenty sil k momentovému středu (k počátku O):

$$S_z = \int_s x \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1+z'^2} dx$$

$$S_x = \int_s z \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1+z'^2} dx$$

Z Varignonovy věty: $x_T = \frac{S_z}{s}$ $z_T = \frac{S_x}{s}$

$$dP = \gamma \cdot ds = ds$$



Těžiště rovinné čáry jako statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.2.a. / str. 42

Těžiště obecné rovinné čáry

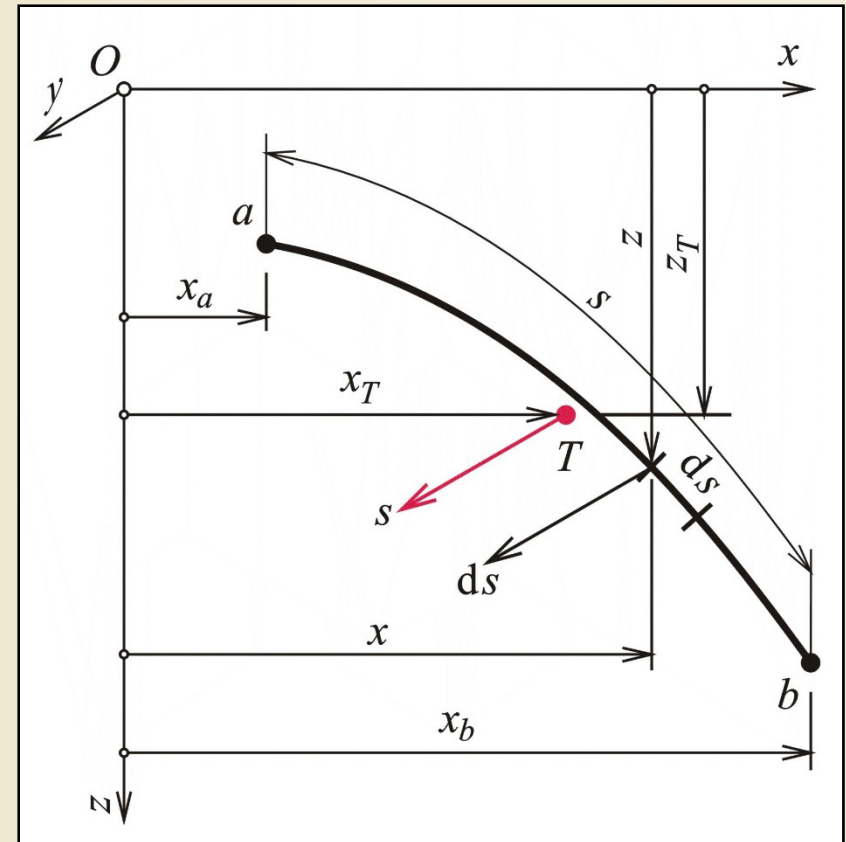
Směr paprsků rovnoběžných sil lze volit:

b) kolmo k rovině vyšetřované čáry xz , tedy ve směru y , povaha prostorové soustavy sil, výpočet statických momentů ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům

Poučka: Je-li rovinná čára (nebo jakýkoli jiný vyšetřovaný útvar) symetrická podle nějaké osy symetrie, leží těžiště čáry (útvary) nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný útvar dvě nebo více os symetrie – těžiště leží v průsečíku os symetrie a není třeba zjišťovat výpočtem.

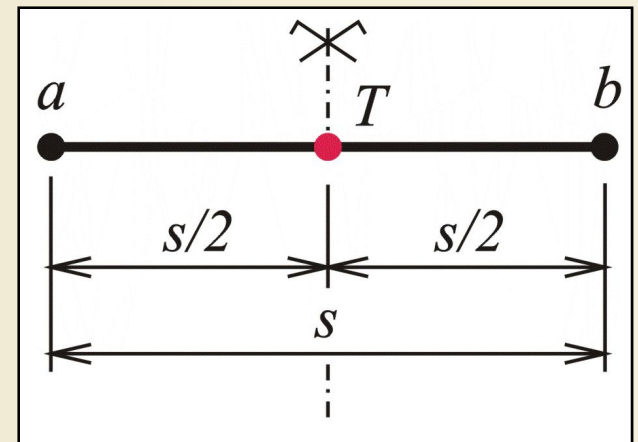


Těžiště rovinné čáry jako statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.2.b. / str. 42

Těžiště úsečky

Úsečka má osu symetrie - těžiště leží uprostřed úsečky při jakémkoliv sklonu úsečky.



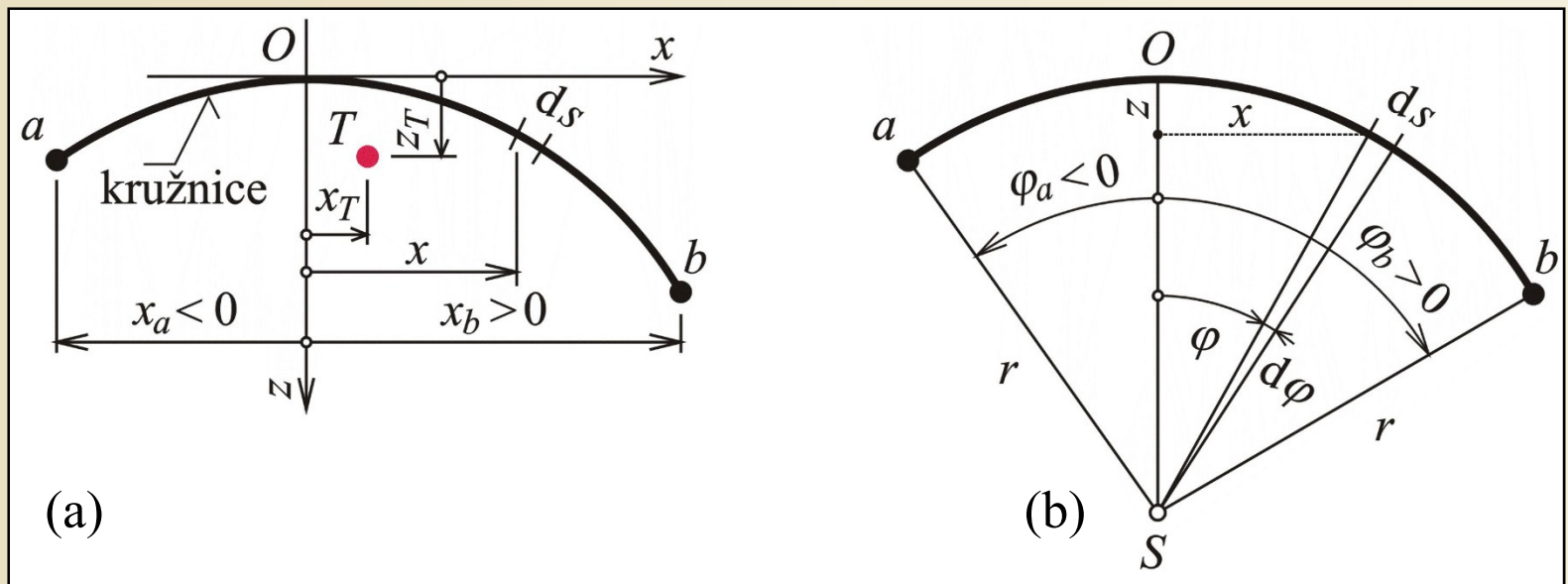
Těžiště úsečky

Obr. 4.3. / str. 43

Těžiště kružnicového oblouku

a) pravoúhlá soustava – složité matematické výrazy

b) polární soustava – pól S ve středu kružnice, úhlová souřadnice φ měřena od svislice procházející středem S kružnice, kladná ve směru hodinových ručiček, v radiánech, středové úhly φ_a a φ_b , poloměr kružnice r



Kružnicový oblouk v pravoúhlé (a) a polární (b) souřadnicové soustavě

Obr. 4.4. / str. 44

Těžiště kružnicového oblouku

Platí:

$$x = r \cdot \sin \varphi \quad x_a = r \cdot \sin \varphi_a \quad x_b = r \cdot \sin \varphi_b$$

$$z = r \cdot (1 - \cos \varphi) \quad ds = r \cdot d\varphi$$

Délka oblouku:

$$s = \int_s ds = r \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi = r \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$$

Statické momenty:

$$S_x = \int_s z \cdot ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} (1 - \cos \varphi) \cdot d\varphi = r^2 \cdot [(\varphi_b - \varphi_a) - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)]$$

$$S_z = \int_s x \cdot ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sin \varphi \cdot d\varphi = r^2 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b)$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a}$$

$$z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a}$$

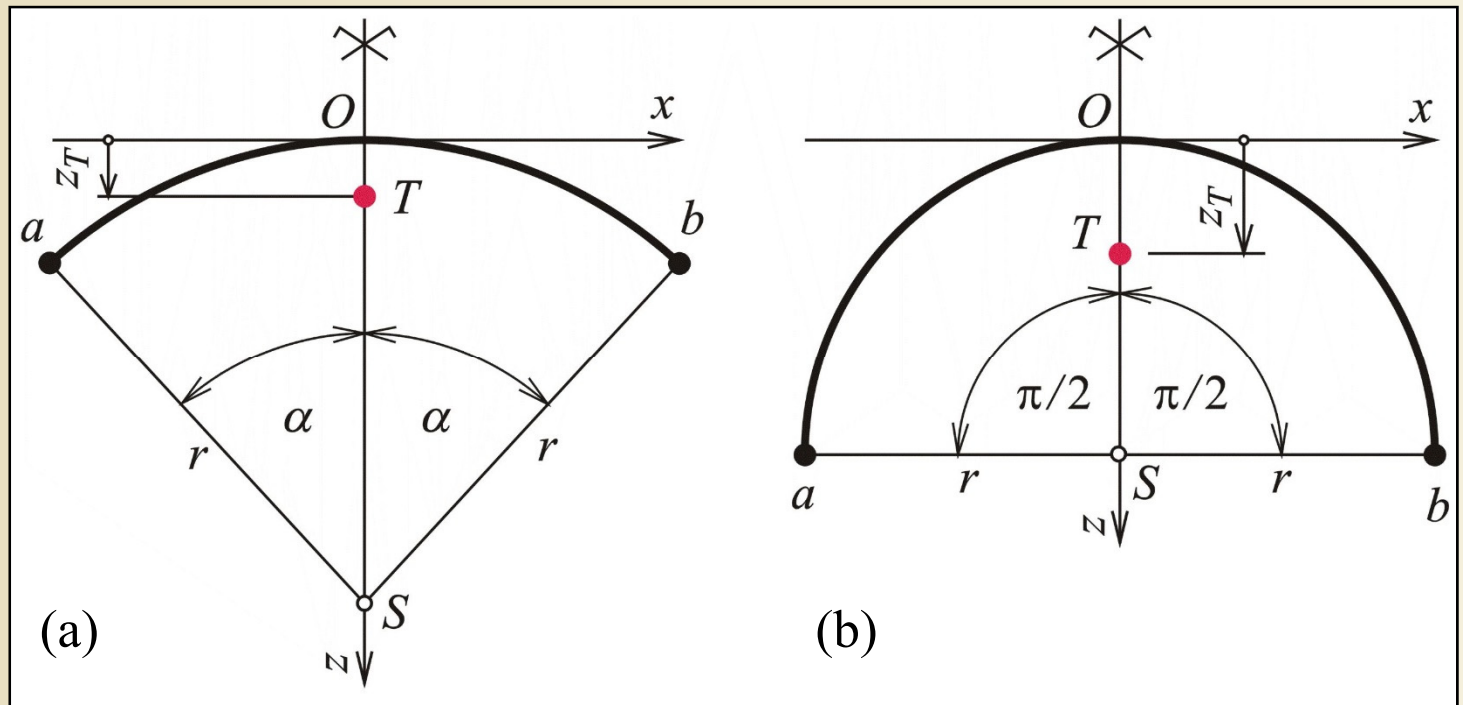
Těžiště kružnicového oblouku

a) symetrický kružnicový oblouk podle osy z , středový úhel 2α , $\varphi_a = -\alpha$, $\varphi_b = +\alpha$

$$x_T = 0 \quad z_T = r \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$$

b) půlkružnice, $\alpha = \pi/2$

$$x_T = 0 \quad z_T = r \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \doteq 0,3634 \cdot r$$



Symetrický kružnicový oblouk (a) a půlkružnice (b)

Obr. 4.5. / str. 44

Příklad 9.1

Zadáno:

$$r = 8$$

$$\varphi_a = -30^\circ = -\frac{30^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = -0,52360 \text{ rad}$$

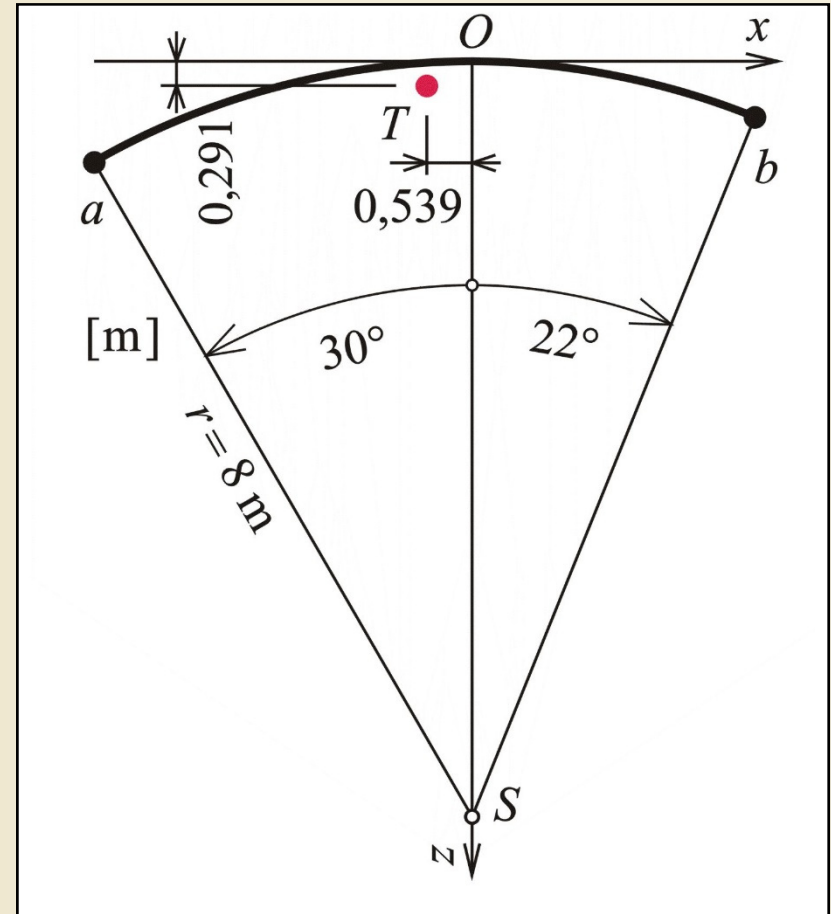
$$\varphi_b = +22^\circ = +0,38397 \text{ rad}$$

$$x_T = ? \quad z_T = ?$$

Řešení:

$$x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a} = -0,539 \text{ m}$$

$$z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a} = +0,291 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.1

Obr. 4.6. / str. 45

Težiště parabolického oblouku

Zadáno: x_a, x_b, z_a nebo z_b

Rovnice paraboly ve zvolené souřadnicové soustavě: $z = k \cdot x^2$ $k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$

Derivace rovnice paraboly: $z' = 2 \cdot k \cdot x$

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

$$S_z = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

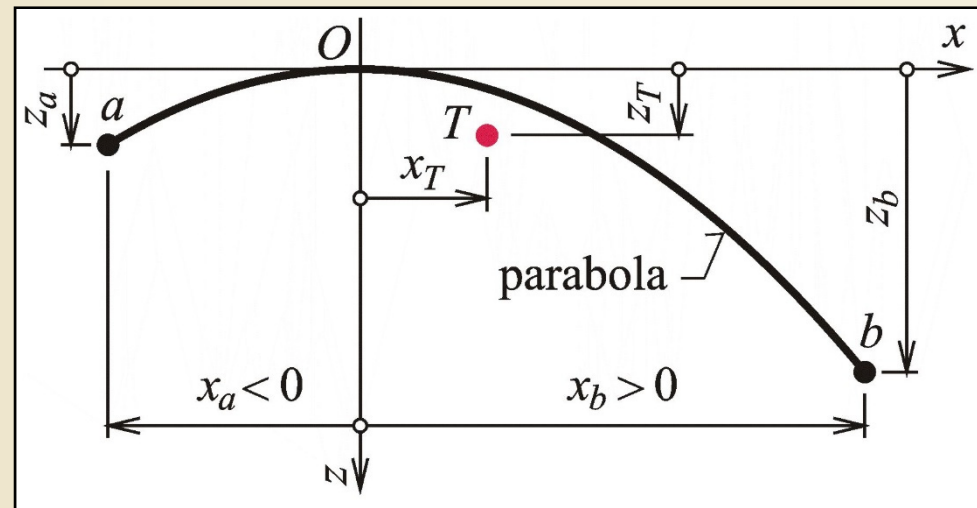
$$S_x = \int_{x_a}^{x_b} kx^2 \sqrt{1 + 4k^2 x^2} dx$$

S využitím:

$$s = \int_s ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_z = \int_s x \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + z'^2} dx$$

$$S_x = \int_s z \cdot ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1 + z'^2} dx$$



Parabolický oblouk

Obr. 4.7. / str. 45

Numerická integrace určitých integrálů

Výpočet určitých integrálů je pracný – numerická integrace s využitím **Simpsonova pravidla**.

Postup:

- a) Rozdělit integrační obor $x_b - x_a$ na sudý počet n dílů, body dělení $i = 0, 1, \dots, n$

$$\text{Délka jednoho dílku: } \Delta = \frac{x_b - x_a}{n}$$

- b) Určit souřadnici x_i : $x_i = x_a + i \cdot \Delta$

- c) Vypočítat číselnou hodnotu f_i integrované funkce $f(x)$

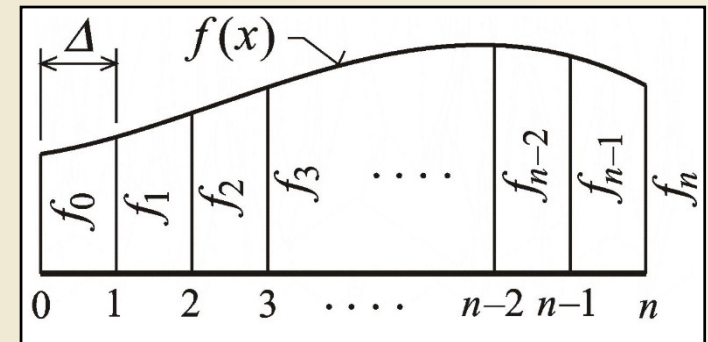
- d) Přibližná číselná hodnota integrálu je pak:

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \approx \left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + \right. \\ \left. + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n \right] \cdot \frac{\Delta}{3}$$

Přesnost výpočtu závislá na n , pro praktické účely stačí již $n=4$



Thomas Simpson
(1710-1761)



Simpsonovo pravidlo

Obr. 4.8. / str. 45



Příklad 9.2

Tabulkový výpočet:

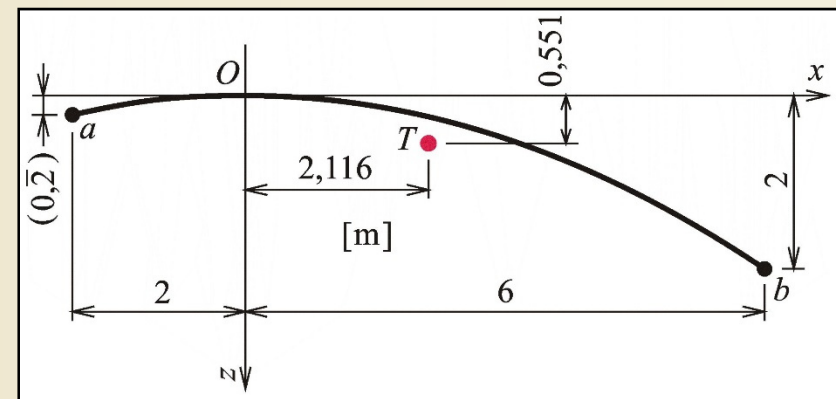
| i | x [m] | $\sqrt{1+(2kx)^2}$ | $kx^2 \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$ | $x \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$ |
|-----|---------|--------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 0 | -2 | 1,0244 | 0,2276 | -2,0488 |
| 1 | 0 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0244 | 0,2276 | 2,0488 |
| 3 | 4 | 1,0943 | 0,9727 | 4,3773 |
| 4 | 6 | 1,2019 | 2,4037 | 7,2111 |
| | | 8,4349 | 4,6517 | 17,8460 |

$$s = 8,4349 \text{ m}$$

$$S_x = 4,6517 \text{ m}^2 \quad S_z = 17,8460 \text{ m}^2$$

Souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{S_z}{s} = 2,116 \text{ m} \quad z_T = \frac{S_x}{s} = 0,551 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.2

Těžiště rovinné složené čáry

Rovinná **složená** čára vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných čar v téže rovině. Prvky s označením $i=1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - homogenní složená čára.

Postup:

- Složenou čáru umístit do pravoúhlé souřadnicové soustavy xz
- Pro každý prvek i vypočítat délku s_i a odpovídající tíhovou sílu $P_i = \gamma_i \cdot s_i$
- Pro každý prvek i určit souřadnice x_i a z_i jeho těžiště T_i
- Zavést sílu P_i do těžiště T_i a určit:

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

- Vypočítat souřadnice těžiště rovinné složené čáry

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

Příklad 9.3

Zadáno:

- a) Svislá úsečka s hraničními body a_1 a a_2 , $\gamma_1 = 1$
- b) Kružnicový oblouk s hraničními body a_2 a a_3 , $\varphi_{a_2} = -1,1760$ rad, $\varphi_{a_3} = 0$,
 $r = 3,25$ m, $\gamma_2 = 1,5$
- c) Svislá úsečka s hraničními body a_3 a a_4 , $\gamma_3 = 1,2$

Řešení:

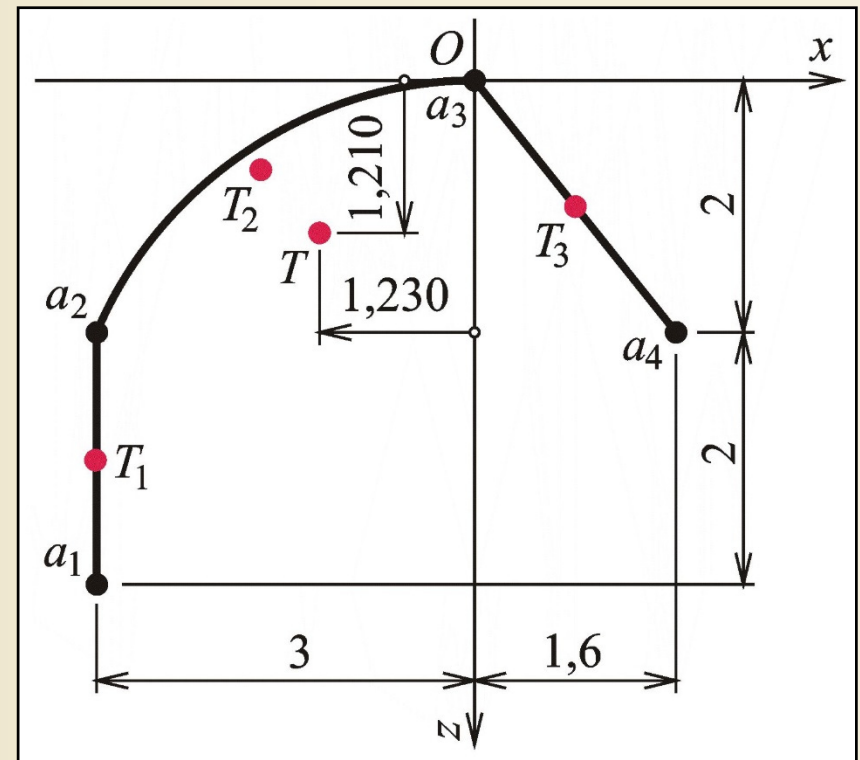
- a) délky, tíhy a těžiště prvků i
($x_2 = -1,7007$ m, $z_2 = 0,6990$ m)

- b) souřadnice těžiště

$$R = 10,807 \text{ m}$$

$$S_x = 13,081 \text{ m}^2 \quad S_z = -13,291 \text{ m}^2$$

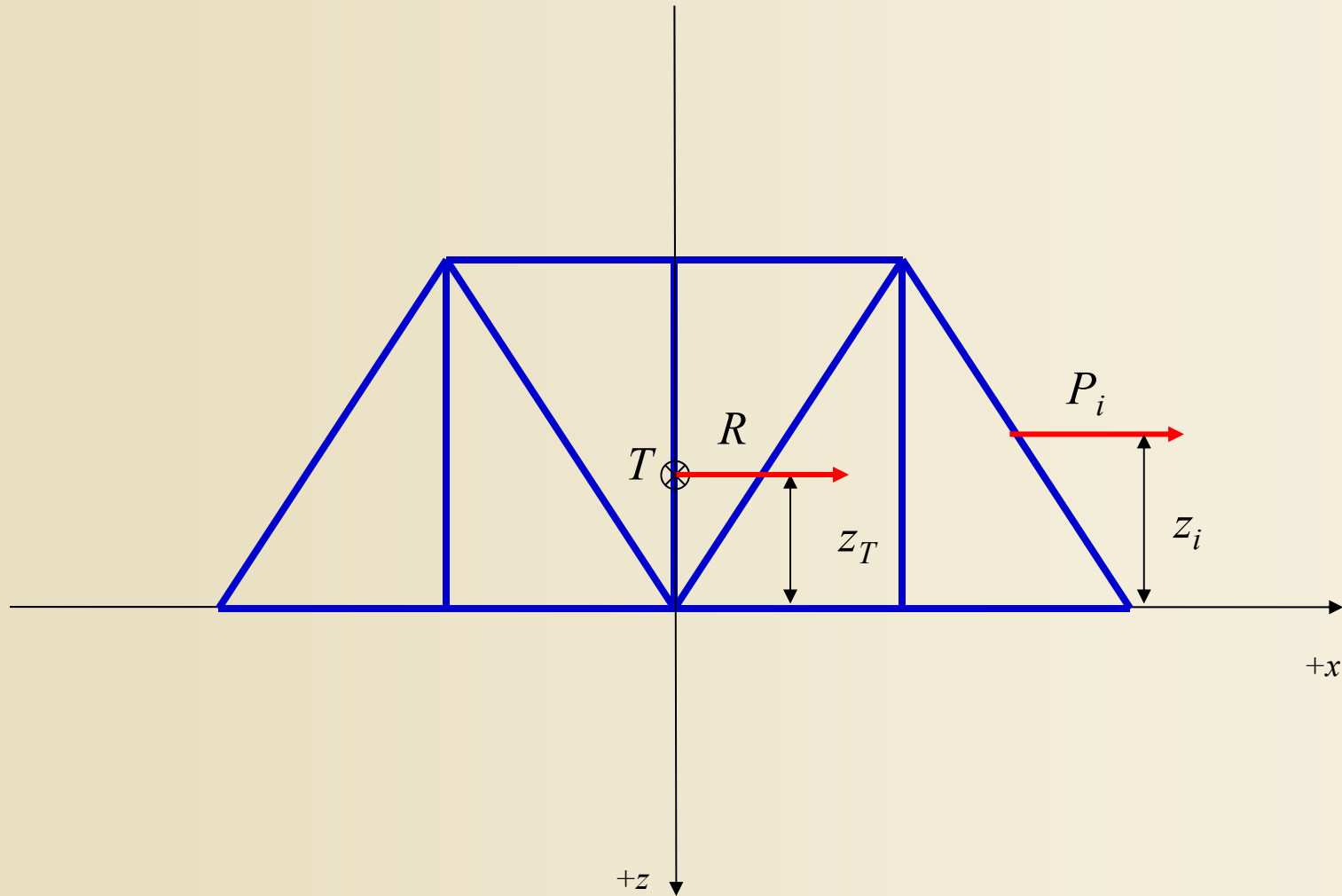
$$x_T = -1,230 \text{ m} \quad z_T = 1,210 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.3

Obr. 4.10. / str. 47

Těžiště rovinných příhradových nosníků



Dřevěné příhradové vazníky



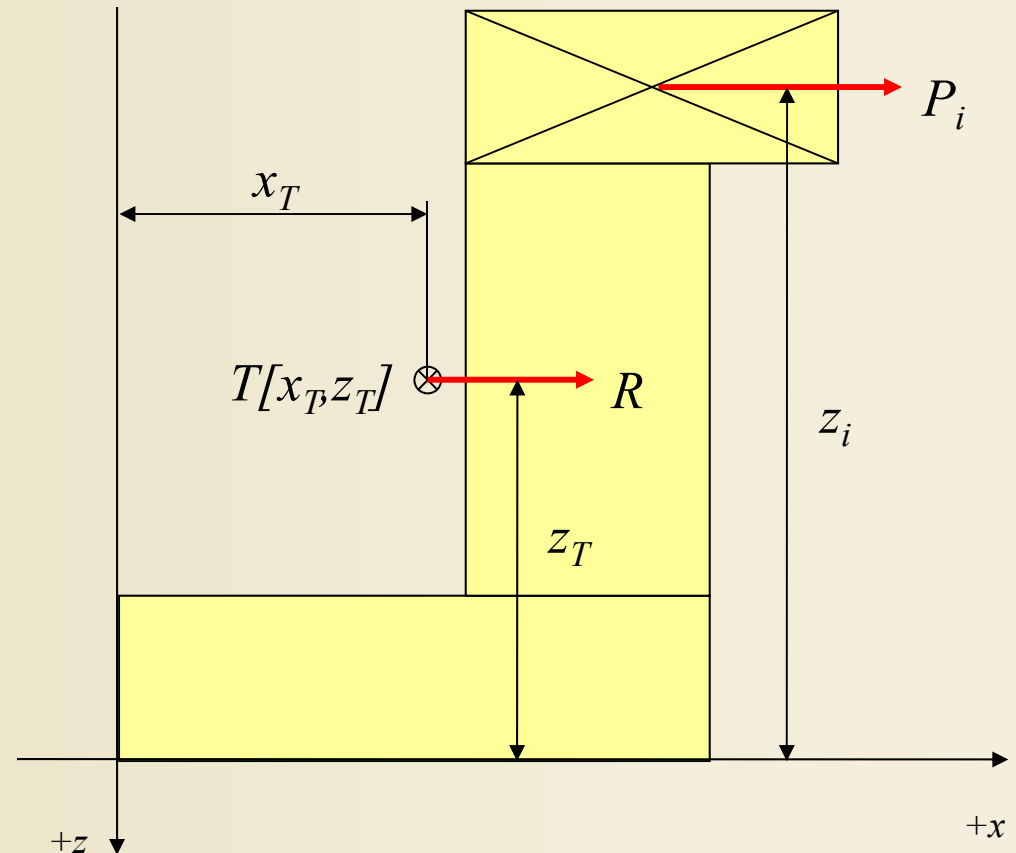
Dřevěné příhradové vazníky



Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

Jednoduchý rovinný obrazec – obrys umožňuje určit polohu těžiště bez výpočtu na základě symetrie nebo výpočtem podle jednoduchého matematického předpisu, tíhově homogenní

Složený rovinný obrazec – několik spojených jednoduchých obrazců



Těžiště obecného rovinného obrazce

Plošný **obsah (plocha)** rovinného obrazce A . $\gamma = 1 \rightarrow A = \gamma \cdot A$

Plocha elementárního obdélníka:

$$dA = dx \cdot dz$$

Celková plocha obrazce: $A = \iint_A dA = \iint_A dx \cdot dz$

Směr rovnoběžných elementárních sil dP
lze volit:

$$dP = \gamma \cdot dA = dA$$

a) v rovině vyšetřovaného obrazce xz ,
povaha rovinné soustavy sil, směr svislý
(z), pak vodorovný (x)

Statické momenty obrazce k
momentovému středu O :

Rozměr [m^3]

$$S_z = \iint_A x \cdot dA = \iint_A x \cdot dx \cdot dz$$

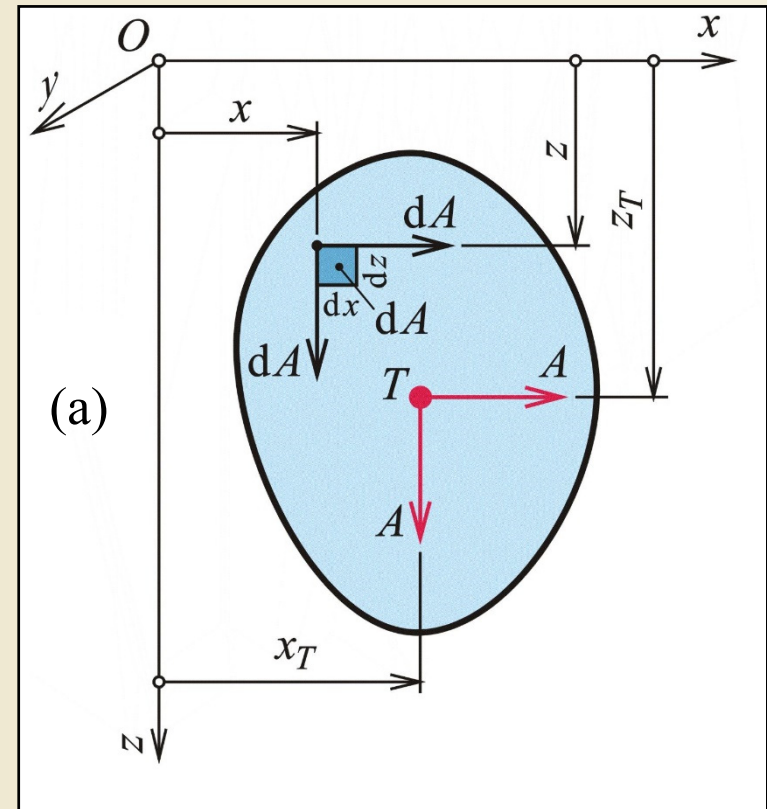
$$S_x = \iint_A z \cdot dA = \iint_A z \cdot dx \cdot dz$$

$$x_T = \frac{S_z}{A}$$

$$z_T = \frac{S_x}{A}$$

Souřadnice těžiště:

Z Varignonovy věty:



Těžiště rovinného obrazce jako statický střed
rovinné soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.11.a. / str. 48

Těžiště obecného rovinného obrazce

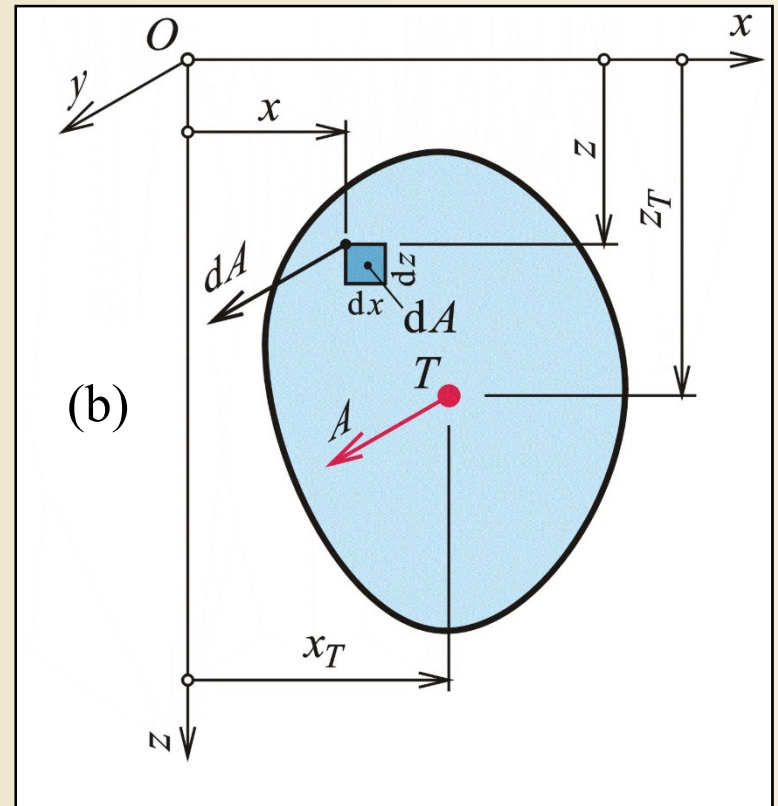
Směr rovnoběžných elementárních sil dP lze volit: $dP = \gamma \cdot dA = dA$

b) kolmo k rovině vyšetřovaného obrazce xz , tedy ve směru y , povaha prostorové soustavy sil, výpočet statických momentů obrazce ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům

Poučka: Je-li rovinný obrazec symetrický podle nějaké osy symetrie, leží těžiště obrazce nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný obrazec dvě nebo více os symetrie – těžiště leží v průsečíku os symetrie a není třeba zjišťovat výpočtem.

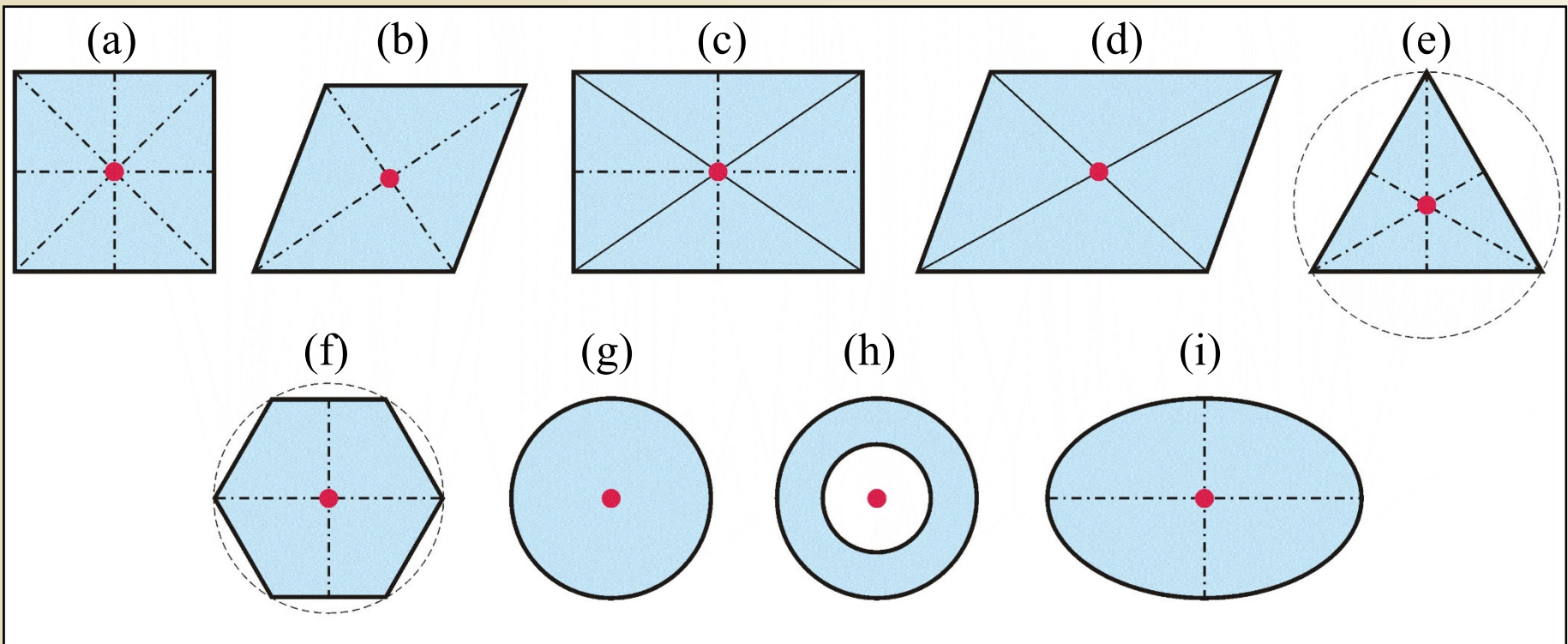


Těžiště rovinného obrazce jako statický střed prostorové soustavy rovnoběžných sil

Obr. 4.11.b. / str. 48

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

a) čtverec **b)** kosočtverec **c)** obdélník **d)** kosodélník **e)** rovnostranný trojúhelník **f)** pravidelný šestiúhelník **g)** kruh **h)** mezikruží **i)** elipsa



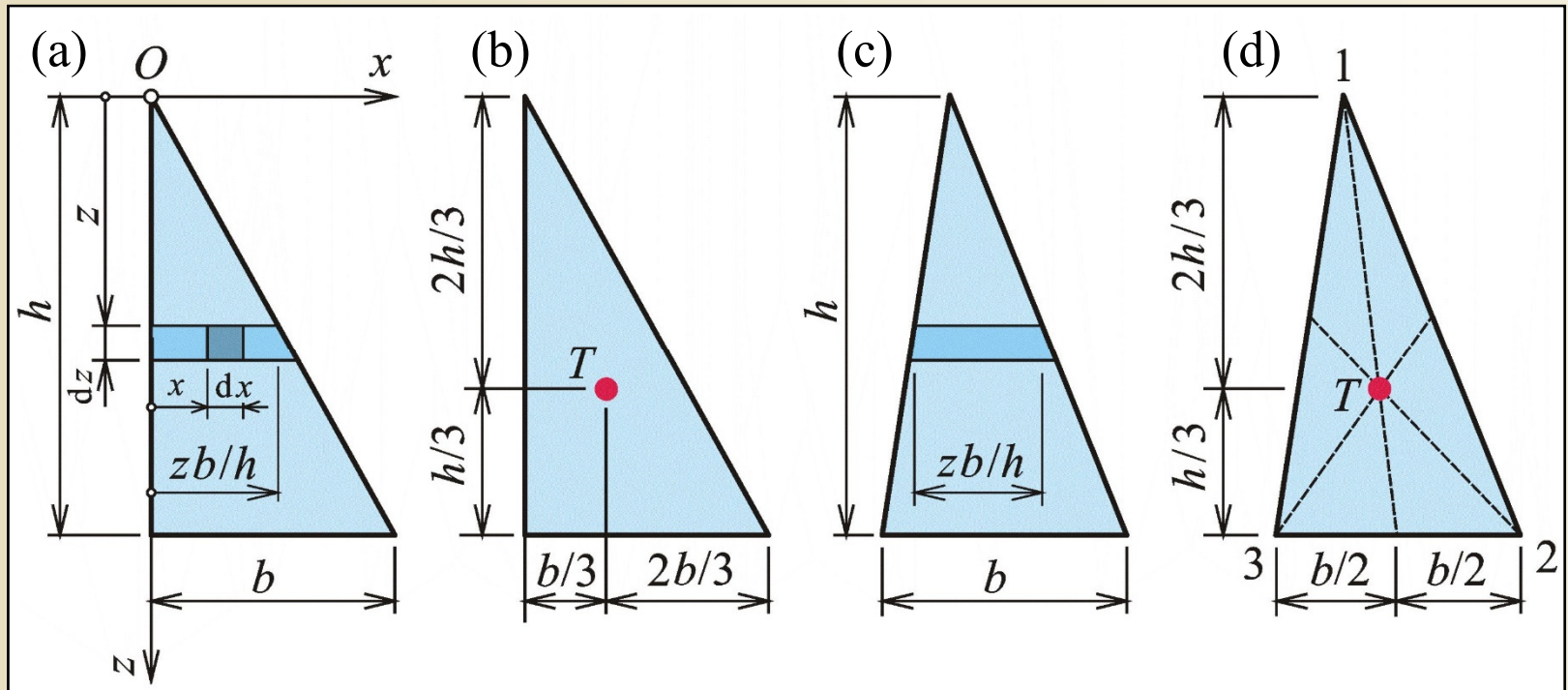
Těžiště některých jednoduchých rovinných obrazců

Obr. 4.12. / str. 50

Těžiště pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Plocha trojúhelníku: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Statický moment: $S_x = \iint_A z \cdot dx \cdot dz = \int_0^h z \left[\int_0^{zb/h} dx \right] dz = \int_0^h z \left[\frac{z \cdot b}{h} \right] dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 dz = \frac{b \cdot h^2}{3}$



Těžiště trojúhelníku

Obr. 4.13. / str. 50

Těžiště pravoúhlého a obecného trojúhelníku

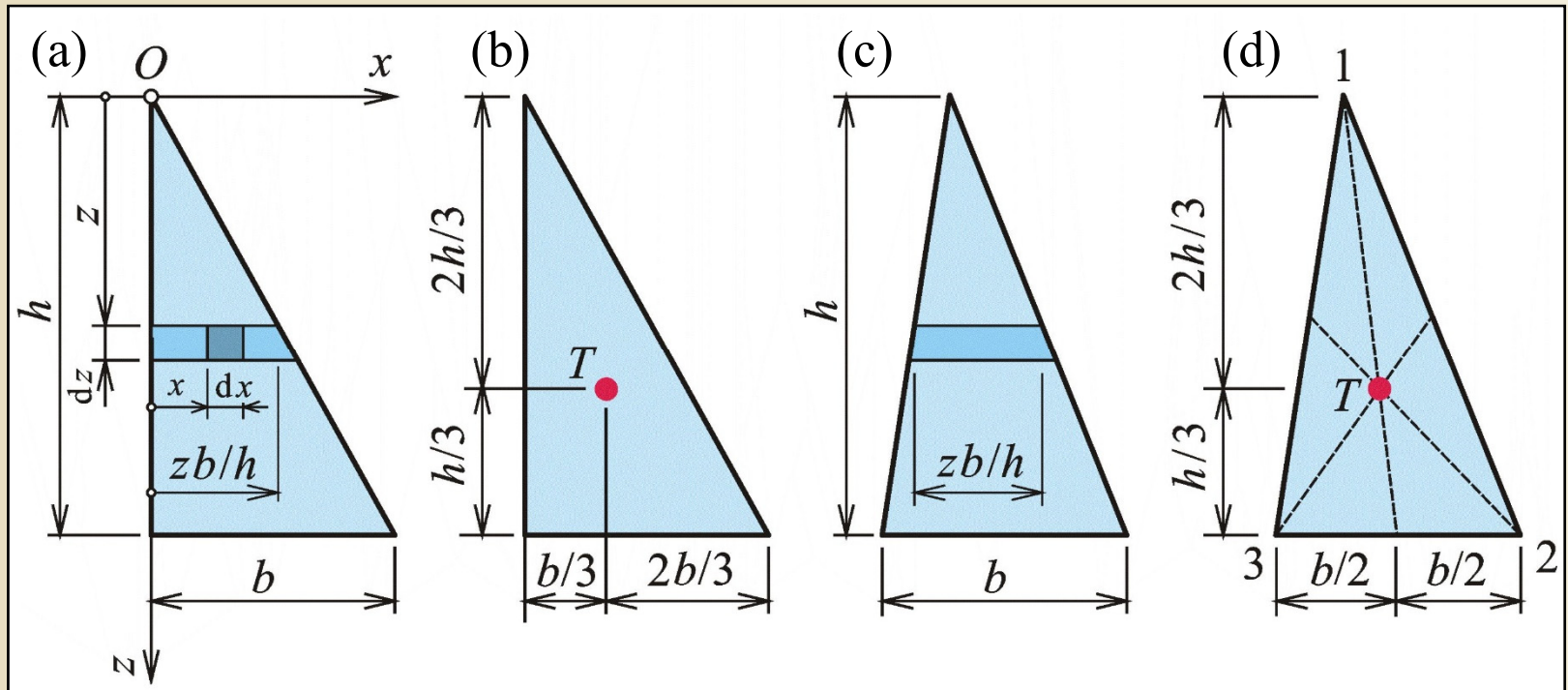
Svislá pořadnice těžiště:

$$z_T = \frac{b \cdot h^2}{3} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{2}{3} \cdot h$$

Výpočet ze souřadnic vrcholů:

$$x_T = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$z_T = \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3)$$



Těžiště trojúhelníku

Obr. 4.13. / str. 50

Plocha kruhové úseče

Symetrie podle osy z , polární soustava – středový úhel 2α , poloměr kružnice r

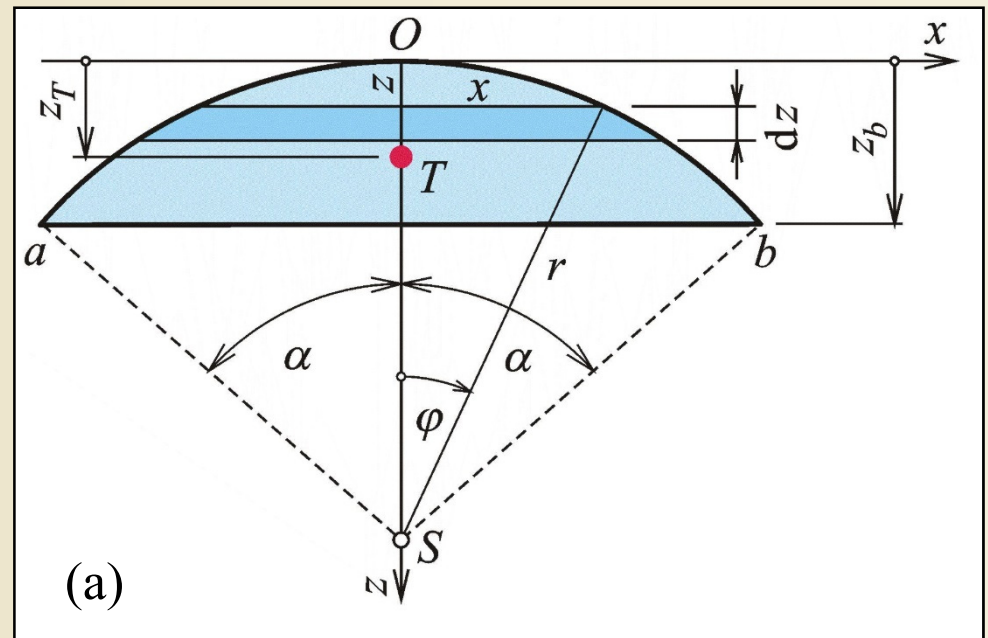
Platí: $x = r \cdot \sin \varphi$ $z = r \cdot (1 - \cos \varphi)$ $dx = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ $dz = r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$ (převod z pravoúhlé soustavy do polární)

Plocha úseče:

$$A = \iint_A dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = 2 \cdot r^2 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

Statický moment:

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_A z \cdot dx \cdot dz = 2 \cdot \int_0^{z_b} x \cdot z \cdot dz = \\ &= 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2 \cdot r^3 \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 2 \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right) \end{aligned}$$



Těžiště kruhové úseče

Obr. 4.14.a. / str. 51

Těžiště kruhové úseče, půlkruhu a čtvrtkruhu

Souřadnice kruhové úseče:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = \frac{2 \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right)}{r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$$

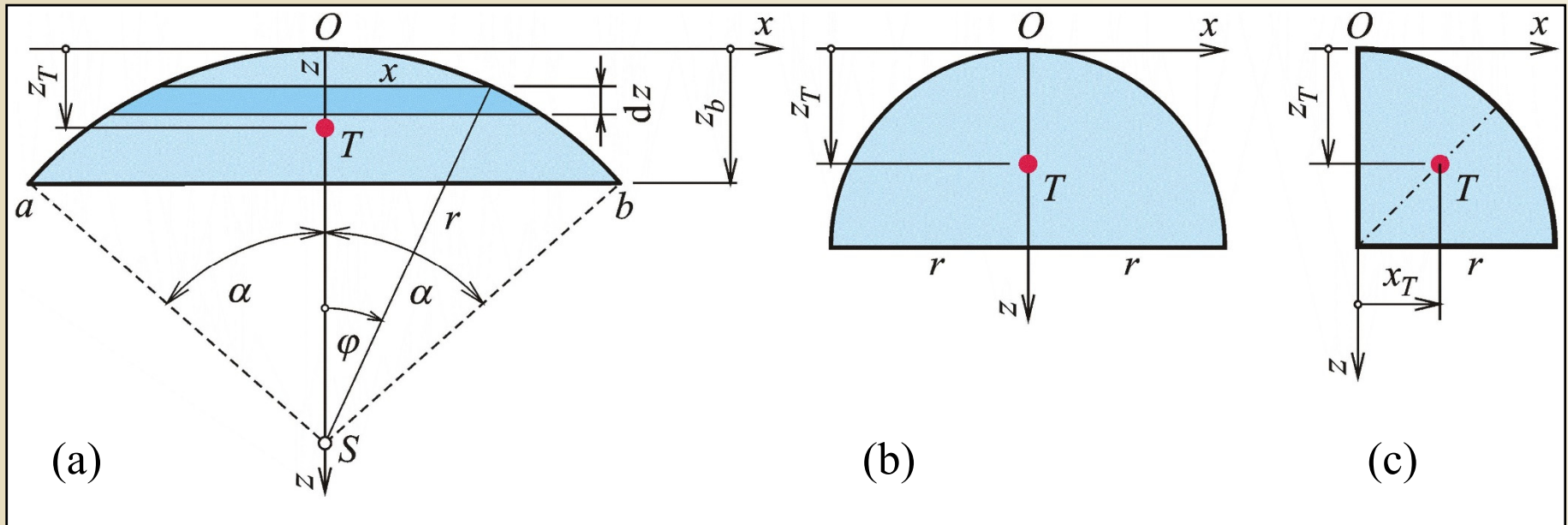
Půlkruh:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3 \cdot \pi} \right) \doteq 0,5756r$$

Čtvrtkruh:

$$x_T = r - z_T = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \doteq 0,4244r$$



Těžiště kruhové úseče (a), půlkruhu (b) a čtvrtkruhu (c)

Obr. 4.14. / str. 51

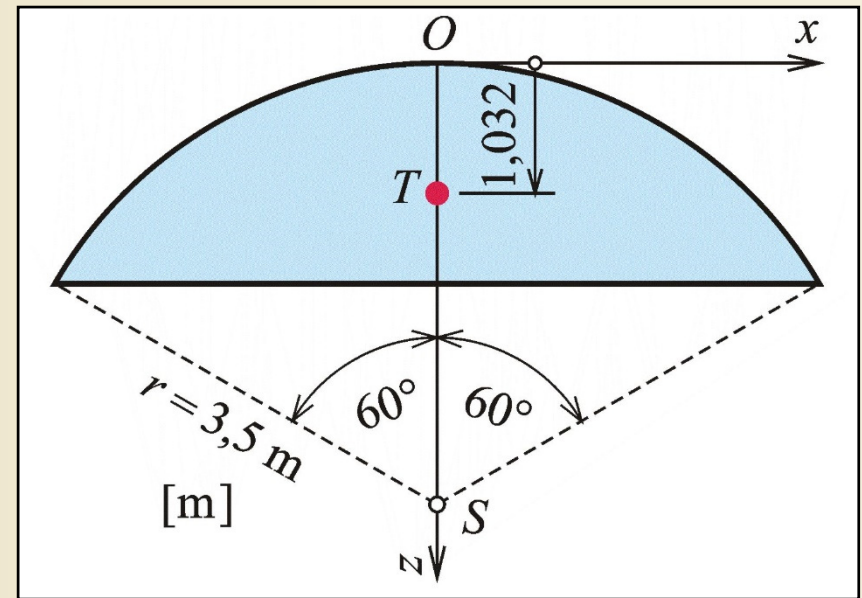
Příklad 9.4

Zadáno: $r = 3,5\text{m}$ $2\alpha = 120^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} = 1,0472\text{rad}$

$z_T = ?$

Řešení:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = 1,032 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.4

Obr. 4.15. / str. 52

Těžiště parabolické úseče

Plocha parabolické úseče:

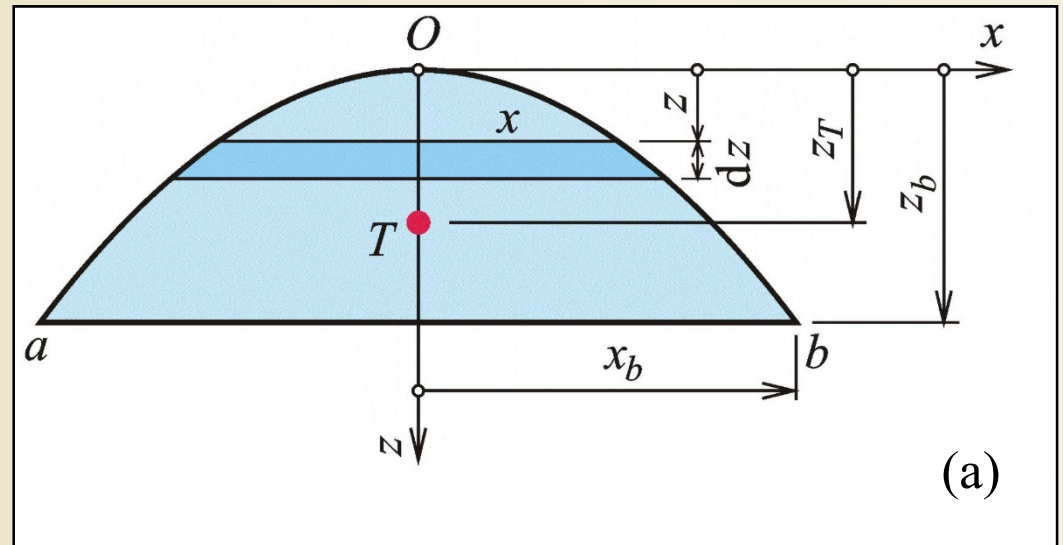
$$A = \iint_A dx.dz = 2 \cdot \int_0^{z_b} x.dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} x \cdot 2kx.dz = 4k \cdot \int_0^{x_b} x^2 .dz = \frac{4}{3} \cdot \frac{z_b}{x_b^2} \cdot x_b^3 = \frac{4}{3} \cdot x_b z_b.$$

Statický moment parabolické úseče:

$$S_x = \iint_A z . dx . dz = 2 \cdot \int_0^{z_b} z . x . dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} kx^3 \cdot 2kx . dz = 4k^2 \cdot \int_0^{x_b} x^4 . dz = \frac{4}{5} \cdot \frac{z_b^2}{x_b^4} \cdot x_b^5 = \frac{4}{5} \cdot x_b z_b^2$$

Vzdálenost těžiště:

$$z_T = \frac{4}{5} \cdot x_b z_b^2 \cdot \frac{3}{4 \cdot x_b z_b} = \frac{3}{5} z_b$$



Těžiště parabolické úseče

Obr. 4.16.a. / str. 53

Těžiště poloviny parabolické úseče

Plocha poloviny
parabolické úseče:

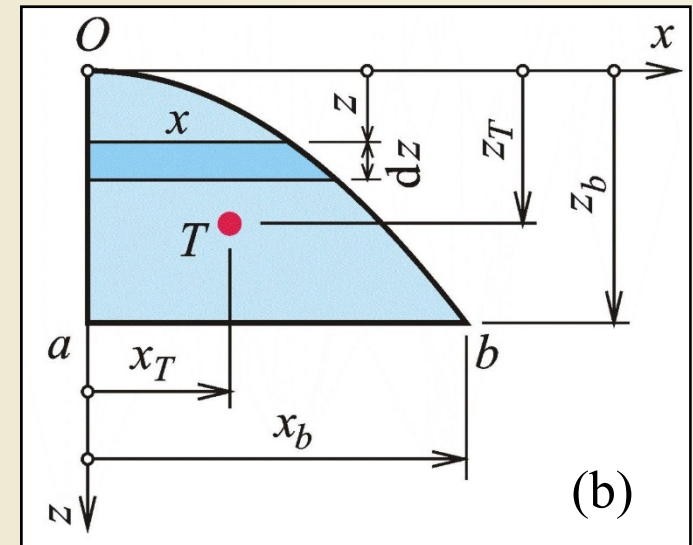
$$A = \frac{2}{3} \cdot x_b z_b.$$

Statický moment
poloviny
parabolické úseče:

$$S_z = \iint_A x \cdot dx \cdot dz = \int_0^{z_b} \left[\int_0^x x \cdot dx \right] dz = \int_0^{z_b} \frac{x^2}{2} \cdot 2kx \cdot dx = k \cdot \int_0^{x_b} x^3 \cdot dx = \frac{z_b}{x_b^2} \cdot \frac{x_b^4}{4} = \frac{1}{4} \cdot x_b^2 z_b$$

Vzdálenost těžiště:

$$x_T = \frac{1}{4} \cdot x_b^2 z_b \cdot \frac{3}{2 \cdot x_b z_b} = \frac{3}{8} x_b$$

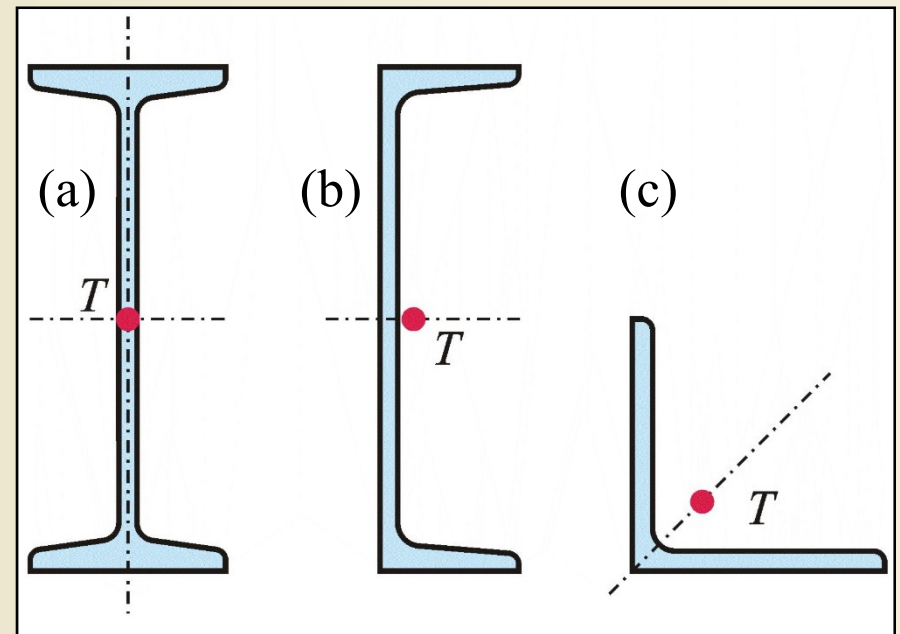


Těžiště poloviny parabolické úseče

Obr. 4.16.b. / str. 53

Těžiště ocelových válcovaných tyčí

Válcované průřezy (profily): různé tvary, I-profil, U-profil, rovnoramenný úhelník



Příklady válcovaných profilů

Obr. 4.17. / str. 53

Ocelové válcované tyče



Tabulky ocelových válcovaných profilů

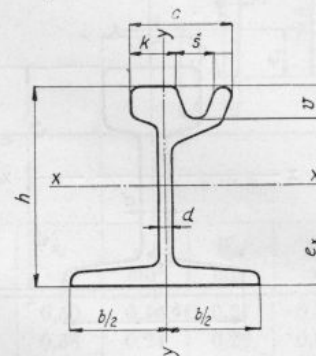
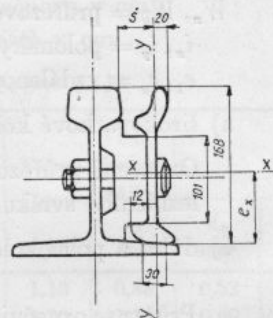
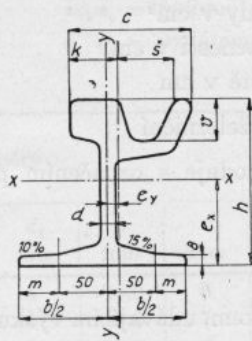
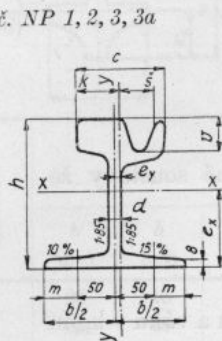
3.43. Žlábkové kolejnice

č. NP 4

č. NP 5

č. 200/210

č. NP 1, 2, 3, 3a



J_x, J_y = momenty setrvačnosti v cm^4
 i_x, i_y = poloměry setrvačnosti v cm
 W_x, W_y = průřezové moduly v cm^3
 e_x = vzdálenost těžiště od patky v cm
 e_y = vzdálenost těžiště od svislé osy (u L pro NP 5 od pravého kraje stěny) v cm

| Označení průřezu | Rozměry | | | | | Žlábek | | Plocha průřezu F cm^2 | Yáha G $\text{kg/m}'$ | Poloha těžiště | | $x - x$ | | | $y - y$ | | |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|--|-------------------------------|----------------|-------------|------------------------|------------------------|-------------|------------------------|------------------------|-------------|
| | h mm | b mm | c mm | k mm | d mm | ξ mm | v mm | | | e_x cm | e_y cm | J_x cm^4 | W_x cm^3 | i_x cm | J_y cm^4 | W_y cm^3 | i_y cm |
| NP 1 | 160 | 150 | 96 | 47 | 12 | 33 | 37 | 59,18 | 46,45 | 8,13 | 0,57 | 2053 | 251,0 | 5,89 | 486 | 60,2 | 2,87 |
| NP 2 | 180 | 160 | 101 | 50 | 13 | 33 | 40 | 67,12 | 52,70 | 9,22 | 0,62 | 3034 | 329,5 | 6,72 | 602 | 69,8 | 2,99 |
| NP 3 | 180 | 180 | 108 | 55 | 13 | 33 | 40 | 73,32 | 57,55 | 9,18 | 0,63 | 3352 | 365,0 | 6,76 | 853 | 88,6 | 3,41 |
| NP 3a | 180 | 180 | 121 | 55 | 13 | 36 | 40 | 79,00 | 62,00 | 9,55 | 1,10 | 3561 | 372,9 | 6,71 | 1058 | 104,7 | 3,66 |
| NP 4 | 180 | 180 | 134 | 56 | 14 | 60 | 45 | 82,90 | 65,08 | 9,25 | 1,30 | 3450 | 373,0 | 6,45 | 1220 | 118,4 | 3,84 |
| NP 5 | 180 | 180 | 53 | 53 | 14 | — | — | 61,30 | 48,12 | 7,91 | 0,01 | 2840 | 281,4 | 6,81 | 536 | 59,5 | 2,96 |
| L pro NP 5 | 168 | — | — | 20 | 11 | — | — | 27,25 | 21,39 | 8,42 | 0,22 | 920 | 105,5 | 5,72 | 49 | 21,4 | 1,34 |
| 200/210 | 210 | 200 | 110 | 52 | 11,5 | 36 | 33 | 78,60 | 61,75 | 10,60 | — | 5180 | 488,7 | 8,12 | — | — | — |

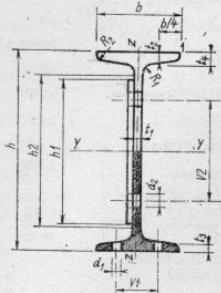
Tabulky ocelových válcovaných profilů

3 SORTIMENT VÁLCOVANÝCH PRŮŘEZŮ

3.1 PRŮŘEZY VÁLCOVANÉ ZA TEPLA

3.1.1 TYČE PRŮŘEZU I, IE, IPE, HEB

3.1.1.1 Tyče průřezu I



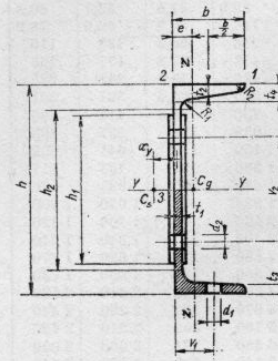
Sklon přírub: I 80—I 330 14 %
I 400 15 %
I 450 16 %
I 500 17 %

- Odpovídající normy:
ČSN 42 5550 Tyče průřezu I. Rozměrová norma.
ON 73 1580 Hodnoty statických veličin průřezů.
ČSN 42 0135 Technické dodací podmínky.
 - Tyče průřezu I se vyrábějí:
z oceli 11 373.0 v rozměrech I 80—I 240
z oceli 11 375.0 v rozměrech I 260—I 500
z oceli 11 523.0 v rozměrech I 80—I 500
 - Tyče průřezu I se dodávají:
 - Ve výrobních délkách. Při objednávce se jejich délka nepředepisuje. Dodavatel dodá tyče v délkách 3 až 12 m.
 - V omezených délkách. Omezené délky volí objednatel v rozsahu výrobních délek v celých metrech s rozmezím nejméně 1,0 m.
 - V přesných délkách. Jmenovanou délkou volí objednatel v rozmezích 3 až 12 m.
- Mezní úchytky jsou:
±100 mm; ±50 mm; ±25 mm; ±10 mm
+200 mm; +100 mm; +50 mm; +20 mm
Mezní úchytky musí být v objednávce uvedena. Pokud není, dodá hut tyče v mezní úchytky ±100 mm.
- V násobcích přesných délek. Při objednávce tyčí v násobcích se dodávají tyče s přídatkem 10 mm na každý řez s celkovou úchytkou +200 mm na délku celé tyče.
 - Délky větší než 12,0 m jen po dohodě s hutí.

| Průřez I | Jmenovité rozměry | | | | | | | | | | Vrtání | | | | Povrch |
|----------|-------------------|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| | b | h | h ₁ | h ₂ | t ₁ | t ₂ | t ₃ | t ₄ | R ₁ | R ₂ | v ₁ | d ₁ | v ₂ | d ₂ | A _{su} |
| | mm | | | | | | | | | | | | | | m ² m ⁻¹ |
| 80 | 42 | 80 | 45 | 59 | 3,9 | 5,9 | 4,43 | 7,4 | 3,9 | 2,3 | 22 | 8,5 | — | 13 | 0,304 |
| 100 | 50 | 100 | 65 | 75 | 4,5 | 6,8 | 5,05 | 8,6 | 4,5 | 2,7 | 26 | 11 | — | 13 | 0,370 |
| 120 | 58 | 120 | 80 | 92 | 5,1 | 7,7 | 5,67 | 9,7 | 5,1 | 3,1 | 30 | 11 | 40 | 13 | 0,439 |
| 140 | 66 | 140 | 100 | 109 | 5,7 | 8,6 | 6,29 | 10,9 | 5,7 | 3,4 | 34 | 11 | 60 | 13 | 0,502 |
| 160 | 74 | 160 | 110 | 125 | 6,3 | 9,5 | 6,91 | 12,1 | 6,3 | 3,8 | 38 | 13 | 60 | 17 | 0,575 |
| 180 | 82 | 180 | 130 | 142 | 6,9 | 10,4 | 7,53 | 13,3 | 6,9 | 4,1 | 44 | 13 | 80 | 17 | 0,640 |
| 200 | 90 | 200 | 150 | 159 | 7,5 | 11,3 | 8,15 | 14,4 | 7,5 | 4,5 | 46 | 17 | 90 | 21 | 0,709 |
| 220 | 98 | 220 | 160 | 175 | 8,1 | 12,2 | 8,77 | 15,6 | 8,1 | 4,9 | 52 | 17 | 100 | 21 | 0,775 |
| 240 | 106 | 240 | 180 | 192 | 8,7 | 13,1 | 9,39 | 16,8 | 8,7 | 5,2 | 56 | 17 | 120 | 21 | 0,844 |
| 260 | 113 | 260 | 200 | 208 | 9,4 | 14,1 | 10,2 | 18,1 | 9,4 | 5,6 | 58 | 17 | 130 | 21 | 0,906 |
| 280 | 119 | 280 | 210 | 225 | 10,1 | 15,2 | 11,0 | 19,4 | 10,1 | 6,1 | 62 | 21 | 140 | 25 | 0,966 |
| 300 | 125 | 300 | 230 | 241 | 10,8 | 16,2 | 11,8 | 20,6 | 10,8 | 6,5 | 64 | 21 | 150 | 25 | 1,03 |
| 320 | 131 | 320 | 250 | 257 | 11,5 | 17,3 | 12,7 | 21,9 | 11,5 | 6,9 | 70 | 21 | 170 | 25 | 1,09 |
| 340 | 137 | 340 | 270 | 274 | 12,2 | 18,3 | 13,5 | 23,1 | 12,2 | 7,3 | 74 | 21 | 190 | 25 | 1,15 |
| 360 | 143 | 360 | 290 | 290 | 13,0 | 19,5 | 14,5 | 24,5 | 13,0 | 7,8 | 74 | 21 | 200 | 25 | 1,21 |
| 380 | 149 | 380 | 300 | 306 | 13,7 | 20,5 | 15,3 | 25,7 | 13,7 | 8,2 | 80 | 21 | 220 | 25 | 1,27 |
| 400 | 155 | 400 | 320 | 323 | 14,4 | 21,6 | 16,2 | 27,0 | 14,4 | 8,6 | 84 | 25 | 240 | 25 | 1,33 |
| 450 | 170 | 450 | 360 | 363 | 16,2 | 24,3 | 18,4 | 30,3 | 16,2 | 9,7 | 92 | 25 | 280 | 25 | 1,48 |
| 500 | 185 | 500 | 400 | 404 | 18,0 | 27,0 | 20,5 | 33,5 | 18,0 | 10,8 | 100 | 25 | 320 | 25 | 1,63 |

3.1.2 TYČE PRŮŘEZU U, UE, UPE

3.1.2.1 Tyče průřezu U

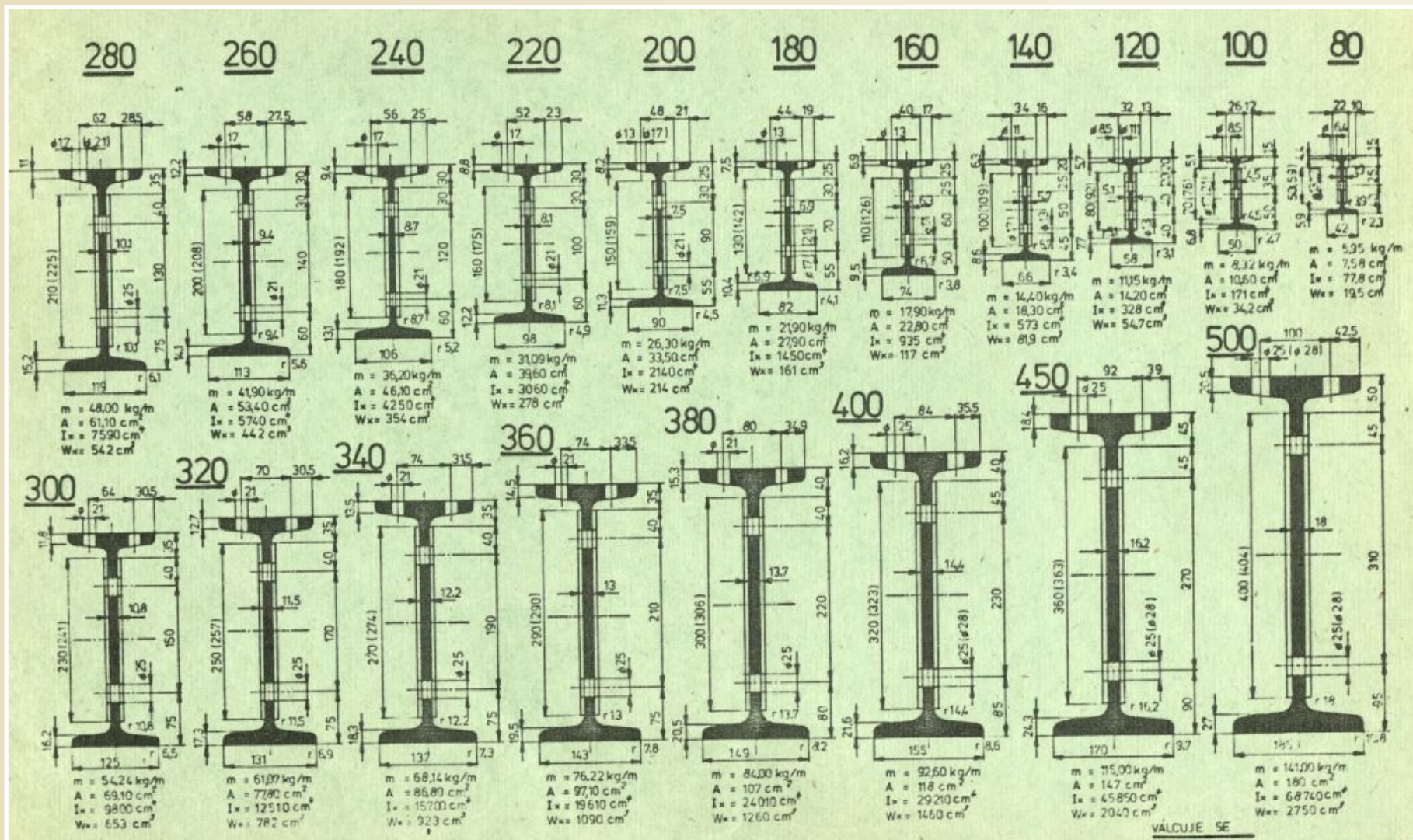


Sklon přírub 8 %

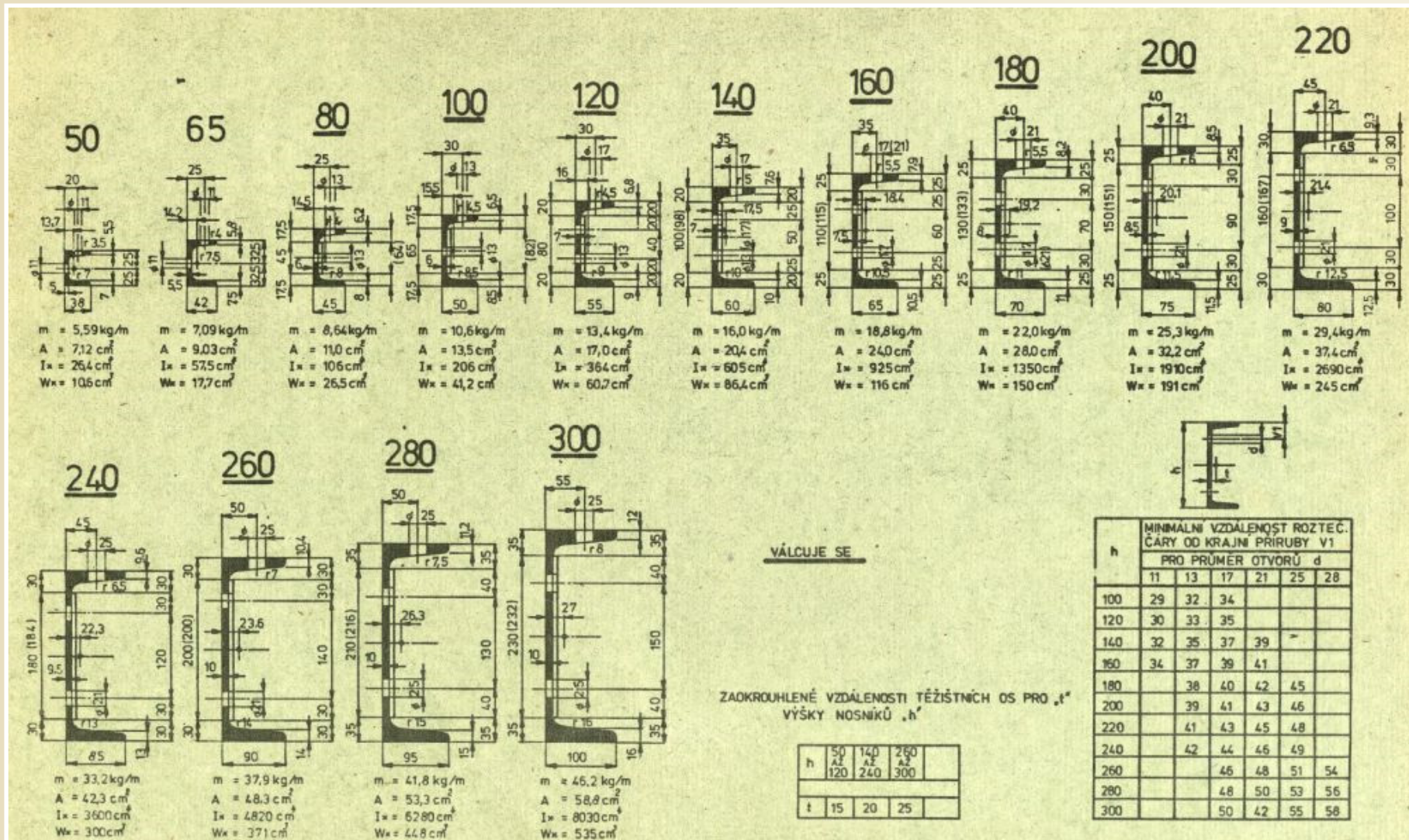
- Odpovídající normy:
ČSN 42 5570 Tyče průřezu U. Rozměrová norma.
ON 73 1580 Hodnoty statických veličin průřezů.
ČSN 42 0135 Technické dodací podmínky.
- Tyče U se vyrábějí:
z oceli 11 373.0 v rozměrech U 50—U 240,
z oceli 11 375.0 v rozměrech U 260—U 300,
z oceli 11 523.0 v rozměrech U 80—U 300.
- Tyče U se dodávají:
 - Ve výrobních délkách. Při objednávce se délka nepředepisuje. Dodavatel dodá tyče v délkách 3 až 12 m.
 - V omezených délkách. Omezené délky volí objednatel v rozsahu výrobních délek v celých metrech s rozmezím nejméně 1,0 m.
 - V přesných délkách. Délky volí objednatel v rozmezí 3 až 12 m.
Mezní úchytky jsou:
±100 mm; ±50 mm; ±25 mm; ±10 mm
+200 mm; +100 mm; +50 mm; +20 mm
Mezní úchytky musí být uvedena v objednávce. Není-li uvedena, dodá hut tyče s mezní úchytkou ±100 mm.
 - V násobcích přesných délek. Tyče se dodávají s přídatkem 10 mm na každý řez a s celkovou úchytkou +200 mm na délku celé tyče.
 - Větší délky než 12,0 m se dodávají jen po dohodě s hutí.

| Průřez U | Jmenovité rozměry | | | | | | | | | | Vrtání | | | | Povrch | |
|----------|-------------------|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|-----------------|
| | b | h | h ₁ | h ₂ | t ₁ | t ₂ | t ₃ | t ₄ | R ₁ | R ₂ | e | v ₁ | d ₁ | v ₂ | d ₂ | A _{su} |
| | mm | | | | | | | | | | | | | | m ² m ⁻¹ | |
| 50 | 38 | 50 | — | — | 5,0 | 7,0 | 5,48 | 8,52 | 7,0 | 3,5 | 13,7 | 20 | 11 | — | — | 0,23 |
| 65 | 42 | 65 | — | — | 5,5 | 7,5 | 5,82 | 9,18 | 7,5 | 4,0 | 14,2 | 25 | 11 | — | 11 | 0,27 |
| 80 | 45 | 80 | 45 | 46 | 6,0 | 8,0 | 6,2 | 9,80 | 8,0 | 4,0 | 14,5 | 25 | 13 | — | 13 | 0,31 |
| 100 | 50 | 100 | 65 | 64 | 6,0 | 8,5 | 6,5 | 10,5 | 8,5 | 4,5 | 15,5 | 30 | 13 | — | 13 | 0,37 |
| 120 | 55 | 120 | 80 | 82 | 7,0 | 9,0 | 6,8 | 11,2 | 9,0 | 4,5 | 16,1 | 30 | 17 | 40 | 13 | 0,43 |
| 140 | 60 | 140 | 100 | 98 | 7,0 | 10,0 | 7,6 | 12,4 | 10,0 | 5,0 | 17,6 | 35 | 17 | 60 | 13 | 0,49 |
| 160 | 65 | 160 | 110 | 115 | 7,5 | 10,5 | 7,9 | 13,1 | 10,5 | 5,5 | 18,4 | 35 | 17 | 60 | 17 | 0,54 |
| 180 | 70 | 180 | 130 | 133 | 8,0 | 11,0 | 8,2 | 13,8 | 11,0 | 5,5 | 19,3 | 40 | 21 | 80 | 17 | 0,60 |
| 200 | 75 | 200 | 150 | 151 | 8,5 | 11,5 | 8,5 | 14,5 | 11,5 | 6,0 | 20,1 | 40 | 21 | 90 | 21 | 0,66 |
| 220 | 80 | 220 | 160 | 167 | 9,0 | 12,5 | 9,3 | 15,7 | 12,5 | 6,5 | 21,4 | 45 | 21 | 100 | 21 | 0,72 |
| 240 | 85 | 240 | 180 | 184 | 9,5 | 13,0 | 9,6 | 16,4 | 13,0 | 6,5 | 22,4 | 45 | 21 | 120 | 21 | 0,78 |
| 260 | 90 | 260 | 200 | 200 | 10,0 | 14,0 | 10,4 | 17,6 | 14,0 | 7,0 | 23,7 | 50 | 21 | 140 | 21 | 0,83 |
| 280 | 95 | 280 | 210 | 216 | 10,0 | 15,0 | 11,2 | 18,8 | 15,0 | 7,5 | 25,3 | 50 | 21 | 130 | 25 | 0,89 |
| 300 | 100 | 300 | 230 | 232 | 10,0 | 16,0 | 12,0 | 20,0 | 16,0 | 8,0 | 27,0 | 55 | 21 | 150 | 25 | 0,95 |

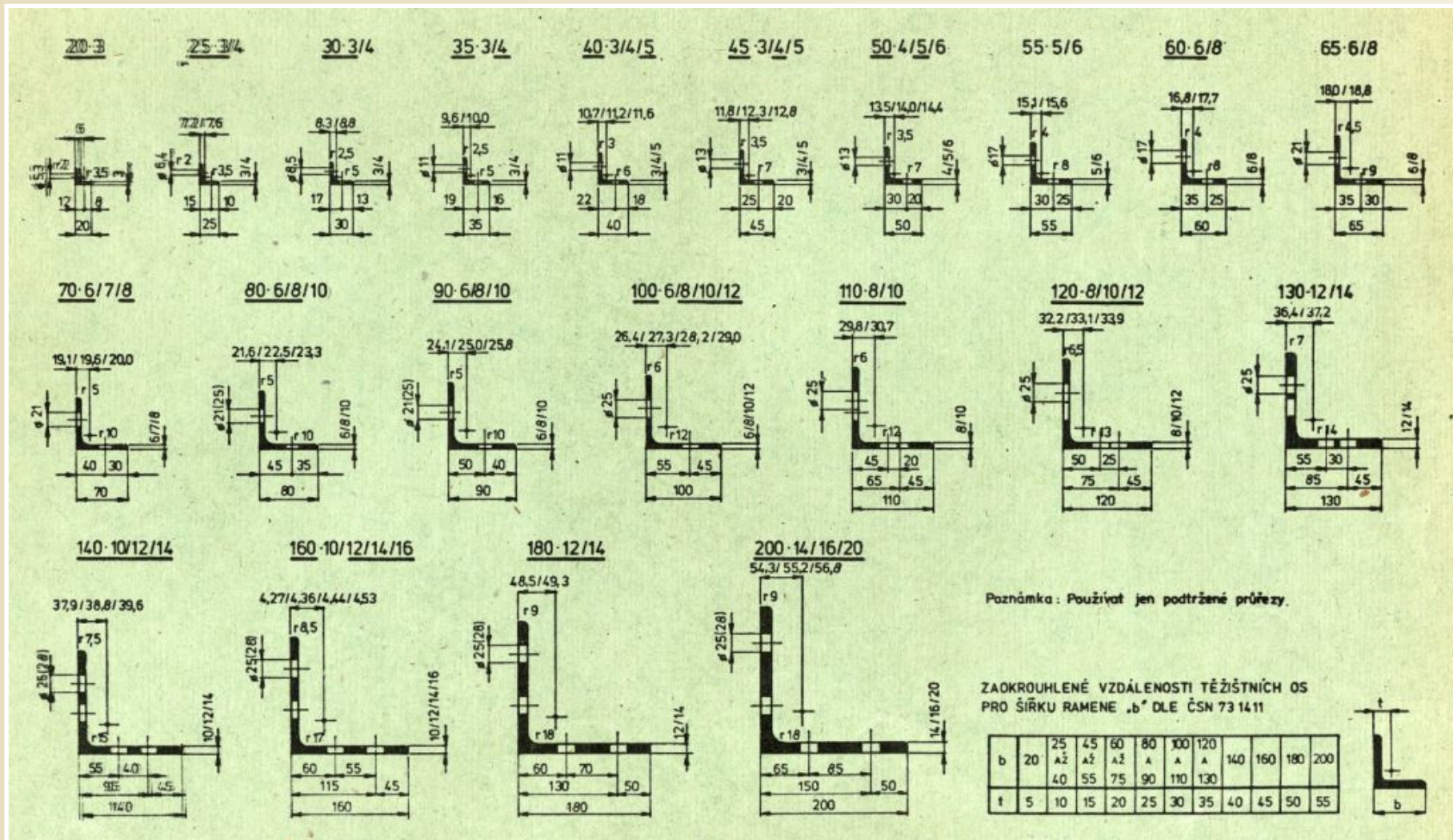
Ocelové válcované tyče profilu I



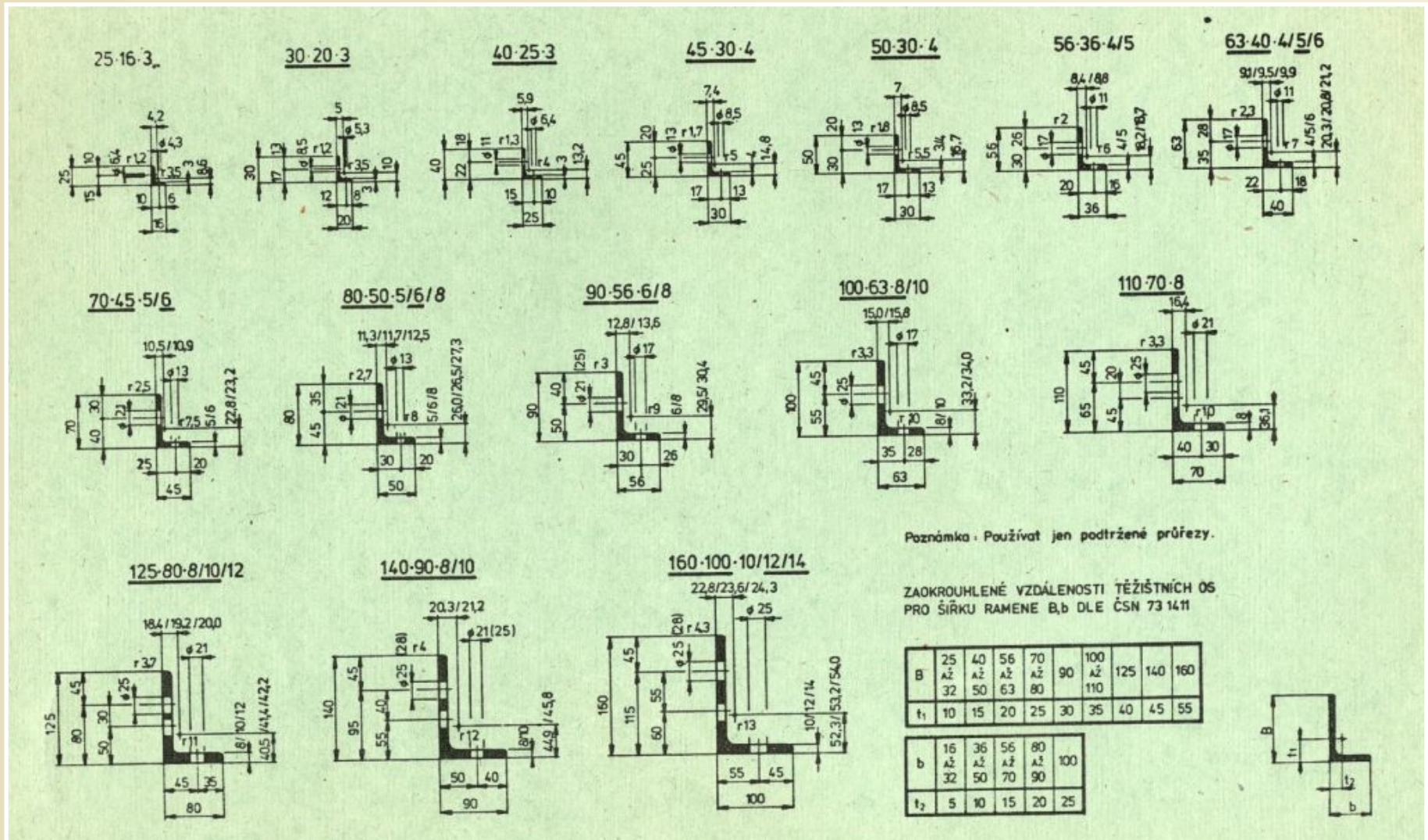
Ocelové válcované tyče profilu U



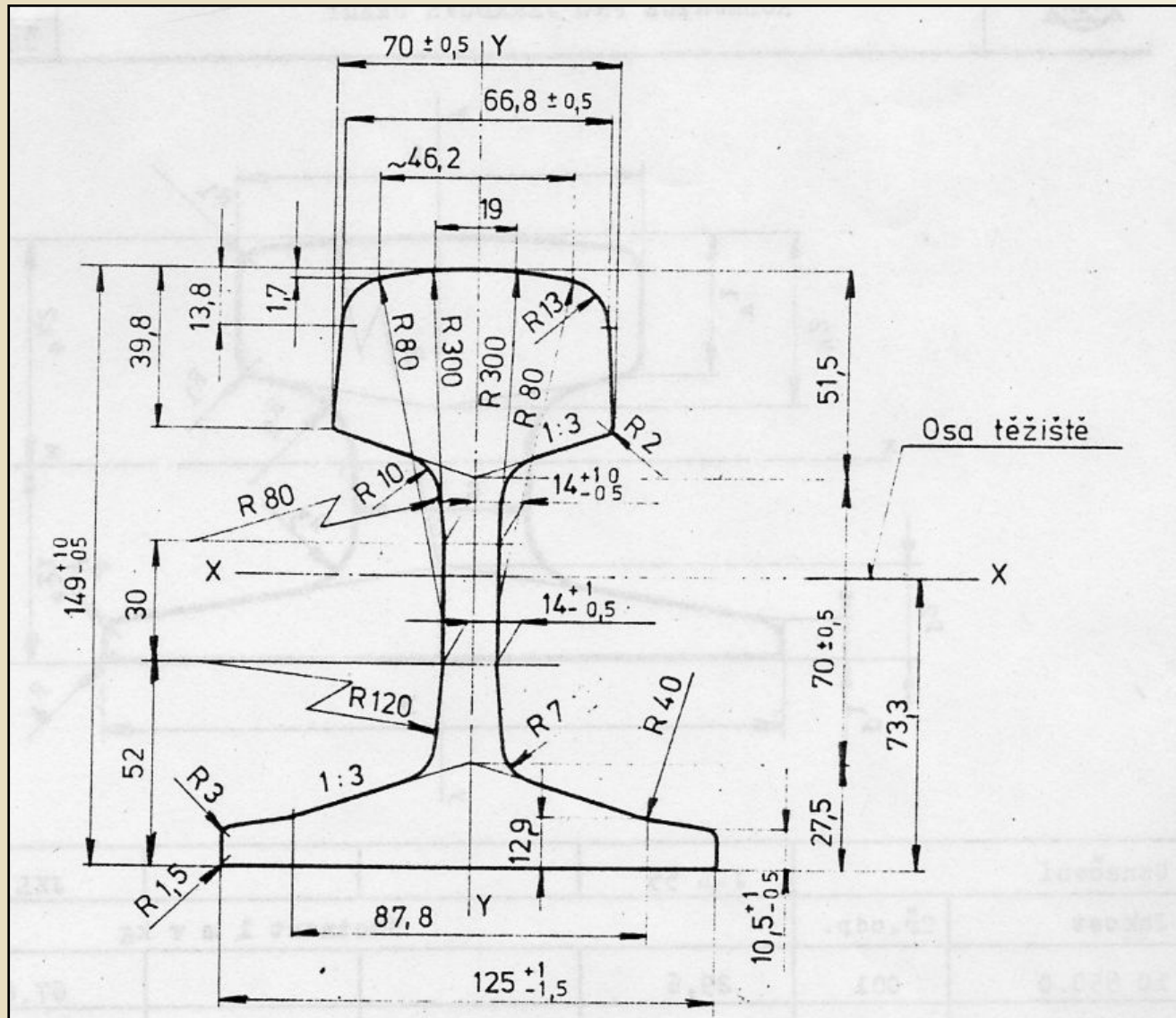
Ocelové válcované rovnoramenné úhelníky



Ocelové válcované nerovnoramenné úhelníky



Ocelové železniční kolejnice



Těžiště složených rovinných obrazců

Složený rovinný obrazec vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných obrazců v téže rovině. Prvky s označením $i=1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - homogenní složený rovinný obrazec.

Postup:

- Složený obrazec umístit do pravoúhlé souřadnicové soustavy xz
- Pro každý prvek i vypočítat plochu A_i a odpovídající tíhovou sílu $P_i = \gamma_i \cdot A_i$
- Pro každý prvek i určit souřadnice x_i a z_i jeho těžiště T_i , možno použít lokální souřadnicovou soustavu
- Zavést sílu P_i do těžiště T_i a určit:
(pro homogenní obrazce platí $R=A$)
$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$
- Vypočítat souřadnice těžiště složeného rovinného obrazce

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

Těžiště kosodélníku, lichoběžníku a obecného čtyřúhelníku

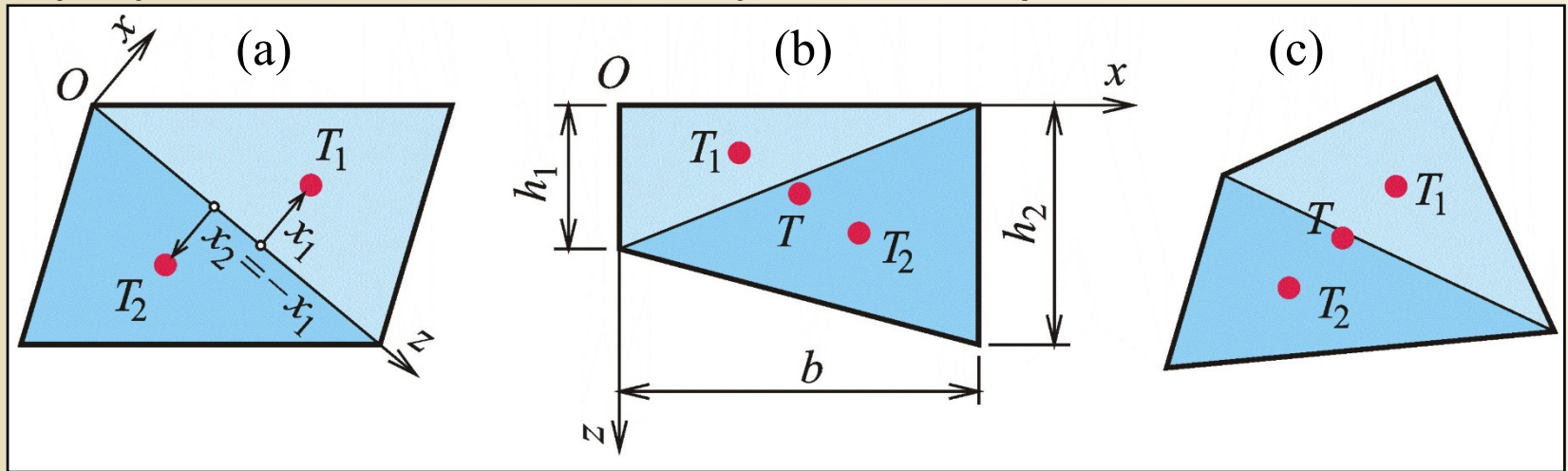
a) kosodélník – úhlopříčka souřadnicová osa z

b) lichoběžník: $A_1 = \frac{b \cdot h_1}{2}$ $x_1 = \frac{b}{3}$ $z_1 = \frac{h_1}{3}$ $A_2 = \frac{b \cdot h_2}{2}$ $x_2 = \frac{2 \cdot b}{3}$ $z_2 = \frac{(h_1 + h_2)}{3}$

$$R = A = \frac{b \cdot (h_1 + h_2)}{2} \quad S_x = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{3} = \frac{b}{6} \cdot (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)$$

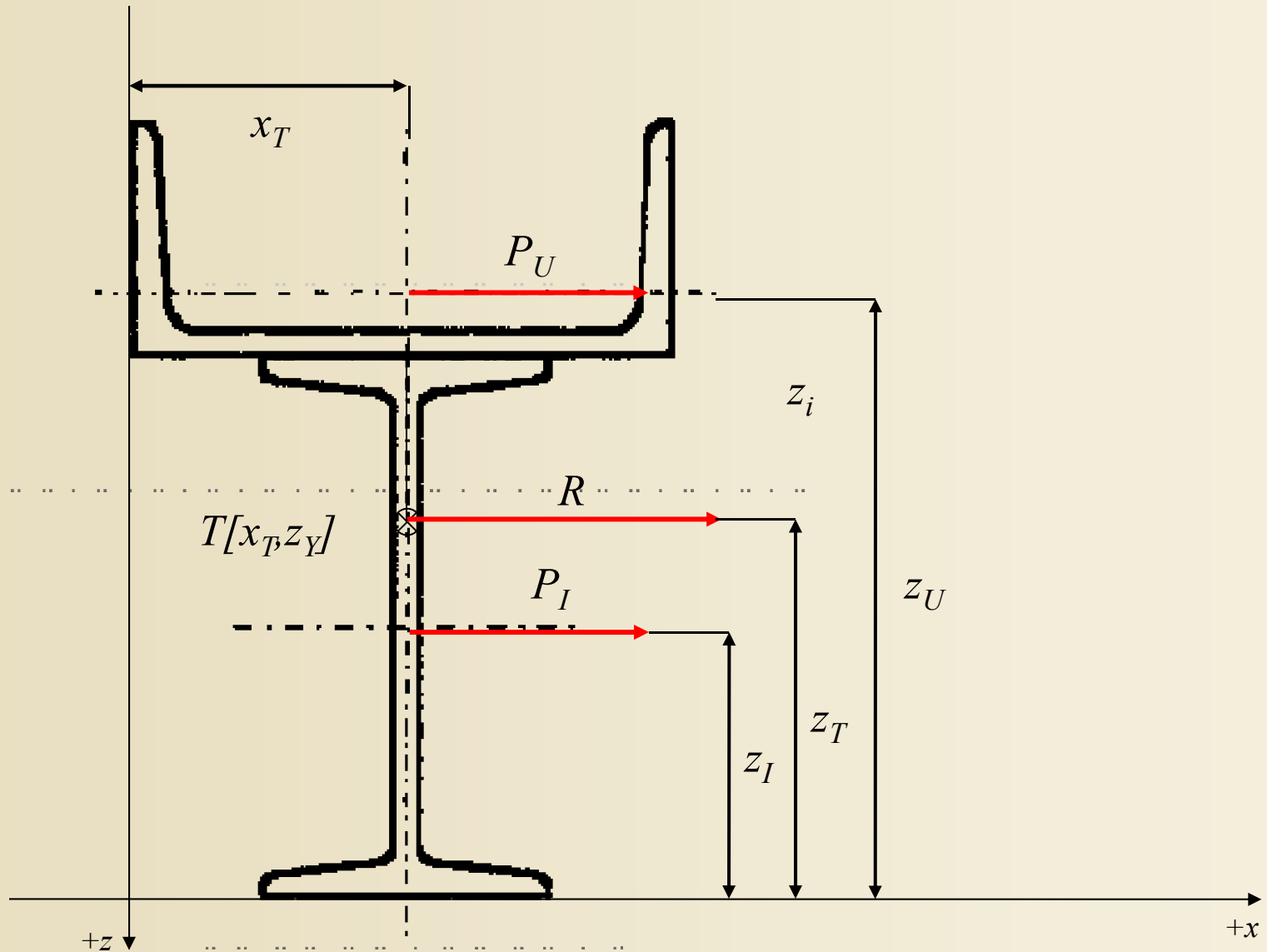
$$S_z = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{b}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{2 \cdot b}{3} = \frac{b^2}{6} \cdot (h_1 + 2 \cdot h_2) \quad x_T = \frac{b}{3} \cdot \frac{h_1 + 2 \cdot h_2}{h_1 + h_2} \quad z_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2}$$

c) obecný čtyřúhelník – obrazec složený ze dvou trojúhelníků



Těžiště kosodélníku (a), lichoběžníku (b) a obecného čtyřúhelníku (c)

Těžiště rovinného obrazce složeného z válcovaných tyčí



Těžiště složených obrazců s otvory a výřezy

Zvláštní případ složených obrazců – **s otvory** (*s oslabením*) nebo **s výřezy** (otvory sousedící s obrysem obrazce)

Výpočet:

Jednotlivé obrazce považovat za samostatné prvky bez otvorů, otvory považovat za další prvky se *zápornou* plochou a měrnou tíhou stejnou jako obrazec obklopující.

Příklad 9.5

Zadáno: homogenní složený rovinný obrazec oslabený otvory, složený z půlkruhu $r=0,3\text{m}$, obdélníku a dvou kruhových otvorů o $r=0,1\text{m}$.

Výpočet těžiště:

a) plochy a souřadnice těžišť prvků i

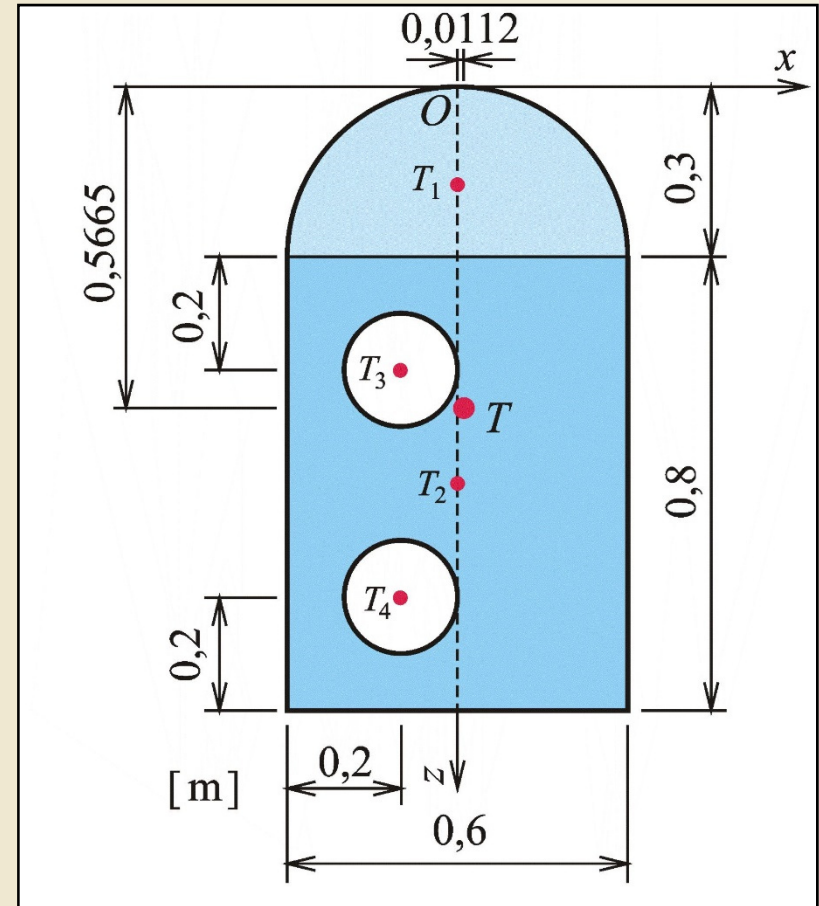
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,5585 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,3164 \text{ m}^3 \quad S_z = +0,00628 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = 0,0112 \text{ m} \quad z_T = 0,5665 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.5

Obr. 4.19. / str. 55

Příklad 9.6

Zadáno: tíhově homogenní rovinný obrazec tvaru **L** (lze řešit jako dva obdélníky nebo jako obdélník opsán průřezu a jeho obdélníkový výřez)

Výpočet těžiště:

a) plochy a souřadnice těžišť prvků i

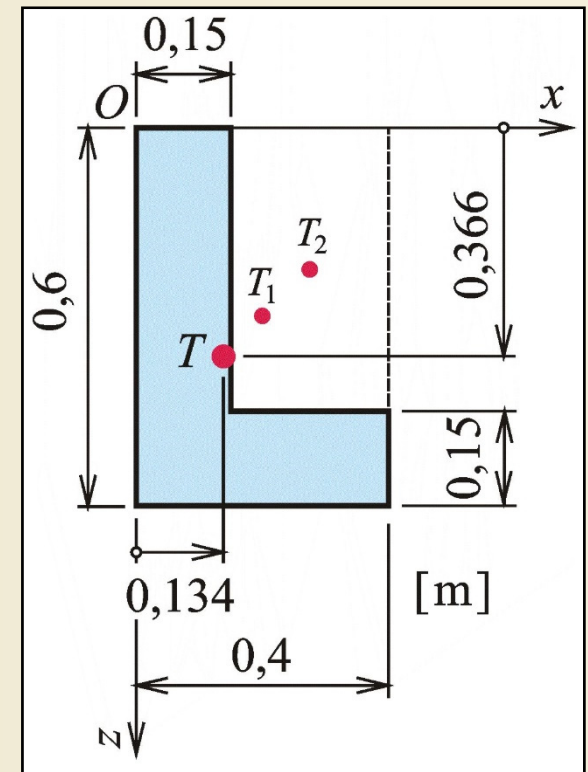
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,1275 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,04669 \text{ m}^3 \quad S_z = 0,01706 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = 0,134 \text{ m} \quad z_T = 0,366 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.6

Obr. 4.20. / str. 56

Příklad 9.7

Zadáno: tíhově nehomogenní rovinný obrazec ze tří obdélníků, γ_1 a $\gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 3$

Výpočet těžiště:

a) tíhové síly a souřadnice těžišť prvků i

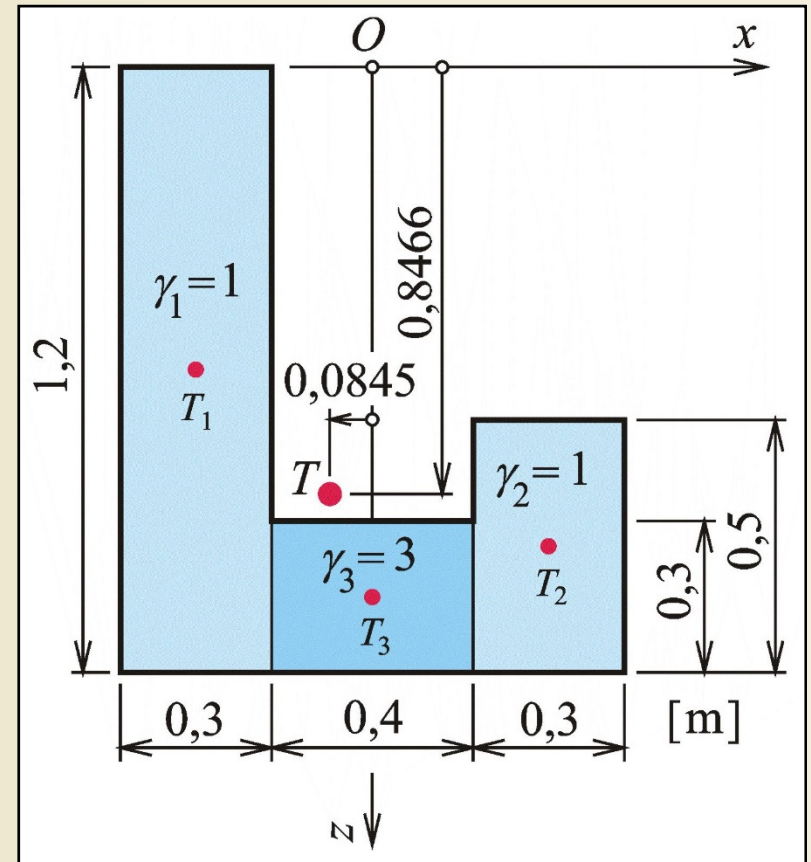
b) výslednice a statické momenty složeného obrazce

$$R = 0,87 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,7365 \text{ m}^3 \quad S_z = -0,0735 \text{ m}^3$$

c) souřadnice těžiště složeného obrazce

$$x_T = -1,230 \text{ m} \quad z_T = 1,210 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 9.7

Obr. 4.21. / str. 56

1. Výpočet těžiště rovinných čar
2. Výpočet těžiště jednoduchých rovinných obrazců
3. Výpočet těžiště složených rovinných obrazců