

## Téma 2 Přímková a rovinná soustava sil

- Přímková soustava sil
- Rovinný svazek sil
- Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině
- Obecná rovinná soustava sil
- Rovinná soustava rovnoběžných sil



Katedra stavební mechaniky  
Fakulta stavební, VŠB - Technická univerzita Ostrava

---

---

---

---

---

---

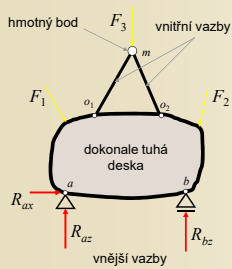
---

---

---

---

### Soustavy sil



#### Téma č. 1

Na nosnou konstrukci působí zvenčí:  
a) **zatižení** (např. nápravové tlaky vozidel, skladované zboží, tíha stavební konstrukce) - vstupní údaj pro řešení konstrukce  
b) **reakce ve vnějších vazbách** - předmět výpočtu

**Vnější síly - zatižení** (primární) a **reakce ve vnějších vazbách** (sekundární), tvoří **soustavu sil**

Řešení soustav sil (tzv. geometrie sil) - **téma č. 2** (přímková a rovinná) a **č. 9** (prostorové).

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Přímková soustava sil

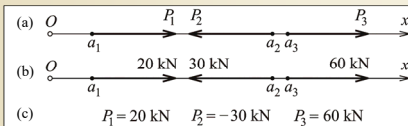
Dvě nebo více sil působí na tuhé těleso v témž paprsku.

**Síla v přímkové úloze** určena pouze 2 údaji ( $x$ ,  $P$  – kladná při shodě smyslu síly se směrem osy).

**Kluzné vektory** – nezáleží na polohách působišť jednotlivých sil, při výpočtu reakcí

**Vázané vektory** – pevně určená působišť jednotlivých sil, při výpočtu vnitřních sil

Grafické znázornění a popis sil



Znázornění a popis přímkové soustavy sil  
Obr. 2.1. / str. 9

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Přímková soustava sil

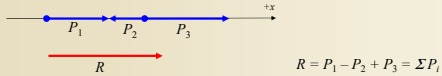
Úloha 1: Stanovení výslednice soustavy sil  $R$  („resultanta“)

Výslednice - síla, která má na těleso stejný účinek jako celá soustava sil, s danou soustavou je ekvivalentní. U přímkové soustavy leží na stejném paprsku soustavy a je rovna:

$$R = \sum_{i=1}^n P_i$$

Znaménko výslednice udává smysl, nelze určit působiště – kluzný vektor.

Například :



Přímková soustav sil

4 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

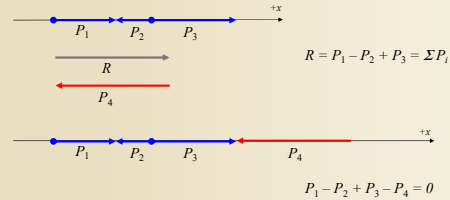
---

## Přímková soustava sil

Úloha 2: Zjištění, zda soustava je či není v rovnováze

**Rovnovážná soustava sil** - výslednice je nulová. Nerovnovážnou soustavu sil lze uvést do rovnováhy silou velikosti  $R$ , ale opačného smyslu.

Například :



Přímková soustav sil

5 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Rovinný svazek sil

Dvě nebo více sil působí v rovině se stejným působištěm v různých směrech.

**Axiom o rovnoběžníku sil:** Výslednice  $R$  dvou sil o společném působišti je jednoznačně určena úhlopříčkou rovnoběžníku sil (a).

**Kosinová věta:** druhá mocnina strany trojúhelníka je rovna součtu druhých mocnin zbyvajících stran zmenšenému o dvojnásobný součin těchto stran a kosinu úhlu jimi sevřeného.

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi)} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \varphi}$$

**Sinová věta:** poměr dvou stran trojúhelníka se rovná poměru sinů protilehlých úhlů.

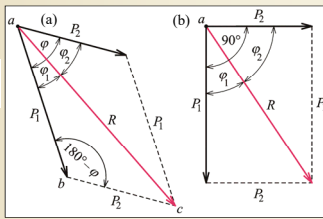
$$\sin \varphi_1 = \frac{P_2}{R} \cdot \sin \varphi \quad \sin \varphi_2 = \frac{P_1}{R} \cdot \sin \varphi$$

Často případ (b):  $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{R} \quad \sin \varphi_1 = \frac{P_2}{R} \quad \cos \varphi_2 = \frac{P_2}{R} \quad \sin \varphi_2 = \frac{P_1}{R} \quad \dots \text{Skládání sil}$$

Rovinný svazek sil

6 / 49



Rovnoběžník sil  
Obr. 2.2. / str. 10

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Rovinný svazek sil

**Síla** u rovinného svazku sil je určena pouze 2 údaji (působíště je dáno):

a) prostřednictvím složek  $P_{ix}$ ,  $P_{iz}$  – velikost, směr i smysly síly z rovnoběžníku sil

$$P_i = \sqrt{P_{ix}^2 + P_{iz}^2}$$

$$\sin \gamma_i = \cos \alpha_i = \frac{P_{iz}}{P_i} \quad \cos \gamma_i = \sin \alpha_i = \frac{P_{ix}}{P_i}$$

$\alpha_i$  a  $\gamma_i$  ... **směrové úhly**

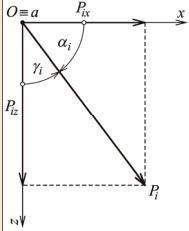
platí:  $\alpha_i + \gamma_i = 90^\circ$      $\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \gamma_i = 1$

Pro výpočet stačí ...  $\gamma_i$

b) kladnou velikostí  $P_i$  a směrovým úhlem  $\gamma_i$

$$P_{ix} = P_i \cdot \sin \gamma_i \quad P_{iz} = P_i \cdot \cos \gamma_i$$

**Rozklad síly na osové složky**



Zadání síly rovinného svazku  
Obr. 2.3. / str. 11

Rovinný svazek sil 7 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Výslednice rovinného svazku sil

**Postup** určení výslednice  $R$  rovinného svazku  $n$  sil:

a) určit složky  $P_{ix}$ ,  $P_{iz}$  každé ze sil  $P_i$

$$P_{ix} = P_i \cdot \sin \gamma_i \quad P_{iz} = P_i \cdot \cos \gamma_i$$

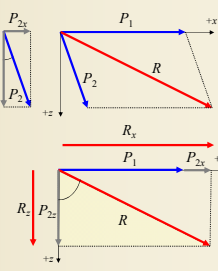
b) vypočítat výslednice obou přímkových soustav sil v souřadnicových osách

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

c) určit velikost a směrový úhel výslednice  $R$  rovinného svazku sil

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} \quad \sin \gamma_R = \frac{R_x}{R} \quad \cos \gamma_R = \frac{R_z}{R}$$

**Například :**



Rovinný svazek sil 8 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

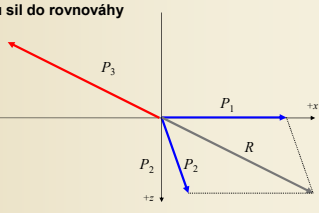
### Rovnováha rovinného svazku sil

**Podmínky rovnováhy rovinného svazku sil**

$$R = 0 \quad \rightarrow \quad R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

**Uvedení rovinného svazku sil do rovnováhy**

**Například :**



Rovinný svazek sil 9 / 49

---

---

---

---

---

---

---


---

---

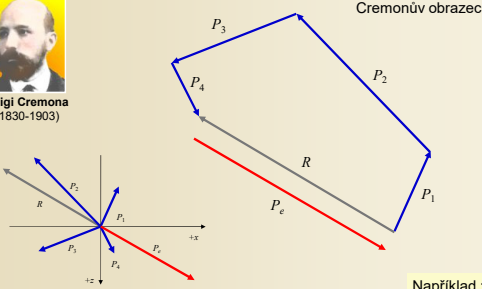
---



### Grafické řešení rovinného svazku



**Luigi Cremona**  
(1830-1903)



Cremonův obrazec

Například :

Rovinný svazek sil 13 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Využití poznatků o rovinném svazku



Příhradová konstrukce, Pavilon V z roku 2000, Brněnské výstaviště

Rovinný svazek sil 14 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Využití poznatků o rovinném svazku



Příhradová konstrukce, Pavilon V z roku 2000, Brněnské výstaviště

Rovinný svazek sil 15 / 49

---

---

---

---

---

---

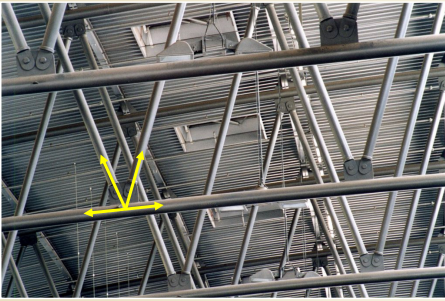
---

---

---

---

## Využití poznatků o rovinném svazku



Přihradová konstrukce, Pavilon V z roku 2000, Brněnské výstaviště

Rovinný svazek sil

16 / 49

---

---

---

---

---

---

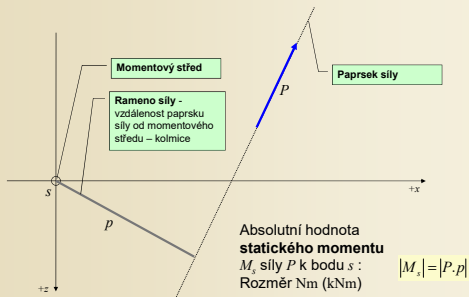
---

---

---

---

## Statický moment síly k bodu



Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině

17 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

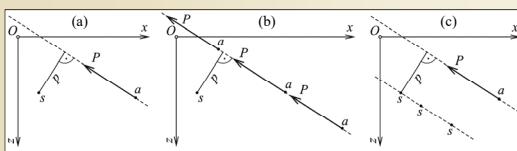
---

---

## Statický moment síly k bodu

**Platí:**

- a) statický moment k  $s$  se nemění, posouvá-li se síla po svém paprsku
- b) posouvá-li se  $s$  po přímce rovnoběžné s paprskem síly, statický moment síly se k němu nemění



Statický moment síly k bodu  
 Obr. 2.6. / str. 13

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině

18 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Dvojice sil

**Dvojice sil** – dvě stejně velké rovnoběžné síly opačných smyslů.  
**Rameno dvojice sil** – vzdálenost  $p$  paprsků obou sil.

**Dvojice sil** vyvoluje na těleso pouze otáčivý účinek ve své rovině, vyjádřený **statickým momentem  $M$  dvojice sil** :  $|M| = |P \cdot p|$

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině 22 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Dvojice sil

Pro statický moment  $M$  dvojice sil platí:

- je stejný ke všem bodům (momentovým středům) tělesa
- nezmění se, posune-li se dvojice sil do jiného místa nebo pootočí-li se oba paprsky (při zachování délky  $p$ )
- nemění se při současném zmenšování  $p$  a zvětšování  $P$ ,  $P \cdot p$  zůstává konstantní
- kladný smysl otáčení stejný jako u statického momentu síly
- více dvojic – lze nahradit jedinou výslednou dvojicí sil, je-li nulová – rovnováha

Dvojice sil  
Obr. 2.10. / str. 15

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině 23 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Dvojice sil

Schéma statického působení celistvé a dělené patky

Patky ocelových sloupů – statické schéma

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině 24 / 49

---

---

---

---

---

---

---

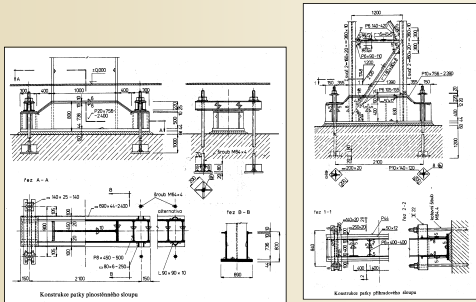
---

---

---



## Dvojice sil



Patky ocelových sloupů – výrobní dokumentace

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině

25 / 49

---

---

---

---

---

---

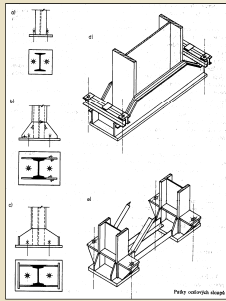
---

---

---

---

## Dvojice sil



Patky ocelových sloupů – schéma

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině

26 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Společný účinek síly a dvojice sil

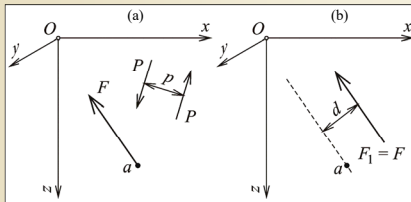
Účinek dvojice sil :  $M = P \cdot p$       Účinek síly  $F$  :  $M_a = F \cdot 0 = 0$

Posune-li se  $F$  rovnoběžně o vzdálenost  $d$  :  $M_a = F \cdot d$

Požadavek : posunout  $F$  o vzdálenost  $d$ , aby  $F \cdot d = P \cdot p$

Výsledek :

$$d = \frac{P \cdot p}{F}$$



Společný účinek síly a dvojice  
Obr. 2.11. / str. 16

Statický moment síly k bodu a dvojice sil v rovině

27 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Příklad 2.4

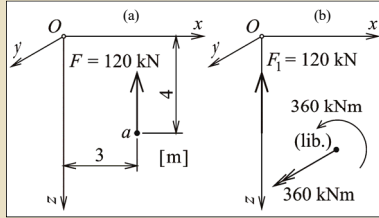
**Zadáno:** působíště  $a$ , síla  $F$

**Předmět výpočtu:** takový statický moment  $M$  dvojice sil při posunutí  $F$ , aby otáčivý účinek zůstal nezměněn

**Řešení:**

$$M_a = -F \cdot x_a$$

Přidaný statický moment  $M$  dvojice sil musí být stejně veliký, ale opačného smyslu, tj. **kladného**



Zadání a výsledek příkladu 2.4  
Obr. 2.12. / str. 16

---

---

---

---

---

---

---

---

---

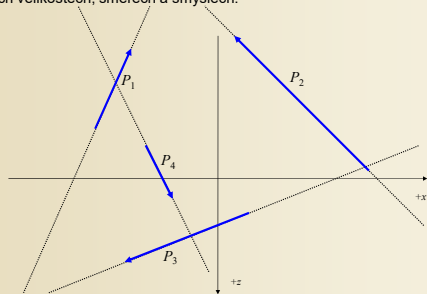
---

---

---

### Obecná rovinná soustava sil

Působí-li v téže rovině dvě nebo více (obecně  $n$ ) sil  $P_i$  o různých působíštích a různých velikostech, směrech a smyslech.




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Obecná rovinná soustava sil

Působíště každé síly  $a$  je zadáno dvojicí souřadnic  $x_a$  a  $z_a$ , velikost, směr a smysl kterékoliv síly  $P_i$  může být zadán 2 způsoby:

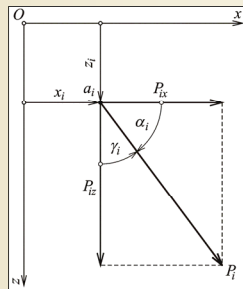
a) prostřednictvím složek  $P_{ix}$ ,  $P_{iz}$ , velikost, směr i smysl síly z rovnoběžníku sil

$$P_i = \sqrt{P_{ix}^2 + P_{iz}^2}$$

$$\sin \gamma_i = \cos \alpha_i = \frac{P_{iz}}{P_i} \quad \cos \gamma_i = \sin \alpha_i = \frac{P_{ix}}{P_i}$$

b) kladnou velikostí  $P_i$  a směrovým úhlem  $\gamma_i$

$$P_{ix} = P_i \cdot \sin \gamma_i \quad P_{iz} = P_i \cdot \cos \gamma_i$$



Zadání síly obecné rovinné soustavy  
Obr. 2.13. / str. 16

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil

**Postup:**

- a) pro každou sílu  $P_i$  určit složky  $P_{ix}, P_{iz}$
- b) každou složku  $P_{ix}$  posunout rovnoběžně do osy  $x$  a do roviny soustavy přidat statický moment  $M_{ix} = P_{ix} \cdot z_i = P_i \cdot z_i \cdot \sin \gamma_i$
- c) každou složku  $P_{iz}$  posunout rovnoběžně do osy  $z$  a do roviny soustavy přidat statický moment  $M_{iz} = -P_{iz} \cdot x_i = -P_i \cdot x_i \cdot \cos \gamma_i$

- d) určit výslednice  $R_x, R_z$  obou přímkových soustav sil

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

- e) vypočítat výslednici  $R$  a její směrový úhel  $\gamma_R$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} \quad \sin \gamma_R = \frac{R_z}{R} \quad \cos \gamma_R = \frac{R_x}{R}$$

- f) získat výsledný statický moment soustavy  $M_R$

$$M_R = \sum_{i=1}^n (M_{ix} + M_{iz}) + \sum_{j=1}^m M_j \quad (M_j \dots \text{případné zadané statické momenty dvojic sil})$$

---

---

---

---

---

---

---

---

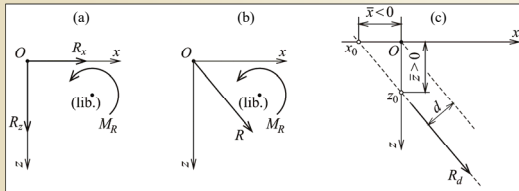
---

---

### Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil

**Lze formulovat trojím způsobem:**

- a) osovými složkami výslednice  $R_x, R_z$  v souřadnicových osách a výsledným statickým momentem  $M_R$
- b) výslednicí  $R$  v počátku a výsledným statickým momentem  $M_R$



Tři způsoby znázornění výsledného účinku obecné rovinné soustavy sil  
Obr. 2.14. / str. 17

---

---

---

---

---

---

---

---

---

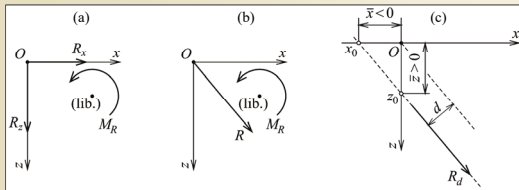
---

### Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil

**Lze formulovat trojím způsobem:**

- c) výslednicí  $R_d$ , posunutí o  $d$  tak, aby účinek  $R \cdot d$  byl stejný jako  $M_R$

$$d = \frac{|M_R|}{R} \quad M_R + R_x \cdot \bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = -\frac{M_R}{R_x} \quad M_R - R_z \cdot \bar{z} = 0 \rightarrow \bar{z} = \frac{M_R}{R_z}$$



Tři způsoby znázornění výsledného účinku obecné rovinné soustavy sil  
Obr. 2.14. / str. 17

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---







## Výsledný účinek rovinné soustavy rovnoběžných sil

a) velikost výslednice  $R$

$$R = \sum_{i=1}^n P_i$$

kladná velikost = smysl výslednice se shoduje s kladným směrem souřadnicové osy  $z$

b) poloha paprsku výslednice  $R$

$$M_R = -Rd = -\sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i$$

z Varignonovy momentové věty k momentovému středu (nejčastěji k počátku),  $d, p_i$  kladné ve směru kladné osy  $x, R$  má povahu volného vektoru ve svém paprsku

$$d = \frac{-M_R}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i$$

Výsledný účinek může být vyjádřen:

a) výslednicí  $R$ , procházející momentovým středem a statickým momentem  $M_R$

b) výslednicí  $R_d = R$ , která je posunuta do paprsku vzdálenosti  $d$  od počátku

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Příklad 2.7

### Zadáno

Působíště, směry a velikosti čtyř svislých sil

### Předmět výpočtu

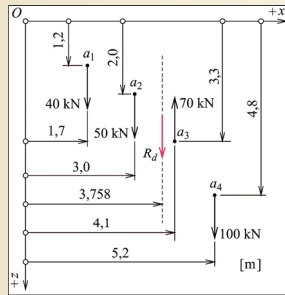
Velikost výslednice  $R$  a poloha jejího paprsku

### Řešení

$$R = \sum_{i=1}^4 P_i = 120 \text{ kN}$$

$$M_R = -Rd = -\sum_{i=1}^4 P_i \cdot p_i = -451 \text{ kNm}$$

$$d = \frac{|M_R|}{R} = 3,758 \text{ m}$$



Zadáni a výsledek příkladu 2.7

Obr. 2.19 / str. 22

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Podmínky rovnováhy rovinné soustavy rovnoběžných sil

V rovnováze tehdy, když je nulová  $R$  a  $M_R$ .

2 podmínky rovnováhy (1 silová, 1 momentová):

$$R = \sum_{i=1}^n P_i = 0 \quad M_R = -M_R = \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_i = 0$$

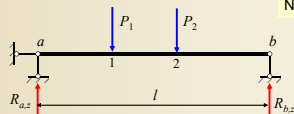
Lze použít rovněž 2 momentové podmínky ke dvěma momentovým středům  $a, b$ , které neleží na přímce rovnoběžné s paprskem sil.

$$M_a = \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_{ai} = 0 \quad M_b = \sum_{i=1}^n P_i \cdot p_{bi} = 0$$

$$M_a = 0 \rightarrow R_{bz}$$

$$M_b = 0 \rightarrow R_{az}$$

$$R_z = 0 \rightarrow \text{kontrola}$$



Například :

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Příklad 2.8

#### Zadáno

Souřadnice  $x_i$ , velikosti sil  $P_2$  a  $P_3$ .

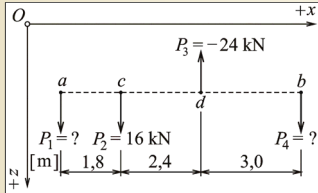
#### Předmět výpočtu a řešení

Velikosti sil  $P_1$  a  $P_4$ , které zajistí soustavě sil rovnováhu s využitím těchto podmínek rovnováhy:

$$M_a = 0 \rightarrow P_4$$

$$M_b = 0 \rightarrow P_1$$

$$R_z = 0 \rightarrow \text{Kontrola}$$



Zadáni příkladu 2.8

Obr. 2.20. / str. 23

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil

#### Předpoklad řešení:

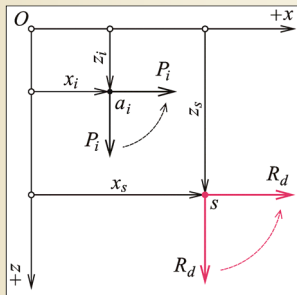
- a)  $R \neq 0$
- b) U působících sil  $P_i$  nutno zadat obě souřadnice  $x_i$  a  $z_i$ .

#### Postup:

- a) Určit polohu vodorovného paprsku výslednice  $R_x$  od svislých sil ( $x_s$ )
- b) Určit polohu vodorovného paprsku výslednice  $R_z$  od sil, které byly otočeny o  $90^\circ$  proti směru hodinových ručiček ( $z_s$ )

$$M_R = R d = \sum_{i=1}^n P_i z_i$$

$$d = z_s = \frac{M_R}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n P_i z_i$$



Statický střed v rovině

Obr. 2.21. / str. 24

---

---

---

---

---

---

---

---

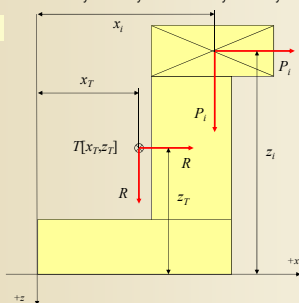
---

---

### Statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil

**Využití:** výpočet těžiště hmotných rovinných čar a hmotných rovinných obrazců - téma č. 8

#### Například :




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



**Okruhy problémů k ústní části zkoušky**

1. Přímková soustava
2. Rovinný svazek sil
3. Statický moment síly k bodu v rovinné úloze
4. Dvojice sil
5. Obecná rovinná soustava sil
6. Varignonova momentová věta
7. Rovinná soustava rovnoběžných sil
8. Statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil

Podklady ke zkoušce 49 / 49

---

---

---

---

---

---

---

---