

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební



Přednáška z předmětu: Speciální numerické metody

Téma č.6: Náhodné proměnné a pravděpodobnostní simulační výpočty

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Obsah

1. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Obsah

1	Náhodné proměnné a pravděpodobnostní simulační výpočty	3
1.1	Náhodná veličina	4
1.1.1	Diskrétní náhodná veličina	4
1.1.2	Spojité náhodná veličina	5
1.1.3	Parametrické rozdělení pravděpodobnosti	6
1.1.4	Neparametrické (empirické) rozdělení pravděpodobnosti	8
1.1.5	Generování náhodných proměnných v Matlabu	10
1.2	Pravděpodobnostní posouzení nosného prvku	30
1.2.1	Účinek zatížení	30
1.2.2	Odolnost konstrukce	30
1.2.3	Funkce spolehlivosti	31
1.2.4	Pravděpodobnost poruchy	32
1.2.5	Pravděpodobnostní posudek v Matlabu	32
	Literatura	41



Obsah

2. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 1

Náhodné proměnné a pravděpodobnostní simulační výpočty

Cíle

Kapitola je zaměřena na:

- způsoby pravděpodobnostního vyjádření náhodných proměnných,
- jednoduché pravděpodobnostní úlohy využívající simulační metody,
- ukázkou využití statistických nástrojů programového systému MATLAB.

Obsah

3. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

1.1. Náhodná veličina

Náhodná veličina (používá se i přívlastek stochastická nebo proměnná) je libovolná veličina, kterou je možné opakovaně měřit v čase, a její hodnoty podrobit zpracování metodami teorie pravděpodobnosti nebo matematické statistiky. Náhodné veličiny jsou proměnné, jejichž hodnoty při konstantních podmínkách závisí na náhodě, přičemž každá z těchto hodnot vystupuje s určitou pravděpodobností. Náhodné veličiny mohou být diskrétní nebo spojité.

Definice 1.1. Náhodným jevem se rozumí opakovatelná činnost prováděná za stejných (nebo přibližně stejných) podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě.

Definice 1.2. Pravděpodobnost náhodného jevu je číslo, které je mírou očekávatelnosti výskytu náhodného jevu (s jakou jistotou lze náhodný jev očekávat). Pravděpodobnost náhodného jevu se obecně označuje reálným číslem od 0 do 1. Náhodný jev, který nemůže nastat, má pravděpodobnost 0. Naopak náhodný jev jistý má pravděpodobnost 1. Pravděpodobnost lze také uvádět v procentech (0 až 100 %).

Definice 1.3. Rozdělení pravděpodobnosti je funkce, která přiřazuje pravděpodobnosti náhodným jevům.

1.1.1. Diskrétní náhodná veličina

Náhodná veličina X je diskrétní, jestliže se prvky výběrového prostoru Ω zobrazí na osu reálných čísel jako izolované body x_1, x_2, \dots, x_k , přičemž každý z těchto bodů má nenulovou pravděpodobnost.



Obsah

4. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pravděpodobnostní funkce (anglicky *probability mass function – PMF*) je funkce v teorii pravděpodobnosti a statistice, která udává pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina se rovná příslušné hodnotě:

$$f_X(x) = P(X = x) . \quad (1.1)$$

Rovněž platí:

$$\sum_{x \in \Omega} f_X(x) = 1 . \quad (1.2)$$

Distribuční funkce F (kumulovaná pravděpodobnost, anglicky *Cumulative Distribution Function – CDF*) je funkce, která udává pravděpodobnost, že hodnota náhodné proměnné X je menší než zadaná hodnota x :

$$F_X(x) = P(X \leq x) . \quad (1.3)$$

1.1.2. Spojitá náhodná veličina

Náhodná veličina X je spojitá, jestliže existuje nezáporná funkce f , pro kterou za předpokladu $a < b$ platí:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx . \quad (1.4)$$

Funkce f se nazývá hustotou rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X (hustota pravděpodobnosti, anglicky *probability density function – PDF*, také se používá označení frekvenční funkce). K jejím vlastnostem patří:



Obsah

5. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$f_X(x) \geq 0 \quad (1.5)$$

a

$$\int_{\Omega} f_X(x) dx = 1, \quad (1.6)$$

kde Ω je definiční obor náhodné proměnné X .

Distribuční funkce $F_X(x)$ spojité náhodné veličiny X je definovaná jako pravděpodobnost, že realizace této náhodné veličiny X nepřekročí hodnotu x :

$$F_X(x) = P(X \leq x). \quad (1.7)$$

Distribuční funkce je neklesající a její hodnota $F(-\infty) = 0$ a $F(\infty) = 1$.

1.1.3. Parametrické rozdělení pravděpodobnosti

Náhodná veličina X je jednoznačně určena rozdělením pravděpodobnosti pomocí *pravděpodobnostní funkce* u diskrétních náhodných veličin, *hustoty pravděpodobnosti* u spojitých náhodných veličin nebo *distribuční funkce*. K jejich určení často slouží číselné charakteristiky, označované jako statistické momenty. Patří k nim střední hodnota μ (anglicky *mean* nebo *expected value*), rozptyl σ^2 (anglicky *variance*; resp. směrodatná odchylka σ , anglicky *standard deviation*), šikmost (koeficient asymetrie, anglicky *skewness*) a špičatost (koeficient excessu, anglicky *kurtosis*).

Tyto charakteristiky jsou často používány jako vstupní parametry tzv. parametrických rozdělení pravděpodobnosti. Mezi nejpoužívanější parametrická rozdělení pravděpodobnosti diskrétních náhodných veličin patří:



Obsah

6. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

- Alternativní rozdělení (náhodná veličina X nabývá pouze hodnot 0 nebo 1, lze použít např. pro simulaci hodu mincí),
- Binomické rozdělení (n náhodných pokusů se stejnou pravděpodobností, lze použít např. pro simulaci hodu hrací kostkou),
- Poissonovo rozdělení,
- Negativně binomické rozdělení,
- Pascalovo rozdělení (speciální případ negativně binomického rozdělení),
- Geometrické rozdělení (speciální případ Pascalova rozdělení),
- Hypergeometrické rozdělení,
- Logaritmické rozdělení.

K často používaným parametrickým rozdělením pravděpodobnosti spojitých náhodných veličin patří:

- Rovnoměrné rozdělení,
- Normální rozdělení (označované také jako Gaussovo rozdělení),
- Logaritmicko-normální rozdělení (také log-normální rozdělení),
- Exponenciální rozdělení,
- Cauchyho rozdělení,
- Gama rozdělení,
- Laplaceovo rozdělení (nebo také dvojité exponenciální rozdělení),
- Logistické rozdělení,
- Maxwelllovo-Boltzmannovo rozdělení,
- Studentovo rozdělení,
- Fischerovo-Snedecorovo rozdělení,
- χ^2 rozdělení (Chí kvadrát).



Obsah

7. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

1.1.4. Neparametrické (empirické) rozdělení pravděpodobnosti

Další z možností jak vyjádřit rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X je použití neparametrického (empirického) rozdělení pravděpodobnosti, které je založeno na výběrovém souboru dat získaných např. měřením nebo monitoringem. Neparametrické (empirické) rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X může být vyjádřeno histogramem o n intervalech (třídách) se stejnou šířkou Δx .

Definice 1.4. Histogram je grafické znázornění distribuce dat pomocí sloupcového grafu se sloupci stejné šířky, vyjadřující šířku intervalů (tříd), přičemž výška sloupců vyjadřuje četnost (nebo pravděpodobnost) sledované veličiny v daném intervalu.

Jedním ze způsobů, jak lze neparametrické (empirické) rozdělení pravděpodobnosti ve formě histogramu uložit do datového souboru s příponou *.dis, je následující zápis textového souboru:

[Description] (1. oddíl datového souboru)

Identification= volitelný popis datového souboru

Type= Pure Discrete | Discrete | Continuous (typ rozdělení)

[Parameters] (2. oddíl datového souboru)

Min= minimální hodnota náhodné proměnné

Max= maximální hodnota náhodné proměnné

Bins= celkový počet intervalů (tříd) daného histogramu

Total= součet četností ve všech intervalech



Obsah

8. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

[Bins] (3. oddíl datového souboru)
... (četnosti v jednotlivých intervalech)

kde položka *Identification* obsahuje popis daného histogramu, např. o jaká data se jedná, příp. jejich původ. V oddíle [Bins] jsou na každém dalším řádku uvedeny četnosti jednotlivých intervalů (tříd). Jejich součet musí odpovídat uvedené hodnotě *Total* v předchozím oddílu datového souboru.



Obsah

9. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

1.1.5. Generování náhodných proměnných v Matlabu

Příklad 1.5. S využitím funkcí programového systému MATLAB vygenerujte $N = 1 \cdot 10^6$ hodnot náhodné proměnné A s normálním rozdělením pravděpodobnosti s následujícími parametry: střední hodnota= 200 a směrodatná odchylka= 15. Určete u ní statistické parametry a zobrazte ve formě histogramu s 64 intervaly.

Řešení. Požadovaný výpočet lze provést s využitím následujícího skriptu vytvořeného v prostředí programového systému MATLAB:

```
clc; clear;
N=1e6;      % Počet simulací
str_hod=200; % Střední hodnota
sm_odch=15; % Směrodatná odchylka
Bins=64;    % Počet intervalů v histogramu
A = random('Normal',str_hod,sm_odch,1,N);
disp(sprintf('\n'))
disp('*****')
disp('*          Generování (pseudo)náhodné veličiny          *')
disp('*          s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti   *')
disp('*          Normalní / Gaussovo                            *')
disp('*****')
disp(' ')
disp('Vstupní údaje:')
disp('-----')
disp(sprintf('Počet simulací N          = %12d',N));
```

[Obsah](#)[10. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
disp(sprintf('Střední hodnota      = %12.3f',str_hod));
disp(sprintf('Směrodatná odchylka = %12.3f',sm_odch));
disp(' ')
disp('Parametry vygenerované náhodné veličiny:')
disp('-----')
disp(sprintf('Minimální hodnota    = %12.3f',min(A)));
disp(sprintf('Maximální hodnota    = %12.3f',max(A)));
disp(sprintf('Rozpětí              = %12.3f',range(A)));
disp(sprintf('Střední hodnota      = %12.3f',mean(A)));
disp(sprintf('Směrodatná odchylka   = %12.3f',std(A)));
disp(sprintf('Rozptyl              = %12.3f',var(A)));
disp(sprintf('Variační koeficient      = %11.2f%%',...
    std(A)/mean(A)*100));
disp(sprintf('Šikmost                = %12.3f',skewness(A)));
disp(sprintf('Špičatost              = %12.3f',kurtosis(A)));
disp(sprintf('Medián                = %12.3f',median(A)));
disp(sprintf('Kvantil 5%              = %12.3f',quantile(A,0.05)));
disp(sprintf('Percentil 5%             = %12.3f',prctile(A,5)));
disp(sprintf('Pravděpodobnost (X<200) = %11.2f%%',sum(A<200)/N*100));
figure(1);
histfit(A,Bins);
% Mění barvu histogramu - červené sloupce s bílým okrajem
set(findobj(gca,'Type','patch'),'FaceColor','r',...
    'EdgeColor','w','FaceColor','b');
title('Normalní parametrické rozdělení pravděpodobnosti');
xlabel('Náhodná proměnná x'); ylabel('Četnost');
```

[Obsah](#)

11. strana ze 42

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Textový výstup úlohy pak může vypadat následovně:

```
*****
*           Generování (pseudo)náhodné veličiny           *
*   s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti         *
*           Normalní / Gaussovo                          *
*****
```

Vstupní údaje:

```
-----
Počet simulací N      =      1000000
Střední hodnota      =      200.000
Směrodatná odchylka =      15.000
```

Parametry vygenerované náhodné veličiny:

```
-----
Minimální hodnota    =      124.205
Maximální hodnota    =      269.629
Rozpětí              =      145.423
Střední hodnota      =      200.014
Směrodatná odchylka =      14.995
Rozptyl              =      224.858
Variační koeficient  =      7.50%
Šikmost              =      0.000
Špičatost            =      3.004
Medián               =      200.015
```



Obsah

12. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Kvantil 5%	=	175.359
Percentil 5%	=	175.359
Pravděpodobnost ($X < 200$)	=	49.96%

Graf normalního parametrického rozdělení pravděpodobnosti z příkladu 1.5 je uvedeno na obrázku 1.1.



Obsah

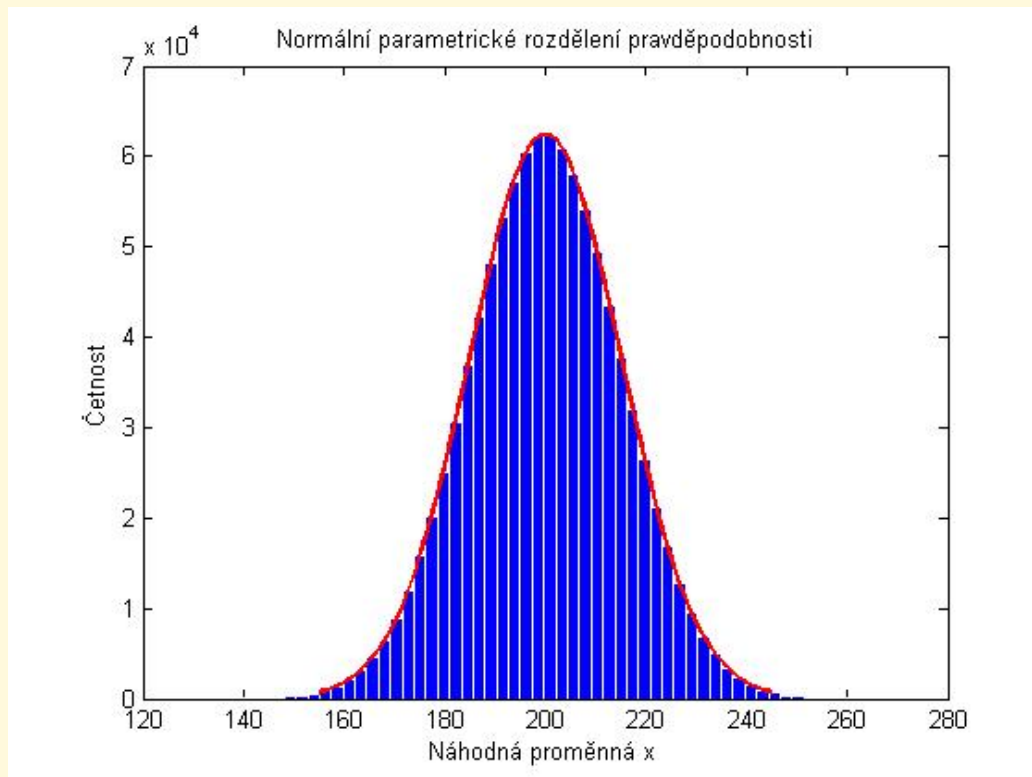
13. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.1 Normální parametrické rozdělení pravděpodobnosti z příkladu 1.5.

Obsah

14. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.6. Podobně jako v příkladu 1.5 vygenerujte $N = 1 \cdot 10^6$ hodnot náhodné proměnné A s log-normálním rozdělením pravděpodobnosti.

Řešení. Požadovaný výpočet lze provést s využitím následujícího skriptu:

```
clc; clear;
N=1e6;      % Počet simulací
str_hod=200; % Střední hodnota
sm_odch=15; % Směrodatná odchylka
Bins=64;    % Počet intervalů v histogramu
A=random('Lognormal',log((str_hod^2)/sqrt(sm_odch^2+str_hod^2)),...
        sqrt(log(((sm_odch^2)/(str_hod^2))+1))),1,N);
disp(sprintf('\n'))
disp('*****')
disp('*          Generování (pseudo)náhodné veličiny          *')
disp('*          s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti   *')
disp('*          Lognormální                                     *')
disp('*****')
disp(' ')
disp('Vstupní údaje:')
disp('-----')
disp(sprintf('Počet simulací N          = %12.1e',N));
disp(sprintf('Střední hodnota          = %12.3f',str_hod));
disp(sprintf('Směrodatná odchylka          = %12.3f',sm_odch));
disp(' ')
```

[Obsah](#)

15. strana ze 42

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```

disp('Parametry vygenerované náhodné veličiny:')
disp('-----')
disp(sprintf('Minimální hodnota      = %12.3f',min(A)));
disp(sprintf('Maximální hodnota      = %12.3f',max(A)));
disp(sprintf('Rozpětí                = %12.3f',range(A)));
disp(sprintf('Střední hodnota         = %12.3f',mean(A)));
disp(sprintf('Směrodatná odchylka     = %12.3f',std(A)));
disp(sprintf('Rozptyl                 = %12.3f',var(A)));
disp(sprintf('Variační koeficient       = %11.2f%%',...
    std(A)/mean(A)*100));
disp(sprintf('Šikmost                 = %12.3f',skewness(A)));
disp(sprintf('Špičatost                 = %12.3f',kurtosis(A)));
disp(sprintf('Medián                  = %12.3f',median(A)));
disp(sprintf('Kvantil 5%%                = %12.3f',quantile(A,0.05)));
disp(sprintf('Percentil 5%%                = %12.3f',prctile(A,5)));
disp(sprintf('Pravděpodobnost (X<200) = %11.2f%%',sum(A<200)/N*100));
figure(1);
histfit(A,Bins,'lognormal');
% Mění barvu histogramu - červené sloupce s bílým okrajem
set(findobj(gca,'Type','patch'),'FaceColor','r',...
    'EdgeColor','w','FaceColor','b');
title('Lognormalní parametrické rozdělení pravděpodobnosti');
xlabel('Náhodná proměnná x');
ylabel('Četnost');

```



Obsah

16. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Textový výstup úlohy pak může vypadat následovně:

```
*****
*           Generování (pseudo)náhodné veličiny           *
*           s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti   *
*           Lognormální                                     *
*****
```

Vstupní údaje:

```
-----
Počet simulací N      =      1.0e+006
Střední hodnota      =      200.000
Směrodatná odchylka  =      15.000
```

Parametry vygenerované náhodné veličiny:

```
-----
Minimální hodnota    =      140.916
Maximální hodnota    =      285.838
Rozpětí              =      144.922
Střední hodnota      =      199.987
Směrodatná odchylka  =      14.993
Rozptyl              =      224.777
Variační koeficient  =      7.50%
Šikmost              =      0.226
Špičatost            =      3.096
```



Obsah

17. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Medián	=	199.432
Kvantil 5%	=	176.323
Percentil 5%	=	176.323
Pravděpodobnost ($X < 200$)	=	51.50%

Grafické zobrazení logaritmicke-normalního parametrického rozdělení pravděpodobnosti z příkladu 1.6 je uvedeno na obrázku 1.2.



Příklad 1.7. Podobně jako v příkladu 1.5 a 1.6 vygenerujte $N = 1 \cdot 10^6$ hodnot náhodné proměnné A s neparametrickým rozdělením pravděpodobnosti, definovaným v souboru T235FY01.DIS z databáze programu ProbCalc [1].

Řešení. Požadovaný výpočet lze provést s využitím následujícího skriptu:

```
clc; clear;
N=1e6;      % Počet simulací
filename='T235FY01.DIS';
[his,prob,d_val,type]=crea_his(filename);
A=crea_sa2(his,rand(1,N),d_val,type);
disp(sprintf('\n'))
disp('*****')
disp('*          Generování (pseudo)náhodné veličiny          *')
disp('*          s neparametrickým rozdělením pravděpodobnosti          *')
disp('*****')
```



Obsah

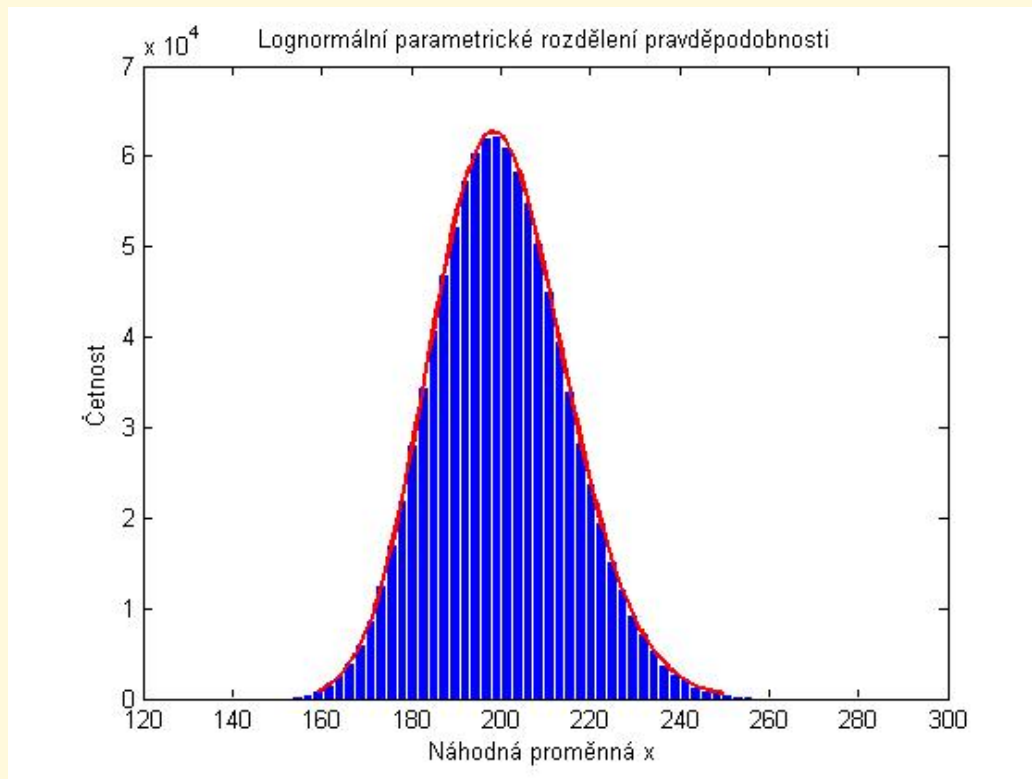
18. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.2 Logaritmicke-normalní parametrické rozdělení pravděpodobnosti z příkladu 1.6.

Obsah

19. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```
disp(' ')
disp('Vstupní údaje:')
disp('-----')
disp(sprintf('Počet simulací N      = %12.1e',N));
disp(sprintf('Název souboru *.dis    = %12s',filename));
disp(' ')
disp('Parametry vygenerované náhodné veličiny:')
disp('-----')
disp(sprintf('Minimální hodnota      = %12.3f',min(A)));
disp(sprintf('Maximální hodnota      = %12.3f',max(A)));
disp(sprintf('Rozpětí                    = %12.3f',range(A)));
disp(sprintf('Střední hodnota          = %12.3f',mean(A)));
disp(sprintf('Směrodatná odchylka       = %12.3f',std(A)));
disp(sprintf('Rozptyl                    = %12.3f',var(A)));
disp(sprintf('Variační koeficient        = %11.2f%%',...
    std(A)/mean(A)*100));
disp(sprintf('Šikmost                    = %12.3f',skewness(A)));
disp(sprintf('Špičatost                  = %12.3f',kurtosis(A)));
disp(sprintf('Medián                      = %12.3f',median(A)));
disp(sprintf('Kvantil 5%%                  = %12.3f',quantile(A,0.05)));
disp(sprintf('Percentil 5%%                  = %12.3f',prctile(A,5)));
disp(sprintf('Pravděpodobnost (X<235) = %11.2f%%',sum(A<235)/N*100));
Bins=length(d_val);
figure(1);
hist(A,Bins);
% Mění barvu histogramu - červené sloupce s bílým okrajem
```

[Obsah](#)

20. strana ze 42

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
set(findobj(gca,'Type','patch'),'FaceColor','r',...
    'EdgeColor','w','FaceColor','b')
title('Neparametrické rozdělení pravděpodobnosti');
xlabel('Náhodná proměnná x');
ylabel('Četnost');
clear i;
```

Ve skriptu je obsažena funkce pro načtení parametrů histogramu `crea_his`, která je naprogramována v souboru `crea_his.m` s následujícím obsahem:

```
function [D_DISTR, PROB_F, D_VALUE, TYPE] =crea_his(FILENAME)
% [D_DISTR, PROB_F, D_VALUE, TYPE] =crea_his(FILENAME)
%
% Create the discrete or continuous histogram and prob.function,
% i.e. the pairs  $\pi(x), x_i, i=1:\text{Bins}$ 
% length(D_VALUE) ...
% ... the number of discrete values of the random variable FILENAME
% sum(PROB_F)==1
%
% INPUT
%=====
% FILENAME - Histogram name
%
% OUTPUT
%=====
```



Obsah

21. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```
% D_DISTR - Distribution Function
% PROB_F - Probability Density of Histogram
% D_VALUE - Value of Particular Histogram Bin
% TYPE - Histogram TYPE: 0 - Discrete, 1 - Piece-wise uniform

% Author: Pavel PRAKS, pavel.praks@vsb.cz
% Edited by: Petr KONECNY, petr.konecny@vsb.cz
% VSB - Technical University Ostrava, www.vsb.cz, Czech Republic
% 04-11-2011

[Min, Max, Bins, Total, freq, TYPE]=read_his(FILENAME);

%CLEARING VARIABLES
PROB_F=[];
D_DISTR=[];
D_VALUE=[];

if TYPE == 1
    %CONTINUOUS HISTOGRAM
    d_step = (Max-Min)/(Bins);
    for i=1:Bins
        D_VALUE(i)= Min + (i-0.5)*d_step;
    end;
else
    %DISCRETE HISTOGRAM
    TYPE = 0; % if ther is no result from read_his
```

[Obsah](#)[22. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
d_step = (Max-Min)/(Bins-1);
for i=1:Bins
    D_VALUE(i)= Min + (i-1)*d_step;
end;
end; % if TYPE
%D_VALUE involves discrete values between Min and Max
%for each freq create the histogram
for i = 1:length(freq)
    HOW_MANY_TIMES=freq(i);
    D_DISTR=[D_DISTR, D_VALUE(i) * ones(1, HOW_MANY_TIMES)];
end;
PROB_F=freq/Total;
```

Ve skriptu `crea_his.m` je obsažen příkaz `read_his` naprogramovaný ve skriptu souboru `read_his.m` s následujícím obsahem:

```
function [Min, Max, Bins, Total, freq, Type]=read_his(FILENAME)
% Read a histogram from file
% function [Min, Max, Bins, Total, freq, Type]=read_his(FILENAME)
%
% INPUT
%=====
% FILENAME - Histogram name
%
% OUTPUT
```

[Obsah](#)[23. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
%=====
% Min - Histogram minimal value
% Max - Histogram maximal value
% Bins - Number of histogram bins
% Total - Total number of samples
% freq - Frequencies of particular bin
% Type - Histogram type: 0 - Discrete, 1 - Piece-wise uniform

% Author: Pavel PRAKS, pavel.praks@vsb.cz
% Edited by: Petr KONECNY, petr.konecny@vsb.cz
% VSB - Technical University Ostrava, www.vsb.cz, Czech Republic
% 04-11-2011

PERMISSION='r';
fid = fopen(FILENAME,PERMISSION);

Type = 0; %

while 1
    line = fgets(fid);
    co=findstr('Type=Continuous',line);
    if length(co)~0;
        Type=1;
    else
        co=findstr('ontinuous',line);
        if length(co)~0;
```

[Obsah](#)[24. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)


```
Type=1;
end,
end;
co=findstr('Min',line);
if length(co)~0; eval(strcat(line,';')); end;
co=findstr('Max',line);
if length(co)~0; eval(strcat(line,';')); end;
co=findstr('Bins',line);
if length(co)~0; eval(strcat(line,';')); end;
co=findstr('Total',line);
if length(co)~0; eval(strcat(line,';')); end;
if findstr('[Bins]',line); break; end;
end;
freq=[];
while ~feof(fid)
    line = setstr(fgets(fid));
    freq=[freq, sscanf(line,'%d')];
end;
for i = 2 : Bins
    freq(i);
end
fclose(fid);
```

Skript řešené úlohy obsahuje rovněž příkaz `crea_sa2`, který je naprogramován v následujícím souboru `crea_sa2.m`:

[Obsah](#)[25. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
function D_RAND=crea_sa2(D_DISTR,RND,D_VALUE,TYPE)
% Create random realization of D_DISTR
%
% INPUT
%=====
% D_DISTR - Distribution Function
% RND - input random number in interval <0;1>
% TYPE - Histogram TYPE: 0 - Discrete, 1 - Piece-wise uniform

% OUTPUT
%=====
% D_RAND - random realisation from D_DISTR using RND

% Author: Pavel PRAKS, pavel.praks@vsb.cz
% Edited by: Petr KONECNY, petr.konecny@vsb.cz
% VSB - Technical University Ostrava, www.vsb.cz, Czech Republic
% 04-11-2005

D_RAND=[];
LEN_DISTR=length(D_DISTR);
D_STEP = D_VALUE(2) - D_VALUE(1);

%CONTINUOUS HISTOGRAM
%-----
if TYPE == 1
```

[Obsah](#)[26. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```

ORDER = 1+ RND *LEN_DISTR; % Order in Distribution Function
ORDER_F = fix(ORDER); % Rounded order
% Reminder after rounding utilised
% in generation of Piece-Wise histogram (PSEUDOGENERTOR);
ORDER_R = ORDER - ORDER_F;
D_RAND = D_DISTR(ORDER_F) +(ORDER_R - 0.5) * D_STEP;

```

```
%DISCRETE HISTOGRAM
```

```
%-----
```

```
else
```

```
  D_RAND=D_DISTR(fix( 1+ RND *LEN_DISTR ) );
```

```
end % if TYPE
```

Textový výstup řešené úlohy pak může nabývat následující podobu:

```

*****
*          Generování (pseudo)náhodné veličiny          *
*      s neparametrickým rozdělením pravděpodobnosti      *
*****

```

Vstupní údaje:

```

-----
Počet simulací N          =      1.0e+006
Název souboru *.dis       = T235FY01.DIS

```



Obsah

27. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Parametry vygenerované náhodné veličiny:

Minimální hodnota	=	205.000
Maximální hodnota	=	421.000
Rozpětí	=	216.000
Střední hodnota	=	285.883
Směrodatná odchylka	=	23.540
Rozptyl	=	554.147
Variační koeficient	=	8.23%
Šikmost	=	0.577
Špičatost	=	4.685
Medián	=	284.000
Kvantil 5%	=	249.000
Percentil 5%	=	249.000
Pravděpodobnost ($X < 235$)	=	0.90%

Grafické zobrazení neparametrického rozdělení pravděpodobnosti z příkladu 1.7 je uvedeno na obrázku 1.3.



Obsah

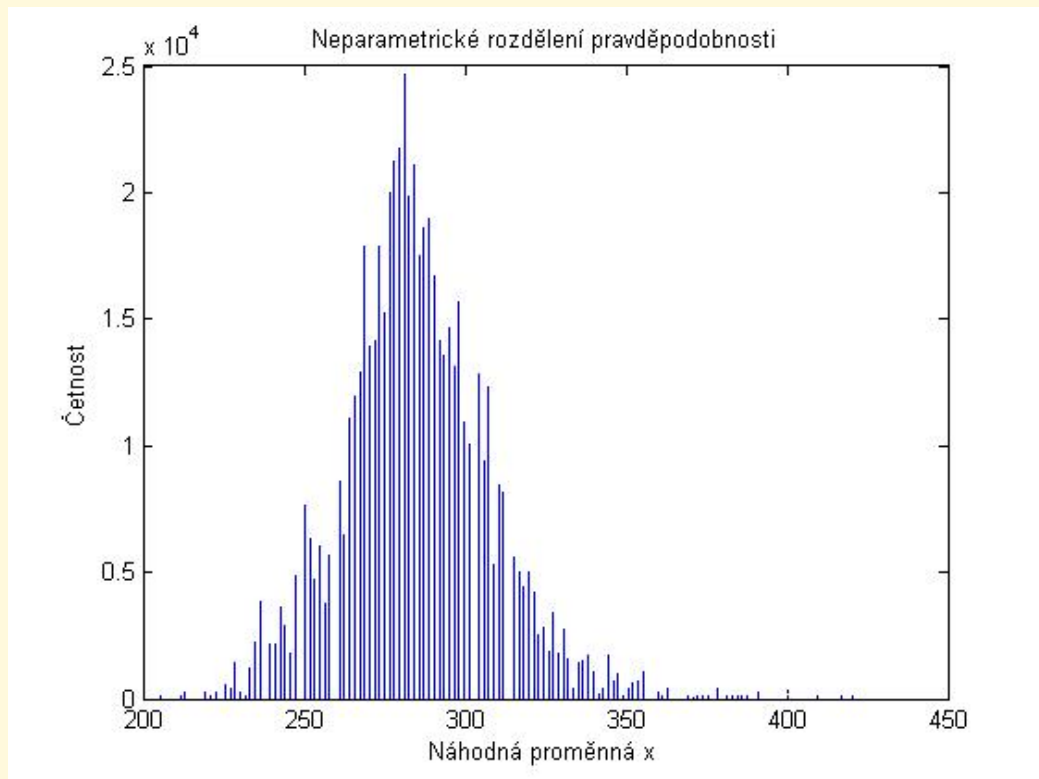
28. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.3 Neparametrické rozdělení pravděpodobnosti z příkladu 1.7.

Obsah

29. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

1.2. Praviděpodobnostní posouzení nosného prvku

V procesu návrhu konstrukce se provádí řada výpočetních operací, souvisejících s posudkem spolehlivosti jednotlivých konstrukčních částí nebo konstrukce jako celku. Musí být splněna různá kritéria spolehlivosti, definovaná příslušnými normovými předpisy.

1.2.1. Účinek zatížení

Zatížení je jednou z nejvýznamnějších veličin, která vstupuje do procesu posudku spolehlivosti konstrukcí. Při stanovení účinků zatížení v pravděpodobnostních výpočtech je nutno brát v úvahu zdroj zatížení, způsob působení na konstrukci, intenzitu, směr, dobu trvání, ale i vliv prostředí - např. změnu teploty či vlhkosti.

Účinek zatížení E je nutno považovat za náhodnou veličinu zejména vzhledem k náhodné proměnlivosti zatížení v čase a prostoru. Veličina, vyjadřující účinek zatížení, se váže na mezní stav, podle něhož se daný pravděpodobnostní posudek provádí. V případě mezního stavu únosnosti tak může účinek zatížení představovat skutečnou velikost dané vnitřní síly, příp. napětí. U mezního stavu použitelnosti je účinek zatížení zpravidla dán skutečným přetvořením konstrukce.

1.2.2. Odolnost konstrukce

Odolnost konstrukce R je schopnost konstrukce odolávat v daných podmínkách účinkům zatížení. Je závislá zejména na výpočetním modelu, materiálových vlastnostech konstrukce (pevnostní a tuhostní charakteristiky použitých materiálů) a jejích geometrických charakteristikách (tvar, rozměr nosných prvků, průřezové charakteristiky, výrobní a montážní nepřesnosti).

[Obsah](#)

30. strana ze 42

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Veličina, vyjadřující odolnost konstrukce, se váže na mezní stav, podle něhož se daný pravděpodobnostní posudek spolehlivosti provádí. V případě mezního stavu únosnosti tak může odolnost konstrukce představovat únosnost v daném namáhání, kterou lze určit na úrovni vnitřní síly nebo daného napětí. U mezního stavu použitelnosti je odolnost konstrukce dána mezním přetvořením konstrukce, příp. přípustnou frekvencí kmitání.

S mezním stavem, v rámci něhož se pravděpodobnostní výpočet provádí, souvisí i samotná tvorba výpočetního modelu. Svou roli přitom hraje použitá metodika výpočtu (teorie 1. či 2. řádu) nebo matematický popis chování materiálu konstrukce (pružné chování materiálu, kdy je limitním stavem dosažení napětí na mezi kluzu, nebo využití plastických vlastností, kdy je limitní plastická únosnost, přípustná velikost trvalé deformace, případně tažnost materiálu).

Na výpočetní model může mít rozhodující vliv i skutečnost, zda je předmětem pravděpodobnostního výpočtu posudek spolehlivosti pouze části nosné konstrukce (prvek, průřez) nebo celý nosný systém.

1.2.3. Funkce spolehlivosti

Konstrukce musí být navržena tak, aby odolnost konstrukce R byla větší než je účinek zatížení E . S přihlédnutím ke všem nahodilostem v zatížení, výrobním a montážním nepřesnostem a prostředí, v němž konstrukce plní svou funkci, odolnost konstrukce R i účinek zatížení E je nutno považovat za veličiny náhodné. Je nezbytné, aby obě veličiny vykazovaly stejný fyzikální rozměr.

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti je založen na podmínce spolehlivosti, kterou lze vyjádřit ve tvaru:

$$R - S > 0, \quad (1.8)$$



Obsah

31. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

kde R je odolnost konstrukce a E účinek zatížení. Levá strana nerovnice (1.8) se nazývá funkce spolehlivosti RF (*reliability function*), ale bývá také označována jako funkce poruchy G či rezerva spolehlivosti Z .

Podmínku spolehlivosti (1.8) lze rovněž vyjádřit vztahy:

$$\frac{R}{S} > 1, \quad (1.9)$$

nebo

$$\frac{R}{S} - 1 > 0. \quad (1.10)$$

Nesplnění kterékoliv podmínky spolehlivosti (1.8), (1.9) nebo (1.10) představuje z hlediska spolehlivosti nepříznivý, tzn. poruchový stav, kdy účinek zatížení E převyšuje velikost odolnosti konstrukce R .

1.2.4. Pravděpodobnost poruchy

Pravděpodobnost poruchy p_f je možno určit ze vztahu:

$$p_f = P(Z \leq 0) = P(R - S \leq 0). \quad (1.11)$$

Její velikost je ovlivněna částí histogramu rezervy spolehlivosti Z , pro kterou platí $Z \leq 0$. Pravděpodobnost bezporuchového stavu p_s je pak rovna $1 - p_f$.

1.2.5. Pravděpodobnostní posudek v Matlabu

Příklad 1.8. S využitím funkcí programového systému MATLAB proveďte posudek spolehlivosti ohýbaného nosníku z ocelového profilu IPE120, který je zatížen po celé své délce



Obsah

32. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

spojitým zatížením stálým s extrémní hodnotou 1,6 kN/m a dlouhodobým proměnným s extrémní hodnotou 1,2 kN/m. Vygenerujte $N = 1 \cdot 10^6$ hodnot funkce spolehlivosti $RF = R - E$, kde R je odolnost konstrukce (únosnost za ohybu) a E je účinek zatížení (největší ohybový moment). Sestrojte histogram funkce spolehlivosti RF a určete pravděpodobnost poruchy p_f .

Řešení. Požadovaný výpočet lze provést s využitím následujícího skriptu vytvořeného v prostředí programového systému MATLAB:

```
% Posudek spolehlivosti prostého nosníku zatíženého spojitě
clc; clear;
% Zadání vstupních údajů
N=1e6;           % Počet simulací
L=6;             % Délka nosníku
Wy=0.5296e-4;   % Průřezový modul IPE120
filename_fy='T235FY01.DIS';
filename_DL='DEAD1.DIS';
filename_LL='LONG2.DIS';
% Načtení histogramů
[his_fy,prob_fy,d_val_fy,type_fy]=crea_his(filename_fy);
[his_DL,prob_DL,d_val_DL,type_DL]=crea_his(filename_DL);
[his_LL,prob_LL,d_val_LL,type_LL]=crea_his(filename_LL);
% Generování (pseudo)náhodných veličin
Fy=crea_sa2(his_fy,rand(1,N),d_val_fy,type_fy);
DL=crea_sa2(his_DL,rand(1,N),d_val_DL,type_DL);
```

[Obsah](#)

33. strana ze 42

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
LL=crea_sa2(his_LL,rand(1,N),d_val_LL,type_LL);
% Výpočet účinku zatížení - Mmax
E=1/8*(1.6*DL+1.2*LL)*L^2;
% Výpočet odolnosti konstrukce - únosnosti za ohybu
R=Fy*Wy*1000;
% Výpočet funkce spolehlivosti
RF=R-E;
% Vykreslení výsledků
[n1,ctr1]=hist(E,100);
[n2,ctr2]=hist(R,100);
[n3,ctr3]=hist(RF,100);
figure(1);
hold on;
subplot(2,2,2);
plot(E,R,'.', 'MarkerSize',1);
hold on;
plot([min(min(E),min(R)) max(max(E),max(R))],...
      [min(min(E),min(R)) max(max(E),max(R))], 'r-');
axis([min(E)*0.9 max(E)*1.1 min(R)*0.9 max(R)*1.1]);
title('Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti nosníku');
xlabel('Účinek zatížení E');
ylabel('Odolnost konstrukce R');
subplot(2,2,4);
bar(ctr1,-n1,1);
axis([0.9*min(ctr1) 1.1*max(ctr1) -max(n1)*1.1 0]);
axis('off');
```

[Obsah](#)[34. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```

subplot(2,2,1);
barh(ctr2,-n2,1);
axis([-max(n2)*1.1 0 0.9*min(ctr2) 1.1*max(ctr2)]);
axis('off');
subplot(2,2,3);
bar(ctr3,n3,1);
axis([min(ctr3) max(ctr3) min(n3) max(n3)]);
title('Histogram funkce spolehlivosti')
xlabel('RF=R-E')
ylabel('Četnost')
colormap([.8 .8 1]);
hold off;
% Vypis výsledků
disp(sprintf('\n'))
disp('*****')
disp('*          Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti          *')
disp('*****')
disp(' ')
disp('Vstupní údaje:')
disp('-----')
disp(sprintf('Počet simulací N          = %12.1e',N));
disp(' ')
disp('Parametry funkce spolehlivosti RF:')
disp('-----')
disp(sprintf('Minimální hodnota          = %12.3f',min(RF)));

```



Obsah

35. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```

disp(sprintf('Maximální hodnota          = %12.3f',max(RF)));
disp(sprintf('Rozpětí                    = %12.3f',range(RF)));
disp(sprintf('Střední hodnota            = %12.3f',mean(RF)));
disp(sprintf('Směrodatná odchylka       = %12.3f',std(RF)));
disp(sprintf('Rozptyl                    = %12.3f',var(RF)));
disp(sprintf('Variační koeficient        = %11.2f%%',...
    std(RF)/mean(RF)*100));
disp(sprintf('Šikmost                    = %12.3f',skewness(RF)));
disp(sprintf('Špičatost                  = %12.3f',kurtosis(RF)));
disp(sprintf('Medián                     = %12.3f',median(RF)));
disp(sprintf('Kvantil 5%                 = %12.3f',...
    quantile(RF,0.05)));
disp(sprintf('Percentil 5%               = %12.3f',prctile(RF,5)));
Pf=sum(RF<0)/N;          % Pravděpodobnost poruchy
disp(sprintf('Pravděpodobnost poruchy = %12.4e',Pf));
Beta=mean(RF)/std(RF); % Index spolehlivosti
disp(sprintf('Index spolehlivosti Beta = %12.4f',Beta));
disp(' ')
disp('*****')
if Pf<=8.4e-6
    disp(sprintf('*          Pf    = %12.4e <= Pd    = %12.4e          *',...
        Pf,8.4e-6));
    disp(sprintf('*          Beta = %12.4f >= Betad = %12.4f          *',...
        Beta,4.3));
    disp('*          Konstrukce vyhoví podle ČSN EN 1990          *');

```



Obsah

36. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```
disp('* pro třídu spolehlivosti RC3/CC3 s velkými následky *');
elseif Pf<=7.2e-5
disp(sprintf('* Pf = %12.4e <= Pd = %12.4e *',...
Pf,7.2e-5));
disp(sprintf('* Beta = %12.4f >= Betad = %12.4f *',...
Beta,3.8));
disp('* Konstrukce vyhoví podle ČSN EN 1990 *');
disp('* pro třídu spolehlivosti RC2/CC2 se středními následky *');
elseif Pf<=4.8e-4
disp(sprintf('* Pf = %12.4e <= Pd = %12.4e *',...
Pf,4.8e-4));
disp(sprintf('* Beta = %12.4f >= Betad = %12.4f *',...
Beta,3.3));
disp('* Konstrukce vyhoví podle ČSN EN 1990 *');
disp('* pro třídu spolehlivosti RC1/CC1 s malými následky *');
else
disp(sprintf('* Pf = %12.4e > Pd = %12.4e *',...
Pf,4.8e-4));
disp(sprintf('* Beta = %12.4f < Betad = %12.4f *',...
Beta,3.3));
disp('* Konstrukce nevyhoví podle ČSN EN 1990 *');
end
disp('*****')
```

[Obsah](#)[37. strana ze 42](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Textový výstup úlohy pak může vypadat následovně:

```
*****
*           Praviděpodobnostní posudek spolehlivosti           *
*****
```

Vstupní údaje:

Počet simulací N = 1.0e+006

Parametry funkce spolehlivosti RF:

Minimální hodnota	=	-0.983
Maximální hodnota	=	16.118
Rozpětí	=	17.100
Střední hodnota	=	6.180
Směrodatná odchylka	=	1.820
Rozptyl	=	3.313
Variační koeficient	=	29.45%
Šikmost	=	0.305
Špičatost	=	3.149
Medián	=	6.065
Kvantil 5%	=	3.384
Percentil 5%	=	3.384
Praviděpodobnost poruchy	=	5.3000e-005



Obsah

38. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Index spolehlivosti Beta = 3.3950

```
*****
*      Pf   = 5.3000e-005 <= Pd   = 7.2000e-005      *
*      Beta =      3.3950 >= Betad =      3.8000      *
*      Konstrukce vyhoví podle ČSN EN 1990            *
*      pro třídu spolehlivosti RC2/CC2 se středními následky *
*****
```

Grafické zobrazení pravděpodobnostního posouzení nosníku z příkladu 1.8 je uvedeno na obrázku 1.4, který obsahuje histogramy odolnosti konstrukce R , účinku zatížení E a funkce spolehlivosti SF včetně prostorové interpretace s hranicí poruchy.



Obsah

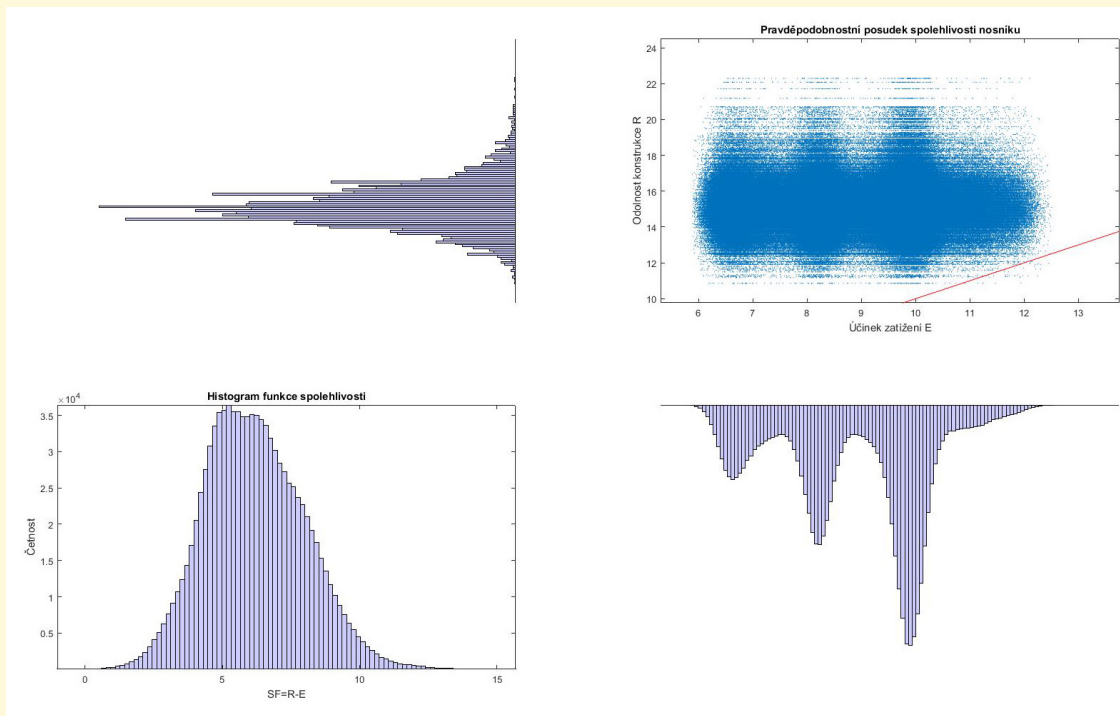
39. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.4 Grafické zobrazení pravděpodobnostního posouzení nosníku z příkladu 1.8.

Obsah

40. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Literatura

- [1] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet*. [on-line]. <<https://dspace.vsb.cz/bitstream/handle/10084/110988/monografie.pdf>>. Monografie, 1. vydání. VŠB-TU Ostrava, 2015. (191 s). ISBN 978-80-248-3798-7.
- [2] Krejsa, M. – Konečný, P. *Spolehlivost a bezpečnost staveb*. [on-line]. <<http://mi21.vsb.cz/modul/spolehlivost-bezpecnost-staveb>>. Učební texty a interaktivní materiály. VŠB-TU Ostrava, 2012.
- [3] MATLAB. Programový systém pro provádění matematických výpočtů. Komerční software, verze R2014b. [on-line]. <<http://www.mathworks.com>>. The MathWorks, únor 2015.
- [4] Sauer T. *Numerical Analysis*. George Mason University. Pearson Education, Inc., 2006. (669 s). ISBN 0-321-26898-9.
- [5] Sigmon K. *MATLAB Primer CZ*. Elektronický manuál programového systému MATLAB. Druhé vydání. [on-line].

Obsah

41. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

<<https://artax.karlin.mff.cuni.cz/~beda/cz/matlab/primercz/matlab-primer.html>>.
Department of Mathematics, University of Florida, 1989, 1992. Z anglického originálu přeložil Petr Klášterecký.



Obsah

42. strana ze 42



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno