

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební



Přednáška z předmětu: Speciální numerické metody

Téma č.5: Vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Obsah

1. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Obsah

1 Vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání	3
1.1 Úvod do problematiky	4
1.1.1 Řešení soustavy pohybových rovnic	4
1.1.2 Ortogonalita vlastních tvarů kmitání	8
1.1.3 Normované vlastní tvary kmitání	8
1.2 Určení vlastních frekvencí a tvarů vlastního kmitání jednoduchých konstrukcí	9
Literatura	25



Obsah

2. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 1

Vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání

Cíle

Kapitola je zaměřena na:

- seznámení s jednoduchými úlohami dynamiky stavebních konstrukcí,
- teoretické pozadí výpočtu vlastních frekvencí a tvarů vlastního kmitání jednoduchých prutových konstrukcí,
- ukázkou využití vlastních čísel a vektorů v úlohách stavební dynamiky.

Obsah

3. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

1.1. Úvod do problematiky

Při řešení úloh stavební dynamiky zaměřených na dynamické systémy s n stupni volnosti lze využít metodu konstant tuhosti, která vychází z podmínek dynamické rovnováhy sil působících na hmotné body vyjádřených pomocí konstant tuhosti.

1.1.1. Řešení soustavy pohybových rovnic

Pro určení vlastního kmitání při zanedbání útlumu se musí sestavit soustava n pohybových rovnic, kterou lze vyjádřit maticově:

$$[m]_D \cdot \{\ddot{v}(t)\} + [k] \cdot \{v(t)\} = 0, \quad (1.1)$$

kde $[m]_D$ je diagonální matice hmotnosti, $[k]$ matice tuhosti, $\{\ddot{v}(t)\}$ vektor zrychlení a $\{v(t)\}$ vektor přemístění v čase t .

Partikulární řešení homogenní diferenciální rovnice 2. řádu (1.1) nabývá tvar:

$$\{v(t)\} = \{v_{(j)}^0\} \cdot \sin(\omega_{(j)} \cdot t) \quad (1.2)$$

a

$$\{v(t)\} = \{v_{(j)}^0\} \cdot \cos(\omega_{(j)} \cdot t), \quad (1.3)$$

kde $\omega_{(j)}$ je j -tá vlastní kruhová frekvence systému.



Obsah

4. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Dosazením rovnic (1.2) a (1.3) do pohybových rovnic (1.1) lze získat systém lineárních rovnic, tzv. frekvenční rovnice:

$$\left([k] - \omega_{(j)}^2 \cdot [m]_D \right) \cdot \{v_{(j)}^0\} = 0 \quad (1.4)$$

nebo

$$[A(\omega_{(j)})] \cdot \{v_{(j)}^0\} = 0, \quad (1.5)$$

kde $[A(\omega_{(j)})] = \left([k] - \omega_{(j)}^2 \cdot [m]_D \right)$ je tzv. matice dynamické tuhosti.

Netriviální řešení rovnic (1.4) nebo (1.5) je dáno charakteristickou rovnicí stupně n :

$$\det \left([k] - \omega_{(j)}^2 \cdot [m]_D \right) = \det [A(\omega_{(j)})] = 0. \quad (1.6)$$

Pokud jsou matice $[m]_D$ a $[k]$ pozitivně definitní, řešením charakteristické rovnice (1.6) je n reálných a pozitivních kořenů $\lambda_{(j)} = \omega_{(j)}^2$.

Ke každému vlastnímu číslu $\lambda_{(j)}$ je také přiřazen příslušný vlastní vektor $\{v_{(j)}^0\}$, jenž odpovídá nenulovému řešení rovnic (1.4) nebo (1.5). Soustava těchto vlastních vektorů popisuje tvary vlastního kmitání konstrukce.

Pro každý kořen $\lambda_{(j)} = \omega_{(j)}^2$ je splněna charakteristická rovnice (1.6) a rovnice (1.4) a (1.5) mají řešení:

$$\{v_{(j)}^0\} = \{v_{1(j)}^0, v_{2(j)}^0, \dots, v_{n(j)}^0\}^T = \{v_{i(j)}^0\}^T, \quad (1.7)$$

pro $i, j = 1, \dots, n$, které splňují rovnici (1.3).



Obsah

5. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Rovnici (1.4) lze upravit násobením maticí $[m]_D^{-1}$ zleva:

$$\left([m]_D^{-1} \cdot [k] - \omega_{(j)}^2 \cdot [m]_D^{-1} \cdot [m]_D \right) \cdot \{v_{(j)}^0\} = [m]_D^{-1} \cdot 0, \quad (1.8)$$

čímž lze získat:

$$\left([D]^{-1} - \omega_{(j)}^2 \cdot [E]_D \right) \cdot \{v_{(j)}^0\} = 0, \quad (1.9)$$

kde

$$[D]^{-1} = [m]_D^{-1} \cdot [k] = [k_r]. \quad (1.10)$$

Matice $[k_r]$ se nazývá inverzní dynamická matice nebo redukovaná matice tuhosti, ze které lze také určit vlastní čísla $\lambda_{(j)}$ a příslušné vlastní vektory $\{v_{(j)}^0\}$ (např. pomocí funkce `eig` v programovém systému MATLAB). Výsledné vlastní kruhové frekvence kmitání $\omega_{(j)}$ se řadí do vektoru vlastních kruhových frekvencí kmitání podle velikosti:

$$\{\omega_{(j)}\} = \{\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \dots, \omega_{(n)}\}^T, \quad (1.11)$$

přičemž platí $0 < \omega_{(1)} < \omega_{(2)} < \dots < \omega_{(n)}$.

Při řešení homogenní soustavy rovnic (1.4) nebo (1.5) nelze pro každé $\omega_{(j)}$ stanovit veškeré výchylky $v_{i(j)}^0$, ale pouze jejich vzájemný poměr:

$$\begin{aligned} v_{1(j)}^0 \div v_{2(j)}^0 \div \dots \div v_{n(j)}^0 &= A_{i1(j)} \div A_{i2(j)} \div \dots \div A_{in(j)} = \dots = \\ &= A_{1k(j)} \div A_{2k(j)} \div \dots \div A_{nk(j)}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde poměr výchylek jednotlivých hmotných bodů pro každý tvar kmitání se rovná vzájemnému poměru algebraických doplňků subdeterminantů matice $[A(\omega_{(j)})]$ určených vzhledem



Obsah

6. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

k prvkům libovolného řádku (index i) nebo sloupce (index k) matice $[A(\omega_{(j)})]$. Znamená to také, že soustava může kmitat v každém vlastním tvaru s výchylkami $\{v_{(j)}^0\}$, ale také s libovolným výkmitem s výchylkami $q_{(j)}^0 \cdot \{v_{(j)}^0\}$, kde $q_{(j)}^0$ představuje libovolnou konstantu.

Pro n vlastních kruhových frekvencí lze určit také tzv. tvarové součinitele, které charakterizují vlastní tvary kmitání:

$$a_{2(j)} = \frac{v_{2(j)}^0}{v_{1(j)}^0}, \quad a_{3(j)} = \frac{v_{3(j)}^0}{v_{1(j)}^0}, \quad \dots \quad a_{n(j)} = \frac{v_{n(j)}^0}{v_{1(j)}^0}. \quad (1.13)$$

Všechny tvary vlastního kmitání obsažené ve vektorech (1.7) lze rovněž seřadit do tzv. modální matice, ve které prvky každého sloupce j určují j -tý tvar kmitání:

$$[v^0] = [\{v_{(1)}^0\}, \{v_{(2)}^0\}, \dots, \{v_{(j)}^0\}, \dots, \{v_{(n)}^0\}]. \quad (1.14)$$

Obecné řešení soustavy n pohybových rovnic (1.1) pro určení vlastního kmitání při zanedbání útlumu - tzv. volného kmitání, lze v maticovém tvaru popsat rovnicemi:

$$\{v_0(t)\} = \sum_{j=1}^n [A_{(j)}^0 \cdot \sin(\omega_{(j)} \cdot t) + B_{(j)}^0 \cdot \cos(\omega_{(j)} \cdot t)] \cdot \{v_{(j)}^0\} \quad (1.15)$$

a

$$\{v_0(t)\} = \sum_{j=1}^n q_{(j)}^0 \cdot \{v_{(j)}^0\} \cdot \sin(\omega_{(j)} \cdot t + \varphi_{(j)}^0) = \sum_{j=1}^n q_{(j)}(t) \cdot \{v_{(j)}^0\}, \quad (1.16)$$

kde konstanta $q_{(j)}^0$ vyjadřuje podíl každého vlastního tvaru na složeném kmitání a fázové úhly $\varphi_{(j)}^0$ vyjadřují fázové posunutí každého vlastního tvaru v čase.



Obsah

7. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pro rychlost a zrychlení platí následující maticové rovnice:

$$\{\dot{v}_0(t)\} = \sum_{j=1}^n \omega_{(j)} \cdot \left[A_{(j)}^0 \cdot \cos(\omega_{(j)} \cdot t) + B_{(j)}^0 \cdot \sin(\omega_{(j)} \cdot t) \right] \cdot \{v_{(j)}^0\} \quad (1.17)$$

a

$$\{\ddot{v}_0(t)\} = - \sum_{j=1}^n \omega_{(j)}^2 \cdot \left[A_{(j)}^0 \cdot \sin(\omega_{(j)} \cdot t) + B_{(j)}^0 \cdot \cos(\omega_{(j)} \cdot t) \right] \cdot \{v_{(j)}^0\} . \quad (1.18)$$

1.1.2. Ortogonalita vlastních tvarů kmitání

Tvary vlastního kmitání jsou ortogonální (nezávislé), což lze dokázat pro $j \neq h$ s využitím matice hmotnosti $[m]_D$:

$$\{v_{(j)}^0\}^T \cdot [m]_D \cdot \{v_{(h)}^0\} = 0 \quad (1.19)$$

nebo matice tuhosti $[k]$:

$$\{v_{(j)}^0\}^T \cdot [k] \cdot \{v_{(h)}^0\} = 0 . \quad (1.20)$$

1.1.3. Normované vlastní tvary kmitání

Pro tvary vlastního kmitání se mohou amplitudy zvolit tak, aby pro výchylky $q_{(j)}^0 \cdot \{v_{i(j)}^0\} = = V_{i(j)}$ platilo:

$$\{V_{(j)}\}^T \cdot [m]_D \cdot \{V_{(j)}\} = 1 . \quad (1.21)$$



Obsah

8. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Vektory $\{V_{(j)}\}$ ve vztahu (1.21) vyjadřují normované vlastní tvary - tzv. ortonormové vlastní tvary, které lze určit:

$$\{V_{(j)}\} = \frac{\{v_{(j)}^0\}}{\sqrt{\{v_{(j)}^0\}^T \cdot [m]_D \cdot \{v_{(j)}^0\}}} . \quad (1.22)$$

Ortonormovaná modální matice se pak skládá z ortonormovaných vektorů:

$$[V] = [\{V_{(1)}\}, \{V_{(2)}\}, \dots, \{V_{(n)}\}] \quad (1.23)$$

Podmínky ortogonalit lze definovat s využitím ortonormované modální matice $[V]$ pomocí rovnic:

$$[V]^T \cdot [m]_D \cdot [V] = [E]_D \quad (1.24)$$

a

$$[V]^T \cdot [k] \cdot [V] = [\omega_{(j)}^2]_D , \quad (1.25)$$

kde $[E]$ je diagonální jednotková matice a $[\omega_{(j)}^2]_D$ je diagonální matice druhých mocnin vlastních kruhových frekvencí kmitání.

1.2. Určení vlastních frekvencí a tvarů vlastního kmitání jednoduchých konstrukcí

Mechanická rezonance, tedy shoda vlastních mechanických kmitočtů stavební konstrukce s kmitočtem přicházejících impulsů (kmitů, rázů) je nežádoucím jevem, neboť může způso-



Obsah

9. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

bit poškození kmitající části i částí, na kterou se kmitání přenáší. Síly buzené dynamickým zatížením (u mostů např. chodci nebo dopravou) ve stejné frekvenci totožné s některou vlastní frekvencí konstrukce může zapříčinit vznik tzv. rezonance. Z tohoto důvodu se u dynamicky namáhaných konstrukcí zjišťují dynamické charakteristiky, ke kterým patří např. vlastní frekvence (příslušející svislému, vodorovnému a kroutivému kmitání).

Poznámka 1.1. Kmitání lávek může mít různé příčiny, např. chodce, kteří mohou jít, běžet, poskakovat nebo tančit, vítr apod. Účinky pěší dopravy na lávkách přitom závisí na různých faktorech - např. na počtu a rozmístění chodců. Pokud nedochází k významné odezvě lávky, obvykle se pohybující chodci budí na lávce periodické současně působící síly ve svislém směru s frekvencí v rozmezí 1 až 3 Hz a ve vodorovném směru s frekvencí v rozmezí 0,5 až 1,5 Hz. Skupina klusajících chodců se může pohybovat po lávce s frekvencí 3 Hz.

Poznámka 1.2. Pokud je některá vlastní frekvence svislého kmitání nosné konstrukce lávky v oblasti frekvencí 1,0 až 5,0 Hz a/nebo vlastní frekvence vodorovného kmitání hlavní nosné konstrukce lávky v oblasti frekvencí 0,5 až 2,5 Hz, je podle ČSN EN 1991-2 Zatížení mostů dopravou nutné provést podrobnou analýzu dynamického chování lávky.

Analýza musí obsahovat výpočet vlastních frekvencí a tvarů kmitání lávky na vhodném výpočetním modelu, odhad tlumení konstrukce, výpočet vynuceného kmitání lávky od skupiny chodců nebo proudu chodců.

Poznámka 1.3. V případě lehkých výztužných prvků, lanových závěsů a podobných konstrukčních prvků by se podle ČSN EN 1993-2 Navrhování ocelových konstrukcí - Ocelové mosty, mělo rovněž uvažovat se vznikem rezonance konstrukce. Pokud mají tyto konstrukční prvky vlastní frekvence blízké frekvenci libovolného mechanického buzení od pravidelného přejíždění vozidel přes spoje mostovky, má se buď zvýšit tuhost nebo se mají do konstrukce vložit tlumiče kmitání.

[Obsah](#)[10. strana ze 26](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

V následujícím učebním textu bude výklad zaměřen na stanovení vlastních tvarů kmitání a vlastních frekvencí jednoduchých stavebních konstrukcí.

Příklad 1.4. S využitím výpočetních postupů popsaných v kapitole 1.1 určete vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání na prostém nosníku délky $L = 6$ metrů, který je tvořen ocelovým válcovaným profilem IPE300. Výpočet proveďte pro počet stupňů volnosti $n = 3, 6, 10, 20, 50, 100$, přičemž sledujte změny hodnot výsledných veličin i vlastních tvarů.

Řešení. Požadovaný výpočet lze provést s využitím následujícího skriptu vytvořeného v prostředí programového systému MATLAB:

```
% Příklad 1:  
% Určuje vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání  
% na prostém nosníku  
clc; clear;  
% Zadání  
L=6;           % Délka nosníku [m]  
E=2.1e11;     % Modul pružnosti v tahu a prostém tlaku [Pa]  
I=8.356e-5;   % Moment setrvačnosti [m^4] (IPE300)  
mi=42.2;     % Hmotnost [kg/m] (IPE300)  
n=30;        % Počet stupňů volnosti  
ndraw=6;     % Kolik vlastních tvarů vykreslit (ndraw<=n)  
d=L/(n+1);   % Nosník se rozdělí na n+1 dílků stejné délky d  
m=mi*d;     % Velikost soustředěné hmoty v bodě i  
mr=m*ones(1,n); % Matice hmotnosti v řádkovém tvaru  
md=diag(mr,0); % Diagonální matice hmotnosti [m]
```

[Obsah](#)[11. strana ze 26](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```

% Inverzní matice k matici hmotnosti
mdinv=diag(ones(n,1)./diag(md,0),0);
% Výpočet matice konstant tuhosti [k] pro prostý nosník
for i=1:n
    pb=i/(n+1);
    ppb=1-pb;
    for j=i:n;
        xb=j/(n+1);
        xpb=1-xb;
        Delb(j,i)=pb*xpb*(1-(pb^2)-(xpb^2));
        Delb(i,j)=Delb(j,i);
    end
end
Delb=(1/6)*Delb;
Suc=(L^3)/(E*I);
Del=Suc*Delb;
kb=inv(Delb);
Suci=1/Suc;
k=Suci*kb;
% Redukovaná matice tuhosti kr
kr=mdinv*k;
% Výpočet vlastních čísel
[v,om2]=eig(kr); % Vlastní vektory a vlastní čísla matice kr
om2v=diag(om2,0); % Vektor 2. mocnin vlastních úhlových frekvencí
omv=sqrt(om2v); % Vektor vlastních úhlových frekvencí
fv=omv./(2*pi); % Vektor vlastních frekvencí [Hz]

```



Obsah

12. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```

% Frekvence a tvary kmitání uspořádané podle pořadí
omv=sort(omv); % Uspořádá prvky vektoru omv podle velikosti
[fv,i]=sort(fv); % Uspořádá prvky vektoru {fv} podle velikosti
% a pořadí indexů uloží do vektoru {i}
v=v(:,i); % Vymění pořadí sloupců matice v
% podle pořadí vlastních tvarů
% Výpočet ortonormované modální matice V
V=zeros(n);
for j=1:n
    vj=v(:,j);
    VJ=vj./sqrt(vj'*md*vj);
    V(:,j)=VJ;
end
% Kontrola ortonormovaných tvarů kmitání
Ekont=V'*md*V; % Musí vyjít [E]
norm(Ekont-eye(n))% norma
% Vykreslení výsledků
x=linspace(0,L,n+2);
xp=[0,L]; yp=[0,0];
xv=x(2:n+1); % Vnitřní body
figure
for j=1:ndraw % j-tý tvar kmitání
    VJ=[0;V(:,j);0];
    jr=int2str(j);
    fr=num2str(fv(j,1),8);

```



Obsah

13. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```
out=[jr,'. tvar kmitání, f(,jr,) = ',fr,' Hz'];
if ndraw<4 % Graf v j-tém kvadrantu v rastru s 1 sloupcem
    subplot(ndraw,1,j)
else % Graf v j-tém kvadrantu v rastru s 2 sloupci
    if mod(ndraw,2)==1
        subplot(floor(ndraw/2)+1,2,j)
    else
        subplot(ndraw/2,2,j)
    end
end
hold on
plot(x,VJ,'b-',xp,yp,'r^--',xv,V(:,j),'bo')
title(out);
stem(x,VJ,'b-', 'marker', 'none');
hold off
end
```

[Obsah](#)[14. strana ze 26](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Výsledné vlastní frekvence jsou pro řešení kmitání prostého nosníku s 30 stupni volnosti z příkladu 1.4 uvedeny pro prvních 30 vlastních tvarů v následujícím výpisu:

* Výpočet vlastních frekvencí - prostý nosník *

Počet stupňů volnosti dynamické soustavy = 30

Kontrola ortonormovaných tvarů kmitání = 1.925e-15

číslo vlastního tvaru	vlastní frekvence [Hz]
-----------------------------	------------------------------

1	28.136
2	112.546
3	253.227
4	450.175
5	703.378
6	1012.809
7	1378.416
8	1800.106
9	2277.729
10	2811.040
11	3399.668
12	4043.055



Obsah

15. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

13	4740.382
14	5490.472
15	6291.661
16	7141.624
17	8037.163
18	8973.935
19	9946.126
20	10946.069
21	11963.821
22	12986.727
23	13999.051
24	14981.738
25	15912.460
26	16766.092
27	17515.736
28	18134.386
29	18597.143
30	18883.716

Vlastní frekvence a prvních 6 tvarů vlastního kmitání prostého nosníku z příkladu 1.4 jsou také graficky zobrazeny na obrázku 1.1.



Obsah

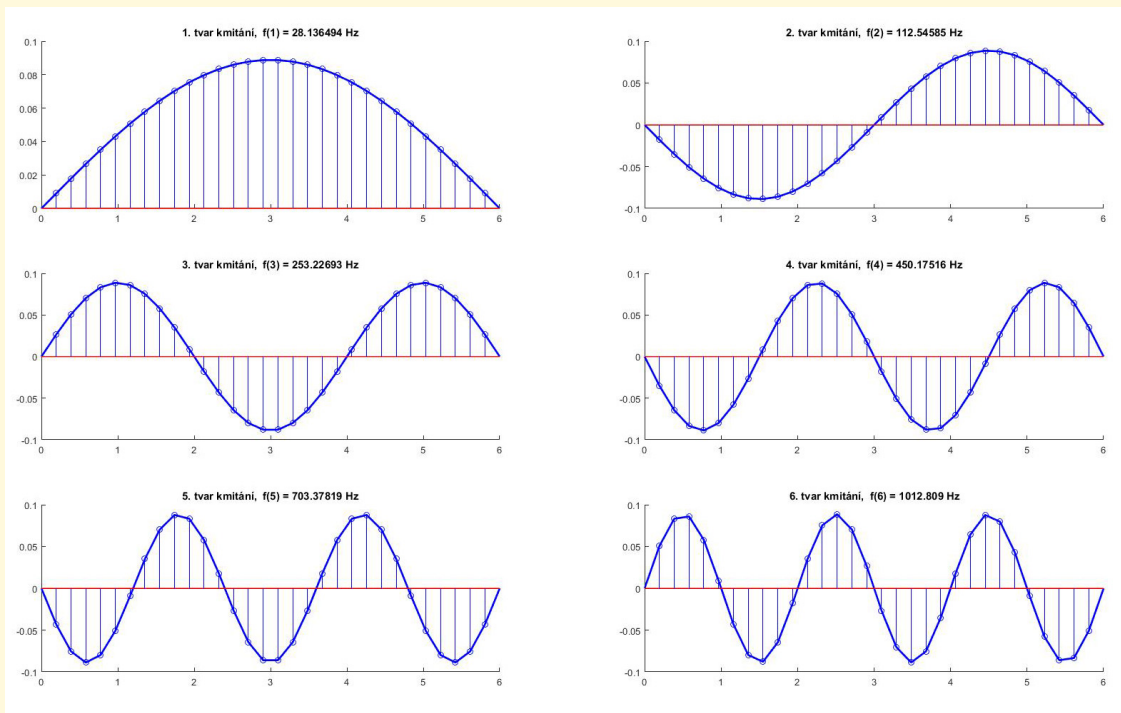
16. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.1 Vlastní frekvence a prvních 6 tvarů vlastního kmitání prostého nosníku z příkladu 1.4 se zadanými 30 stupni volnosti.



Obsah

17. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.5. S využitím výpočetních postupů popsaných v kapitole 1.1 určete vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání na konzolovém nosníku délky $L = 2$ metry, který je tvořen ocelovým válcovaným profilem IPE300. Výpočet proveďte pro počet stupňů volnosti $n = 3, 6, 10, 20, 50, 100$, přičemž sledujte změny hodnot výsledných veličin i vlastních tvarů.

Řešení. Požadovaný výpočet lze provést s využitím následujícího skriptu vytvořeného v prostředí programového systému MATLAB:

```
% Příklad 2:
% Určuje vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání
% na konzole
clc; clear;
% Zadání
L=2;           % Délka nosníku [m]
E=2.1e11;     % Modul pružnosti v tahu a prostém tlaku [Pa]
I=8.356e-5;   % Moment setrvačnosti [m^4] (IPE300)
mi=42.2;     % Hmotnost [kg/m] (IPE300)
n=24;        % Počet stupňů volnosti
ndraw=6;     % Kolik vlastních tvarů vykreslit (ndraw<=n)
d=L/n;       % Nosník se rozdělí na n dílků stejné délky d
m=mi*d;      % Velikost soustředěné hmoty v bodě i
mn=m/2;      % Velikost hmoty v koncovém bodě
mrv=m*ones(1,n-1); % Matice hmotnosti vnitřních bodů v řádkovém tvaru
mr=[mrv,mn]; % Matice hmotnosti v řádkovém tvaru
md=diag(mr,0); % Diagonální matice hmotnosti [m]
% Inverzní matice k matici hmotnosti
mdinv=diag(ones(n,1)./diag(md,0),0);
```



Obsah

18. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```

% Výpočet matice konstant tuhosti [k] pro konzolu
for i=1:n
    pb=i/n;
    ppb=1-pb;
    for j=i:n;
        xb=j/n;
        xpb=1-xb;
        Delb(j,i)=3*(pb^2)*xb-(pb^3);
        Delb(i,j)=Delb(j,i);
    end
end
Delb=(1/6)*Delb;
Suc=(L^3)/(E*I);
Del=Suc*Delb;
kb=inv(Delb);
Suci=1/Suc;
k=Suci*kb;
% Redukovaná matice tuhosti kr
kr=mdinv*k;
% Výpočet vlastních čísel
[v,om2]=eig(kr); % Vlastní vektory a vlastní čísla matice kr
om2v=diag(om2,0); % Vektor 2. mocnin vlastních úhlových frekvencí
omv=sqrt(om2v); % Vektor vlastních úhlových frekvencí
fv=omv./(2*pi); % Vektor vlastních frekvencí [Hz]
% Frekvence a tvary kmitání uspořádané podle pořadí

```



Obsah

19. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```

omv=sort(omv);           % Uspořádá prvky vektoru omv podle velikosti
[fv,i]=sort(fv);        % Uspořádá prvky vektoru {fv} podle velikosti
                        % a pořadí indexů uloží do vektoru {i}
v=v(:,i);                % Vymění pořadí sloupců matice v
                        % podle pořadí vlastních tvarů
% Výpočet ortonormované modální matice V
V=zeros(n);
for j=1:n
    vj=v(:,j);
    VJ=vj./sqrt(vj'*md*vj);
    V(:,j)=VJ;
end
% Kontrola ortonormovaných tvarů kmitání
Ekont=V'*md*V;          % Musí vyjít [E]
norm(Ekont-eye(n)) % norma
% Vykreslení výsledků
x=linspace(0,L,n+1);
y=zeros(1,n+1);
xp=[0,0];                % Vetknutí
yp=[-0.1,+0.1];         % Vetknutí
xv=x(2:n+1);            % Všechny body mimo vetknutí
figure
for j=1:ndraw            % j-tý tvar kmitání
    VJ=[0;V(:,j)];
    jr=int2str(j);

```



Obsah

20. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```
fr=num2str(fv(j,1),8);
out=[jr,'. tvar kmitání, f(',jr,') = ',fr,' Hz'];
if ndraw<4 % Graf v j-tém kvadrantu v rastru s 1 sloupcem
    subplot(ndraw,1,j)
else % Graf v j-tém kvadrantu v rastru s 2 sloupci
    if mod(ndraw,2)==1
        subplot(floor(ndraw/2)+1,2,j)
    else
        subplot(ndraw/2,2,j)
    end
end
hold on
plot(x,y,'r--',x,VJ,'b-',xp,yp,'r-',xv,V(:,j),'bo')
title(out);
stem(x,VJ,'b-', 'marker', 'none');
hold off
end
```

[Obsah](#)[21. strana ze 26](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Výsledné vlastní frekvence jsou uvedeny v následujícím výpisu:

```
*****
*      Výpočet vlastních frekvencí - konzolový nosník      *
*****
```

```
Počet stupňů volnosti dynamické soustavy =          24
Kontrola ortonormovaných tvarů kmitání   = 7.491e-13
```

číslo vlastního tvaru	vlastní frekvence [Hz]
-----------------------------	------------------------------

1	90.140
2	563.789
3	1575.829
4	3082.360
5	5085.961
6	7583.208
7	10570.704
8	14044.370
9	17999.016
10	22427.594
11	27320.027
12	32661.405



Obsah

22. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

13	38429.330
14	44590.142
15	51093.856
16	57867.764
17	64808.999
18	71777.031
19	78588.048
20	85014.464
21	90793.674
22	95649.282
23	99323.604
24	101612.584

Vlastní frekvence a prvních 6 tvarů vlastního kmitání konzolového nosníku z příkladu 1.5 jsou pak graficky zobrazeny na obrázku 1.2.



Příklad 1.6. U obou obou předchozích nosníků změňte průřez ocelového nosníku např. na IPE200 a IPE140 a sledujte změny v hodnotách vlastních frekvencí.

Příklad 1.7. S využitím výpočetních postupů popsanych v kapitole 1.1 a vztahů pro určení příslušné matice tuhosti $[k]$ v [2, 3] určete vlastní frekvence a tvary vlastního kmitání na jednostranně či oboustranně vetknutém nosníku konstantního průřezu.



Obsah

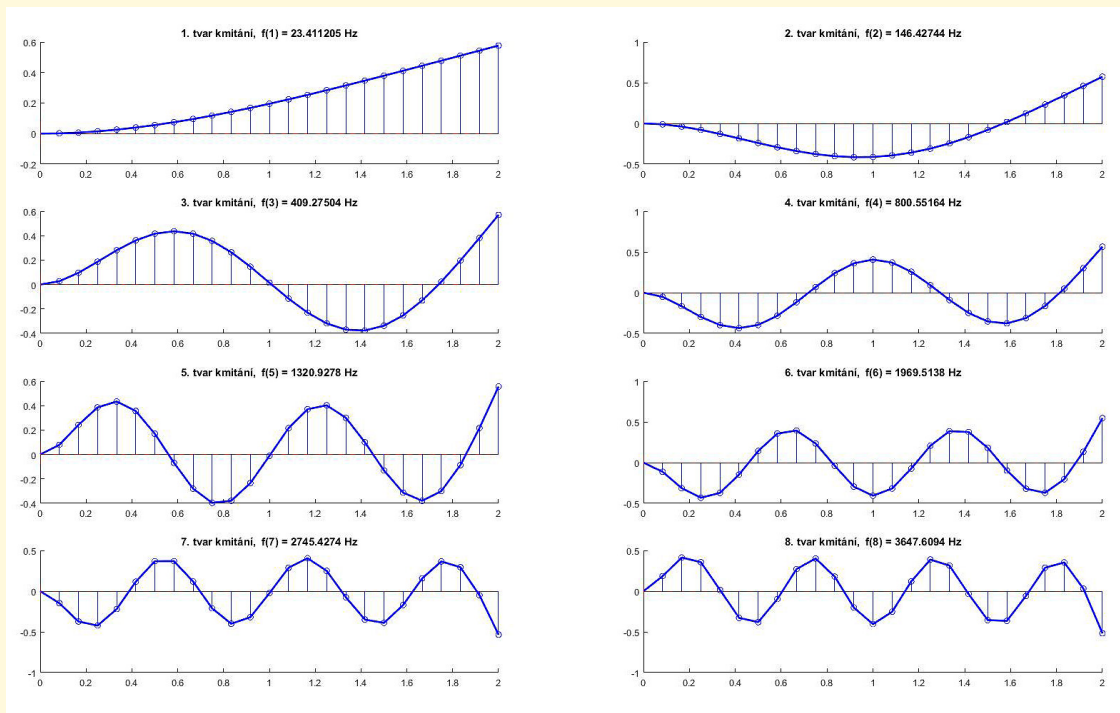
23. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.2 Vlastní frekvence a prvních 8 tvarů vlastního kmitání konzolového nosníku z příkladu 1.5 se zadanými 24 stupni volnosti.



Obsah

24. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Literatura

- [1] MATLAB. Programový systém pro provádění matematických výpočtů. Komerční software, verze R2014b. [on-line]. <<http://www.mathworks.com>>. The MathWorks, únor 2015.
- [2] Melcer, J. – Kuchárová, D. *Dynamika stavebných konstrukcí – Příklady*. 1. vydání. Žilinská univerzita v Žilině, 2004. (300 s). ISBN 80-8070-326-4.
- [3] Melcer, J. – Lajčáková, G. *Aplikácie programového systému Matlab pri riešení úloh dynamiky stavebných konstrukcií*. 1. vydání. Žilinská univerzita v Žilině, 2011. (166 s). ISBN 978-80-554-0308-3.
- [4] Sauer T. *Numerical Analysis*. George Mason University. Pearson Education, Inc., 2006. (669 s). ISBN 0-321-26898-9.
- [5] Sigmon K. *MATLAB Primer CZ*. Elektronický manuál programového systému MATLAB. Druhé vydání. [on-line]. <<https://artax.karlin.mff.cuni.cz/~beda/cz/matlab/primercz/matlab-primer.html>>.

Obsah

25. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Department of Mathematics, University of Florida, 1989, 1992. Z anglického originálu přeložil Petr Klášterecký.



Obsah

26. strana ze 26



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno