

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta stavební



Přednáška z předmětu: Speciální numerické metody

## Téma č.1: Přenosové matice

doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Obsah

1. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

# Obsah

<b>1 Přenosové matice</b>	<b>3</b>
1.1 Odvození	4
1.2 Zatížení	8
1.2.1 Spojité zatížení	10
1.3 Příklady na procvičení	12
<b>Literatura</b>	<b>23</b>



Obsah

2. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



# Kapitola 1

## Přenosové matice

### Cíle

Kapitola je zaměřena na:

- seznámení s přenosovými maticemi,
- teoretického pozadí přenosových matic a jejich odvození,
- jejich využití pro výpočet průběhů vnitřních sil a deformací na prutech konstrukce, řešené např. obecnou deformační metodou.

Přenosové matice se používají nejčastěji pro výpočet průběhů složek vnitřních sil a složek přetvoření na jednotlivých prutech stavebních nosných konstrukcí. Jedná se o relativně moderní výpočetní metodu, která se v praxi uplatnila až s možností využití počítačů k technickým výpočtům.

Obsah

3. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Použití přenosových matic je široké. Lze je použít s dostatečnou přesností i pro řešení prutů zakřivených nebo pro pruty s proměnlivým průřezem. Uplatnění nachází i při odvození tuhostních matic.

## 1.1. Odvození

Pro odvození přenosových matic je nutné nejprve definovat prizmatický dílek o nenulové délce  $d$  a stálého průřezu, který byl vyjmutý z obecně namáhaného obecného prutu. Pro tento dílek je nutné také definovat lokální kartézský a pravotočivý souřadnicový systém os  $y_i$ , kde osa  $y_1$  bude osou těžištní a osy  $y_2, y_3$  hlavními osami setrvačnosti.

Na začátku tohoto dílku  $d$  nechť leží bod  $m$  a na konci bod  $n$ , přičemž platí  $y_{1,m} < y_{1,n}$ . Za předpokladu nejobecnějšího případu, t.j. prutu prostorového rámu, lze definovat v bodě  $m$  subvektor všech šesti složek vnitřních sil:

$$\{S\}_m = \{M_{1,m}, M_{2,m}, M_{3,m}, P_{1,m}, P_{2,m}, P_{3,m}\}^T, \quad (1.1)$$

kde  $M$  jsou složky momentové a  $P$  složky silové. Z možných rovnovážných dvojic těchto složek vnitřních sil lze vybrat na začátek i na konec dílku pouze ty, jimiž působí odňaté části prutu na vyšetřovaný dílek. Na konci dílku  $d$  nechť mají vektory kladných složek vnitřních sil shodný smysl s kladnými poloosami  $y_i$  a na začátku dílku smysl opačný.

Obdobně lze definovat v bodě  $m$  subvektor všech šesti složek přetvoření:

$$\{\delta\}_m = \{\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m}, \varphi_{3,m}, v_{1,m}, v_{2,m}, v_{3,m}\}^T, \quad (1.2)$$

kde  $\varphi$  jsou složky rotací a  $v$  složky translací styčnicku. Kladné složky rotací a translací mají na začátku i na konci dílku  $d$  smysl shodný s kladnými poloosami  $y_i$ .



Obsah

4. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Je vhodné připomenout, že posouvající síly nepůsobí v těžišti průřezu, ale prochází středem smyku, což je bod, k němuž musí být definováno zatížení kroutícím momentem. Zároveň se jedná o bod průřezu, který se při kroucení prutu v rovině průřezu neposune.

Budou-li známy všechny prvky obou subvektorů (1.1) a (1.2), lze přesně popsat stav analyzovaného průřezu. Proto lze definovat tzv. *stavový vektor* průřezu  $p$ :

$$\{St\}_p = \left\{ \{S\}_p^T, \{\delta\}_p^T \right\}^T. \quad (1.3)$$

Počáteční bod střednice dílku  $d$  je stále bod  $m$  a bod koncový  $n$ . Lze předpokládat, že na prutu, z něhož byl vybrán dílek  $d$ , existuje nějaké silové nebo deformační zatížení. V případě, že mezi body  $m$  a  $n$  nepůsobí žádné zatížení, nelze předpokládat rovnost obou vektorů  $\{St\}_m$  a  $\{St\}_n$ . Je proto nutné uvažovat závislost obou vektorů ve tvaru maticového součinu:

$$\{St\}_n = [Pr]_{m,n} \cdot \{St\}_m, \quad (1.4)$$

kde  $[Pr]_{m,n}$  je tzv. přenosovou maticí stavového vektoru bodu  $m$  do bodu  $n$ . Pro prut prostorového rámu se jedná o čtvercovou matici typu 12x12. Pro jiné typy prutových konstrukcí (rovinný rám, rošt, atd.) se počet prvků subvektorů (1.1) a (1.2) i typ přenosové matice příslušným způsobem zredukuje.

Přenosová matice  $[Pr]$  se skládá ze čtyř submatic  $[pr]_{i,j}$ :

$$[Pr] = \begin{bmatrix} [pr]_{1,1} & [pr]_{1,2} \\ [pr]_{2,1} & [pr]_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

kde submatice  $[pr]_{1,2}$  je nulová, neboť ze statických podmínek vyplývá, že na přetvoření bodu  $m$  nemohou mít obecně vliv vnitřní síly bodu  $n$ .



Obsah

5. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Rozepsáním vztahu (1.5) lze získat:

$$\begin{aligned} \{S\}_n &= [pr]_{1,1} \cdot \{S\}_m, \\ \{\delta\}_n &= [pr]_{2,1} \cdot \{S\}_m + [pr]_{2,2} \cdot \{\delta\}_m. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Z uvedeného rozepsání (1.6) je zřejmé, že prvky submatice  $[pr]_{1,1}$  lze získat ze statických podmínek rovnováhy ve tvaru:

$$[pr]_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Prvky submatice  $[pr]_{2,2}$  jsou dány geometrií pohybu nepřetvořeného dílku jako tuhého tělesa ve tvaru:

$$[pr]_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$



Obsah

6. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Prvky submatice  $[pr]_{2,1}$  jsou dány podmínkami fyzikálními, resp. geometrickými. Lze ji odvodit ve tvaru:

$$[pr]_{2,1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{GI_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{EI_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d^2}{2EI_2} \\ 0 & 0 & \frac{d}{EI_3} & 0 & \frac{-d^2}{2EI_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{2EI_3} & 0 & \frac{-d^3}{6EI_3} + \frac{d}{GA_2} & 0 \\ 0 & \frac{-d^2}{2EI_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-d^3}{6EI_2} + \frac{d}{GA_3} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

kde  $E$ ,  $G$  jsou moduly pružnosti v tahu a prostém tlaku, resp. ve smyku použitého materiálu,  $d$  je délka přenosu,  $I_t$  je moment tuhosti v kroucení,  $A$  je plocha průřezu,  $I_2$  je centrální moment setrvačnosti k ose  $y_2$ ,  $I_3$  je centrální moment setrvačnosti k ose  $y_3$ ,  $A_2$  je redukovaná plocha průřezu pro uplatnění práce posouvající síly  $P_2$  a  $A_3$  je redukovaná plocha průřezu pro uplatnění práce posouvající síly  $P_3$ .

Tímto je základní přenosová matice zcela definovaná.

Z vlastního odvození vyplývá, že při záměně poloh bodů  $m$  a  $n$  by v přenosové matice byla použita hodnota  $-d$  místo  $d$ , jinak se ostatní prvky matice nemění. Z tohoto důvodu je matice  $[Pr]_{n,m}$  shodná s maticí  $[Pr]_{m,n}$ , pouze prvky s lichou mocninou  $d$  mají opačné znaménko.

Pokud by za uvažovaným dílkem  $mn$  následoval dílek  $nk$  se stejným tvarem průřezu a s rovnoběžnými osami  $y_i$ , pak lze pokračovat v dalším přenosu, přičemž lze získat stavový vektor:

$$\{St\}_k = [Pr]_{n,k} \cdot \{St\}_n = [Pr]_{n,k} \cdot [Pr]_{m,n} \cdot \{St\}_m. \quad (1.10)$$



Obsah

7. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Při přímém přenosu z bodu  $m$  do bodu  $k$  však platí:

$$\{St\}_k = [Pr]_{m,k} \cdot \{St\}_m \quad (1.11)$$

a z porovnání obou výrazů (1.10) a (1.11) vyplývá:

$$[Pr]_{m,k} = [Pr]_{n,k} \cdot [Pr]_{m,n} . \quad (1.12)$$

Lze tedy tvrdit, že součin dvou přenosových matic, sestavených pro dva u sebe ležící prvky se shodným (konstantním) průřezem a shodným směrem průvodního trojhranu setrvačnosti, není nutno provádět. Místo něj lze sestavit výslednou přenosovou matici pro délku, jež délkově i znaménkově odpovídá přenosu z bodu, jenž je totožný s prvním indexem druhé matice do bodu, jenž je totožný s druhým indexem první matice.

## 1.2. Zatížení

Pozornost je nutné věnovat i zatížení. Pro další odvození lze předpokládat, že v jistém bodě  $m$  působí jako osamělé účinky všechny složky obecného zatěžovacího momentu  $N$  a obecné zatěžovací síly  $Q$ .

Složku momentu lze považovat za kladnou tehdy, jestliže její vektor má shodný smysl s kladnou poloosou  $y_i$ . Pro složku síly necht' platí totéž. Všechny tyto složky lze seřadit do vektoru:

$$\{Zg\}_m = \{N_{m,1}, N_{m,2}, N_{m,3}, Q_{m,1}, Q_{m,2}, Q_{m,3}\}^T . \quad (1.13)$$

V témže bodě  $m$  působí současně jako osamělé deformační zatížení všechny složky obecného vektoru rotace  $R$  a obecného vektoru translace  $T$ . I tyto všechny složky lze seřadit do



Obsah

8. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



vektoru:

$$\{Z\delta\}_m = \{R_{m,1}, R_{m,2}, R_{m,3}, T_{m,1}, T_{m,2}, T_{m,3}\}^T . \quad (1.14)$$

Složky vektoru rotace i složky vektoru translace jsou kladné tehdy, odpovídá-li jejich smysl smyslu orientace kladné poloosy.

Kompletní vektor singulárního zatížení bodu  $m$  lze definovat ve tvaru:

$$\{Z\}^T = \{-\{Zg\}_m^T, \{Z\delta\}_m^T\} . \quad (1.15)$$

Záporné znaménku u vektoru  $\{Zg\}$  je vynuceno tím, že normální stavový vektor obsahuje vnitřní síly vlastního dílku (např. síly, jimiž působí uzel na styčnick), kdežto v tomto vektoru jsou obsaženy složky, působící na uzel. Tyto složky se liší znaménkem.

V dalším výpočtu necht' ve vzdálenosti  $l_Q$  v bodě  $o$  působí na vyšetřovaném dílku vektor  $\{Z\}$  singulárních zatěžovacích účinků.

Na začátku dílku v bodě  $m$  platí stavový vektor  $\{St\}_m$ . Na konci první části (před působením zatížení) se změnil na stavový vektor  $\{St\}_o$  daný výrazem  $[Pr]_{m,o} \cdot \{St\}_m$ . Těsně za působištem zatížení se však změnil jeho hodnota o  $\{Z\}$ , takže na začátku tohoto dílku má stavový vektor  $\{St\}_o$  velikost  $[Pr]_{m,o} \cdot \{St\}_m + \{Z\}_o$ . Na konci dílku v bodě  $n$  má stavový vektor hodnotu:

$$\begin{aligned} \{St\}_n &= [Pr]_{o,n} \cdot ([Pr]_{m,o} \cdot \{St\}_m + \{Z\}_o) = \\ &= [Pr]_{o,n} \cdot [Pr]_{m,o} \cdot \{St\}_m + [Pr]_{o,n} \cdot \{Z\}_o \end{aligned} \quad (1.16)$$

a s přihlédnutím ke vztahu (1.12) je možno provést úpravu:

$$\{St\}_n = [Pr]_{m,n} \cdot \{St\}_m + [Pr]_{o,n} \cdot \{Z\}_o . \quad (1.17)$$



Obsah

9. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pokud by zatěžovací vektor ležel v bodě  $n$ , pak by přenosový vztah nabýval tvaru:

$$\{St\}_n = [Pr]_{m,n} \cdot \{St\}_m + \{Z\}_n . \quad (1.18)$$

Porovnáním vztahů (1.17) a (1.18) lze zjistit platnost  $\{Z\}_n = [Pr]_{o,n} \cdot \{Z\}_o$ . Znamená to, že zatěžovací vektor lze rovněž přenášet pomocí přenosové matice a zatěžovací vektor bodu  $o$  lze nahradit staticky a deformačně ekvivalentním zatěžovacím vektorem působícím v jiném bodě. Pro takový vektor platí např.:

$$\{Z\}_n = [Pr]_{o,n} \cdot \{Z\}_o \quad (1.19)$$

nebo

$$\{Z\}_m = [Pr]_{o,m} \cdot \{Z\}_o , \quad (1.20)$$

kde  $[Pr]_{o,m}$  je přenosová matice sestavená pro délku přenosu  $d = y_m - y_o < 0$ .

### 1.2.1. Spojité zatížení

Nyní necht' na délce  $d_z$  působí zatěžovací vektor spojitého zatížení, jehož intenzitu lze vyjádřit mocninnou řadou ve tvaru:

$$\begin{aligned} \{z\} &= \{z_0\} + y \cdot \{z_1\} + y^2 \cdot \{z_2\} + y^3 \cdot \{z_3\} + \dots + y^k \cdot \{z_k\} = \\ &= \sum_{i=0}^k y^i \cdot \{z_i\} , \end{aligned} \quad (1.21)$$



Obsah

10. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

kde počátek nezávislé proměnné  $y$  necht' je totožný s levým okrajem působícího zatížení. Z tohoto spojitého zatížení lze jakékoliv diferenciální zatížení nahradit ekvivalentním zatížením na jeho počátku pomocí přenosu  $d\{z\}_0 = [Pr]_{y,0} \cdot \sum_{i=0}^k y^i \cdot \{z_i\} \cdot dy$ . Celé toto zatížení lze tedy nahradit staticky a deformačně ekvivalentním vektorem singulárního zatížení na počátku zatěžovacího intervalu ve tvaru:

$$\{Z\}_0 = \sum_{i=0}^k \int_0^{d_z} [Pr]_{y,0} \cdot y^i \cdot dy \cdot \{z_i\} = \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} [pr]_{1,1}^i & [0] \\ [pr]_{2,1}^i & [pr]_{2,2}^i \end{bmatrix} \cdot \{z_i\}, \quad (1.22)$$

kde jednotlivé submatice  $[pr]^i$  nabývají tvar:

$$[pr]_{1,1}^i = \begin{bmatrix} \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{-d_z^{i+2}}{i+2} \\ 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & \frac{d_z^{i+2}}{i+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$



Obsah

11. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$[pr]_{2,2}^i = \begin{bmatrix} \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d_z^{i+2}}{i+2} & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} & 0 \\ 0 & \frac{d_z^{i+2}}{i+2} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+1}}{i+1} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

a

$$[pr]_{2,1}^i = \begin{bmatrix} \frac{-d_z^{i+2}}{GI_t \cdot (i+2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-d_z^{i+2}}{EI_2 \cdot (i+2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+3}}{2EI_2 \cdot (i+3)} \\ 0 & 0 & \frac{-d_z^{i+2}}{EI_3 \cdot (i+2)} & 0 & \frac{-d_z^{i+3}}{2EI_3 \cdot (i+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-d_z^{i+2}}{EA \cdot (i+2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_z^{i+3}}{2EI_3 \cdot (i+3)} & 0 & \frac{d_z^{i+4}}{6EI_3 \cdot (i+4)} - \frac{d_z^{i+2}}{GA_2 \cdot (i+2)} & 0 \\ 0 & \frac{-d_z^{i+3}}{2EI_2 \cdot (i+3)} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_z^{i+4}}{6EI_2 \cdot (i+4)} - \frac{d_z^{i+2}}{GA_3 \cdot (i+2)} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

### 1.3. Příklady na procvičení

Pro přiblížení použití přenosových matic následuje několik demonstračních příkladů.



Obsah

12. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

**Příklad 1.1.** Určete průběh posouvajících sil, ohybových momentů, pootočení a průhybu na prostém nosníku délky  $L$ , který je ve třetině rozpětí zatížen osamělým břemenem velikosti  $Q$ . Nosník rozdělte na 12 dílků délky  $d = \frac{L}{12}$ .

*Řešení.* V daném případě se jedná o namáhání rovinným ohybem (např. kolem osy  $y_3$ ). Z šesti složek vnitřních sil jsou nenulové pouze  $M_{m,3}$  a  $P_{m,2}$ , ze složek přetvoření pouze  $\varphi_{m,3}$  a  $v_{m,2}$ . V obou případech je to třetí a pátý prvek subvektorů (1.1) a (1.2). U odvozených matic bude proto do výpočtu vstupovat pouze třetí a pátý sloupec a řádek (ostatní prvky jsou nulové a mohou být tedy vypuštěny).

Základní přenosové submatice budou mít tedy výsledný tvar:

$$[pr]_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

$$[pr]_{2,1} = \frac{d}{EI_3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{-d}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{-d^2}{6} + \frac{EI_3}{GA_2} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

a

$$[pr]_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Při řešení lze vyjít ze skutečnosti, že stavový vektor na konci nosníku je možno získat jako funkci stavového vektoru na začátku nosníku a daného zatížení. Lze pak uplatnit okrajové podmínky (nulový ohybový moment a nulový průhyb na obou koncích) a určit nenulové hodnoty stavových vektorů na obou koncích nosníku.



Obsah

13. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pro jednoduchost stavový vektor na začátku nosníku bude zadán:

$$\{St\}_{y_1=0} = \left\{ 0, \frac{2}{3} \cdot Q, \frac{5}{81} \cdot \frac{Q \cdot L^2}{EI_3}, 0 \right\}^T. \quad (1.29)$$

Pokud je žádoucí získat průběhy vnitřních sil a přetvárných veličin např. po dvanáctinách rozpětí, bude nutné sestojit přenosovou matici pro  $d = \frac{L}{12}$  ve tvaru:

$$[Pr]_{y_1=0, y_1=12} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{12EI_3} & -\frac{L^2}{288EI_3} & 1 & 0 \\ \frac{L^2}{288EI_3} & \frac{-L^3}{10368EI_3} + \frac{L}{12GA_2} & \frac{L}{12} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Touto maticí se vynásobí vždy zleva stávající vektor, čímž vznikne vektor v dalším bodě. Ve třetině rozpětí se stavový vektor opraví o vektor zatížení  $\{Z\}_{y_1=4} = \{0, -Q, 0, 0\}^T$  a pokračuje se v přenosu až do konce nosníku.

Celý výpočetní postup lze provést např. s využitím následujícího skriptu, kde byly zadány také konkrétní vstupní údaje. Pro názornost je v tomto skriptu uveden detailní popis algoritmu s využitím komentářů za znakem %:

```
% Příklad 1 - průběh vnitřních sil a přetvárných veličin na prostém
% nosníku od osamělého břemene, které působí ve třetině rozpětí
clc;
clear;
% Vstupní údaje
L=6;           % rozpětí [m]
```



Obsah

14. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```

b=0.05;           % šířka obdélníkového průřezu [m]
h=0.2;           % výška obdélníkového průřezu [m]
A=b*h;           % průřezová plocha obdélníkového průřezu [m^2]
I=1/12*b*h^3;    % moment setrvačnosti obdélníkového průřezu [m^4]
E=9.5*10^9;      % modul pružnosti v tahu a prostém tlaku,
                 % listnaté dřeviny, třída pevnosti D18 [Pa]
G=0.59*10^9;    % modul pružnosti ve smyku,
                 % listnaté dřeviny, třída pevnosti D18 [Pa]
Av=0.833*A;     % smyková plocha obdélníkového průřezu [m^2]
Q=10*10^3;      % Velikost bodového zatížení [N]
y1Q=L/3;        % Souřadnice působíště zatížení [m]
n=12;           % Počet dílků na prutu
d=L/n;          % Šířka dílku [m]
% Přenosová matice pro d
Pr=[1 -d 0 0; 0 1 0 0;
    d/(E*I) -d^2/(2*E*I) 1 0;
    d^2/(2*E*I) -d^3/(6*E*I)+d/(G*Av) d 1];
% Stavový vektor v bodě y1=0
St=[0 2/3*Q 5*Q*L^2/(81*E*I) 0]';
Z=[0 -Q 0 0]';   % Vektor zatížení
kolik=1;         % kolik bylo určeno hodnot průběhů
y1(kolik)=0;    % aktuální souřadnice y1
M(kolik)=St(1); % velikost ohybového momentu
V(kolik)=St(2); % velikost posouvající síly
fi(kolik)=St(3); % velikost pootočení
w(kolik)=St(4); % velikost průhybu

```



Obsah

15. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

```

for i=1:n
    kolik=kolik+1;
    St=Pr*St;
    y1(kolik)=y1(kolik-1)+d; % aktuální souřadnice y1
    M(kolik)=St(1); % velikost ohybového momentu
    V(kolik)=St(2); % velikost posouvající síly
    fi(kolik)=St(3); % velikost pootočení
    w(kolik)=St(4); % velikost průhybu
    if (y1Q>y1(kolik-1))&(y1Q<=y1(kolik)) % Účinek zatížení
        kolik=kolik+1;
        St=St+Z;
        y1(kolik)=y1(kolik-1); % aktuální souřadnice y1
        M(kolik)=St(1); % velikost ohybového momentu
        V(kolik)=St(2); % velikost posouvající síly
        fi(kolik)=St(3); % velikost pootočení
        w(kolik)=St(4); % velikost průhybu
    end;
end;
% Vykreslení výsledných průběhů vnitřních sil a přetvoření
figure
subplot(2,2,1) % Graf v 1.kvadrantu v rastru 2 x 2 - Vz
hold on
plot(y1,V/1000,'r-','LineWidth',2);
title('\fontsize{12}Průběh posouvající síly \itV_{z}(x)');
xlabel('x [m]');

```



Obsah

16. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



```
ylabel('Vz(x) [kN]');
stem(y1,V/1000,'r-','marker','none');
hold off
subplot(2,2,2)      % Graf ve 2.kvadrantu v rastru 2 x 2 - M
hold on
plot(y1,M/1000,'m-','LineWidth',2);
title('\fontsize{12}Průběh ohybových momentů \itM_{y}(x)');
xlabel('x [m]');
ylabel('My(x) [kNm]');
% set(gca,'YDir','reverse');
stem(y1,M/1000,'m-','marker','none');
hold off
subplot(2,2,3)      % Graf ve 3.kvadrantu v rastru 2 x 2 - fi
hold on
plot(y1,fi/pi*180,'b-','LineWidth',2);
title('\fontsize{12}Graf pootočení \it\phi_{y}(x)');
xlabel('x [m]');
ylabel('fi(x) [deg]');
stem(y1,fi/pi*180,'b-','marker','none');
hold off
subplot(2,2,4)      % Graf ve 4. kvadrantu v rastru 2 x 2 - w
hold on
plot(y1,w*1000,'k-','LineWidth',2);
title('\fontsize{12}Graf ohybové čáry \itw_{z}(x)');
xlabel('x [m]');
```

[Obsah](#)[17. strana ze 23](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

```
ylabel('w(x) [mm]');
set(gca,'YDir','reverse');
stem(y1,w*1000,'k-','marker','none');
hold off
```

Zobrazení okna s výslednými průběhy vnitřních sil a přetvoření je zobrazen na obrázku 1.1. ▲

**Příklad 1.2.** Při výpočtu se zanedbáním práce posouvajících sil lze v submatici (1.27) vynulovat člen  $\frac{EI_3}{GA_2} = 0$ , resp. v matici (1.30) zlomek  $\frac{L}{12GA_2} = 0$ , což se projeví na výsledných přetvořeních. Porovnejte s výsledky příkladu 1.1.

**Příklad 1.3.** Podobně jako v příkladu 1.1 určete průběh posouvajících sil, ohybových momentů, pootočení a průhybu na jednostranně vlevo vetknutém staticky neurčitým nosníku délky  $L$ , který je ve třetině rozpětí zatížen osamělým břemenem velikosti  $Q$ . Nosník rozdělte na 12 dílků délky  $d = \frac{L}{12}$ .

*Řešení.* Stavový vektor na začátku nosníku se rovná:

$$\{St\}_{y_1=0} = \left\{ \frac{5}{27 + 81 \cdot \frac{EI_3}{GA_2 \cdot L^2}} \cdot Q \cdot L, \frac{23 + 54 \cdot \frac{EI_3}{GA_2 \cdot L^2}}{27 + 81 \cdot \frac{EI_3}{GA_2 \cdot L^2}} \cdot Q, 0, 0 \right\}^T. \quad (1.31)$$

Zbývající výpočet je již identický s řešením příkladu 1.1.

Zobrazení okna s výslednými průběhy vnitřních sil a přetvoření pro počet dílků  $n = 60$  je zobrazen na obrázku 1.2. ▲



Obsah

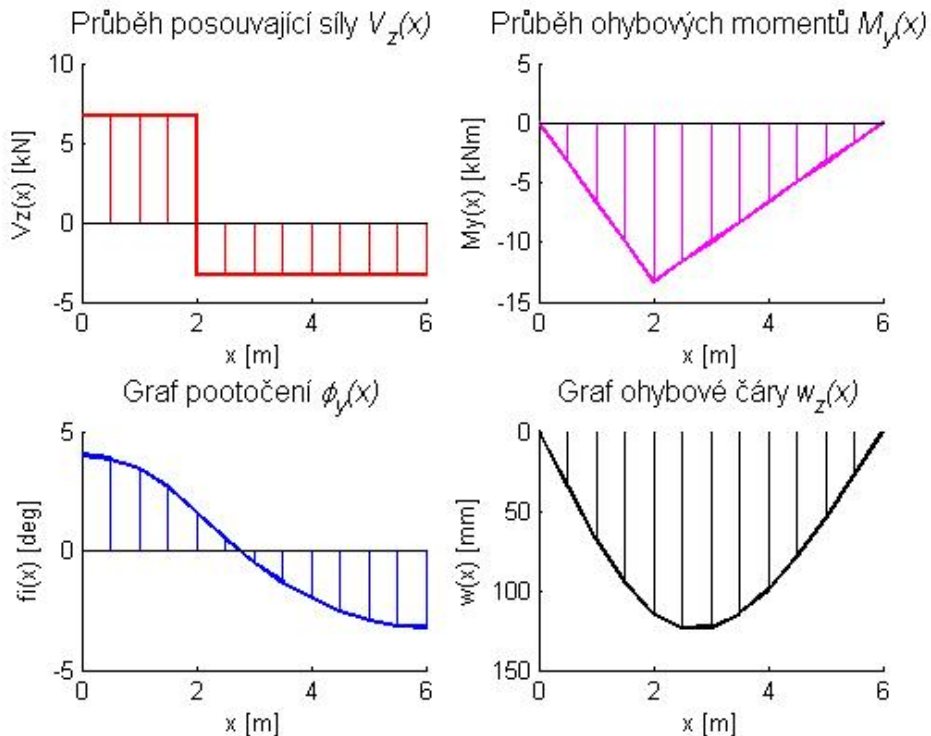
18. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.1 Průběhy vnitřních sil a přetvoření na nosníku z příkladu 1.1

Obsah

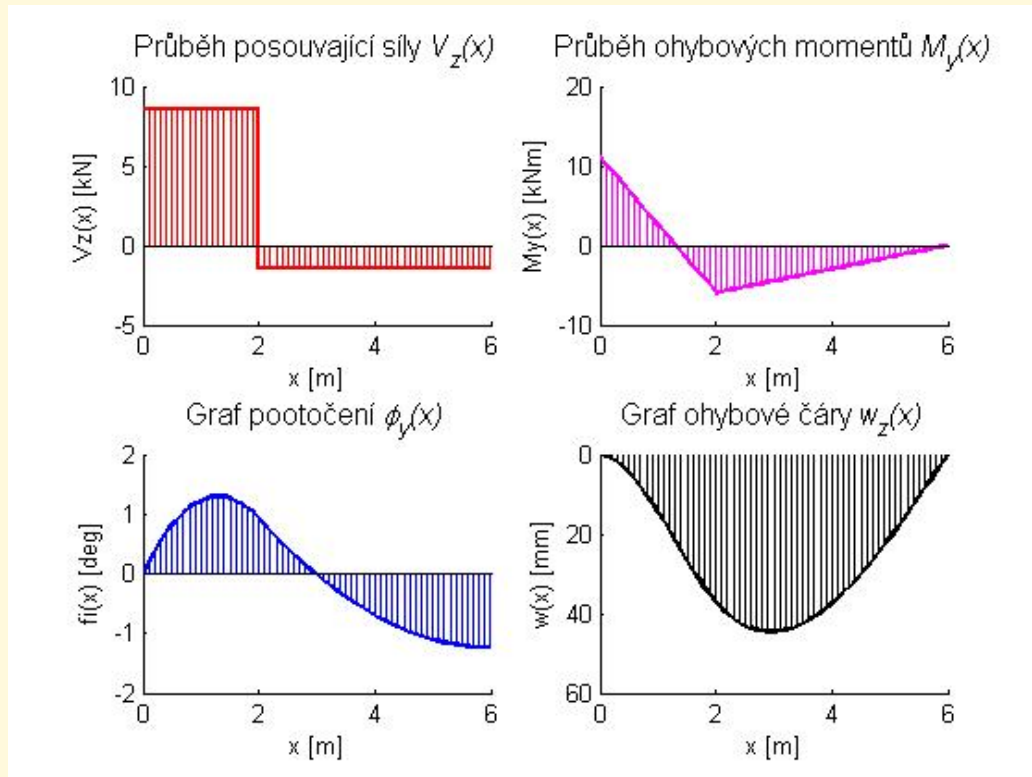
19. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.2 Průběhy vnitřních sil a přetvoření na nosníku z příkladu 1.3

Obsah

20. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

**Poznámka 1.4.** U staticky neurčitého nosníku se případné zanedbání nebo nerespektování práce posouvajících sil projeví kromě velikosti přetvárných veličin také na velikosti vnitřních sil.

### Pro zájemce

S využitím odvozených vztahů v kap. 1.2.1 lze stanovit průběhy vnitřních sil a přetvoření také na prutech zatížených spojitým zatížením (konstantním nebo lichoběžníkovým).

### Pro zájemce

Celý výpočetní postup lze uplatnit např. pro určení průběhů vnitřních sil a přetvárných veličin u prutových konstrukcí řešených obecnou deformační metodou. Stavový vektor na začátku každého z prutů pak lze sestavit na základě výsledných hodnot vnitřních sil a uzlových přetvoření.

**Poznámka 1.5.** Přenosových matic lze využít také pro řešení prutů proměnlivého průřezu. V takovém případě lze v každém dílku předpokládat konstantní průřezové charakteristiky totožné se skutečnými vlastnostmi průřezu v polovině dílku. Takové řešení sice nelze považovat za absolutně přesné, dává ale výsledky s dostatečnou přesností.

**Poznámka 1.6.** Podobně lze řešit i nosníky zakřivené, přičemž lze střednici nahradit polygonem velmi krátkých úseček, jež jsou považovány za přímé. V takovém případě po zadání stavového vektoru na konci dílku je nutné provést transformaci do souřadnicového systému, v němž je vyjádřeno případné zatížení uzlů.

Po přičtení vektoru zatížení se provede další transformace do systému os průvodního trojhranu setrvačnosti dalšího dílku a takto upravený vektor se využije pro přenos na dalším



Obsah

21. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

dílku. Při této transformaci se bere v úvahu i eventuální změnu polohy středu křivosti nebo excentrické připojení dalšího dílku.

**Poznámka 1.7.** Zvětšování počtu dílků (zmenšování délek přenosu) má pozitivní dopad na výsledky, protože se zvyšuje přesnost. Existuje však hranice, po níž se výsledky začnou opět zhoršovat v důsledku negativního vlivu zaokrouhlovacích chyb. Vyzkoušejte např. na skriptu uvedeném u příkladu 1.1 pro počet dílků  $n = 12, 60, 120, 600$  a  $1200$ . Sledujte přitom hodnotu ohybového momentu a průhybu na konci nosníku.



Obsah

22. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



# Literatura

- [1] MATLAB. Programový systém pro provádění matematických výpočtů. Komerční software, verze R2014b. [on-line]. <<http://www.mathworks.com>>. The MathWorks, únor 2015.
- [2] Sigmon K. *MATLAB Primer CZ*. Elektronický manuál programového systému MATLAB. Druhé vydání. [on-line]. <<https://artax.karlin.mff.cuni.cz/~beda/cz/matlab/primercz/matlab-primer.html>>. Department of Mathematics, University of Florida, 1989, 1992. Z anglického originálu přeložil Petr Klášterecký.

Obsah

23. strana ze 23



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno