

Téma 10:

Spolehlivost a bezpečnost stavebních nosných konstrukcí

- Praviděpodobnostní posouzení spolehlivosti a bezpečnosti stavebních nosných konstrukcí
- Účinek zatížení, odolnost konstrukce, výpočetní model, funkce spolehlivosti
- Ukazatel spolehlivosti: návrhová pravděpodobnost, index spolehlivosti
- Návrhová životnost konstrukce

Pravděpodobnostní přístup

Míra spolehlivosti se v metodách II. a III. úrovně vyjadřuje prostřednictvím **pravděpodobnostních ukazatelů spolehlivosti** (index spolehlivosti β , pravděpodobnost poruchy P_f).

Kritérium spolehlivosti:

$$P_f \leq P_d$$

$$\beta_d < \beta$$

P_f ... pravděpodobnost poruchy

P_d ... návrhová pravděpodobnost

Funkce spolehlivosti:

$$RF = R - E$$

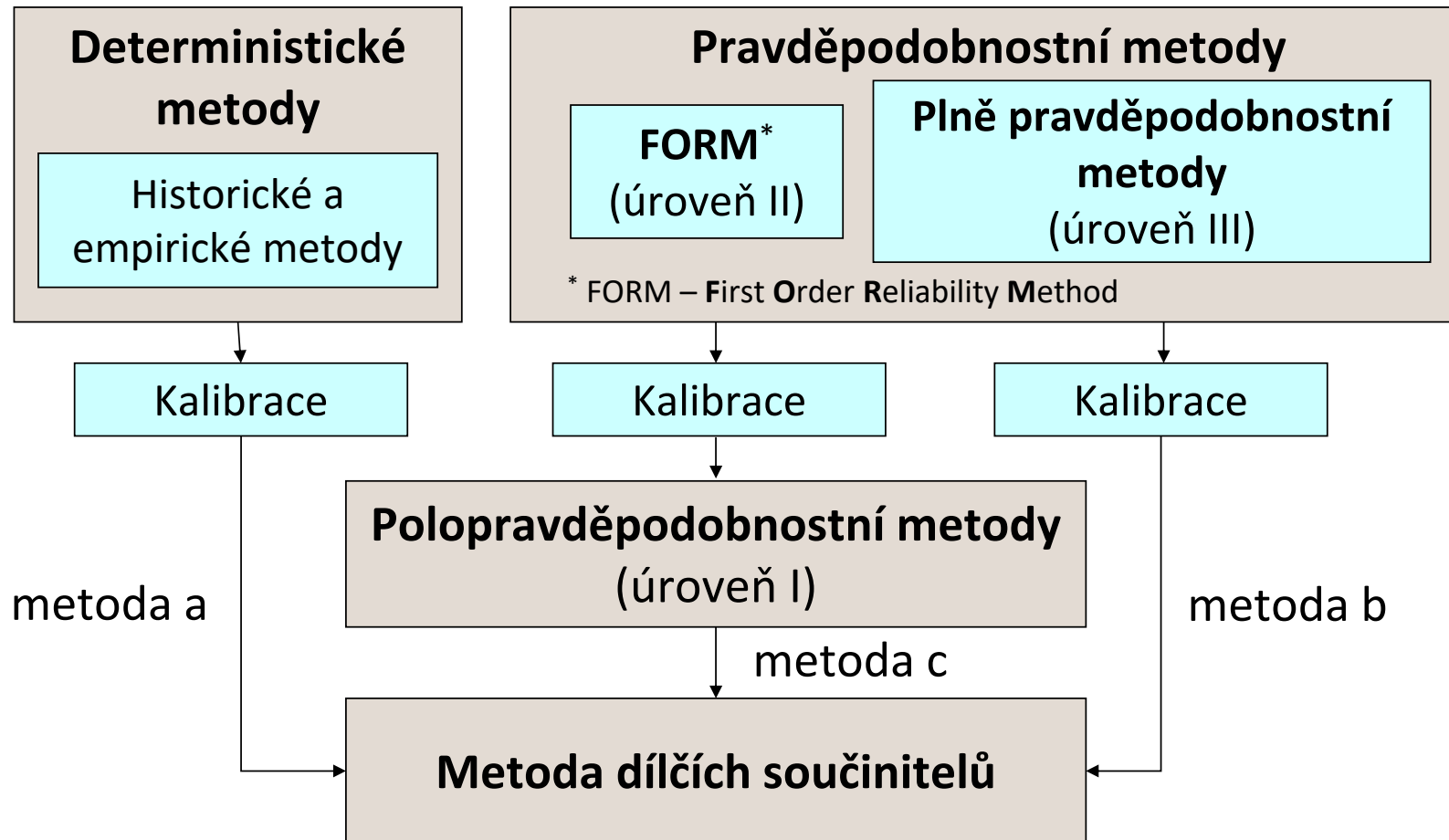
R ... odolnost konstrukce

E ... účinek zatížení

$$P_f = P(RF < 0) = P(R < E)$$



Přehled spolehlivostních metod

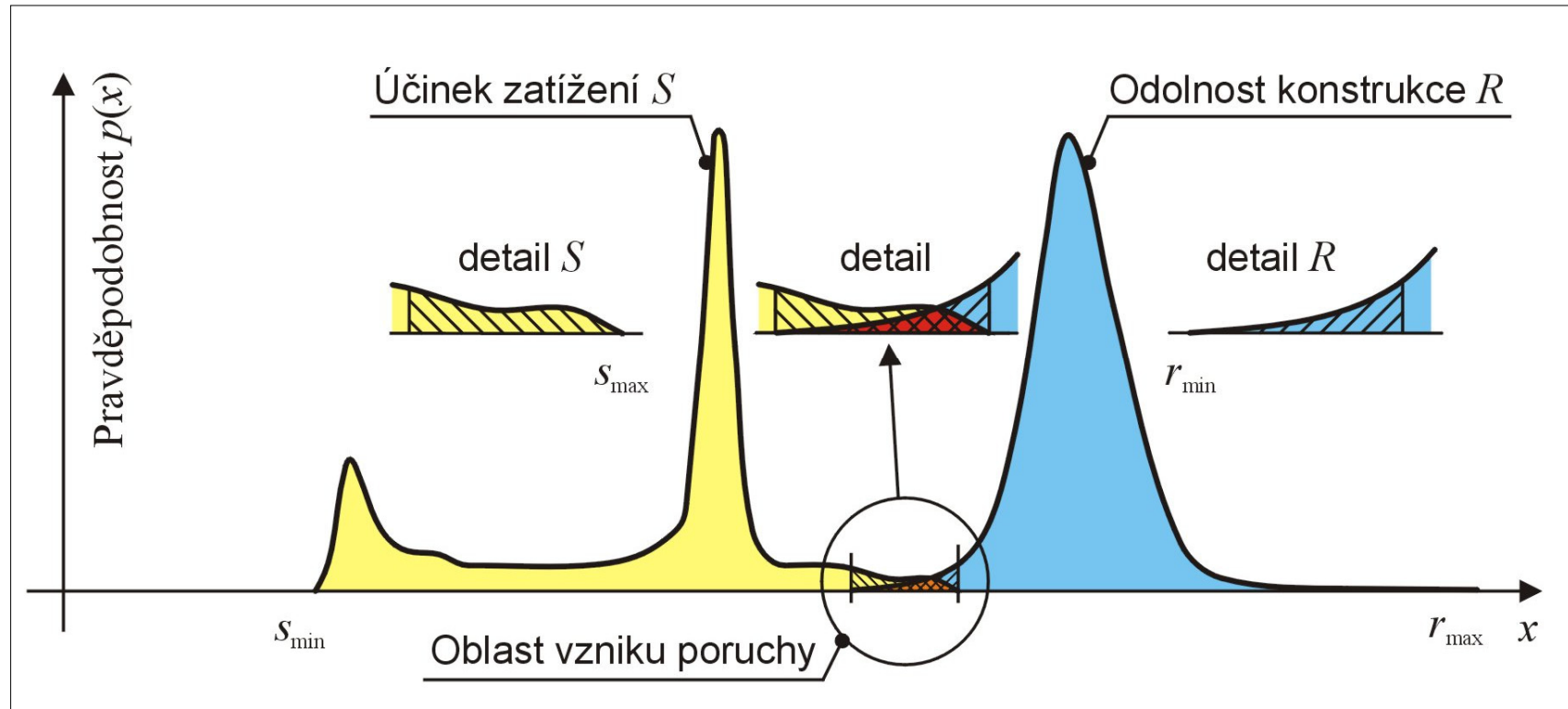


Výpočet pravděpodobnosti poruchy

Porucha nastane, je-li splněna podmínka:

$$RF < 0$$

$$RF = R - S$$



Účinek zatížení

Při stanovení **účinků zatížení** v pravděpodobnostních výpočtech je nutno brát v úvahu:

- zdroj zatížení,
- způsob působení na konstrukci,
- intenzitu zatížení,
- směr zatížení,
- dobu trvání zatížení,
- vliv prostředí – např. změnu teploty či vlhkosti.

Účinek zatížení E (může být rovněž označován písmenem S) je nutno považovat za náhodnou veličinu zejména vzhledem k **náhodné proměnlivosti zatížení v čase a prostoru**.



Účinek zatížení

Náhodné veličiny spojené se zatížením se nejčastěji vyjadřují pomocí **histogramů středních** nebo **extrémních hodnot**.

Mnohdy se používají tzv. **křivky trvání zatížení**, kdy se po určitý časový úsek sleduje proměnlivost zatížení a získané hodnoty se nakonec seřadí vzestupně.

Veličina, vyjadřující účinek zatížení, se váže na **mezní stav**, podle něhož se daný pravděpodobnostní posudek provádí:

- V případě **mezního stavu únosnosti** může účinek zatížení představovat skutečnou velikost dané **vnitřní síly**, příp. **napětí**.
- U **mezního stavu použitelnosti** je účinek zatížení dán skutečným **přetvořením konstrukce**.



Odolnost konstrukce

Definice odolnosti konstrukce R je závislá zejména na:

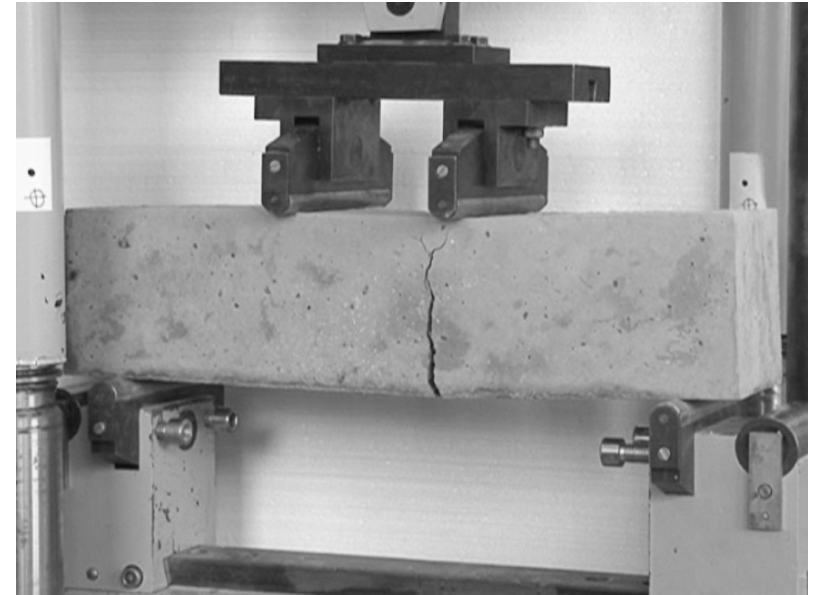
- **výpočetním modelu,**
- **materiálových vlastnostech konstrukce**
(např. pevnostní a tuhostní charakteristiky materiálu),
- **geometrických charakteristikách konstrukce**
(tvar, rozměr nosných prvků, průřezové charakteristiky, výrobní a montážní nepřesnosti).



Odolnost konstrukce

Veličina, vyjadřující **odolnost konstrukce**, se váže na mezní stav, podle něhož se daný pravděpodobnostní posudek spolehlivosti provádí:

- v případě **mezního stavu únosnosti** tak může odolnost konstrukce představovat **únosnost v daném namáhání**, kterou lze určit na úrovni **vnitřní síly** nebo daného **napětí**,
- u **mezního stavu použitelnosti** je odolnost konstrukce dána **mezním přetvořením konstrukce**, příp. **přípustnou frekvencí kmitání**.

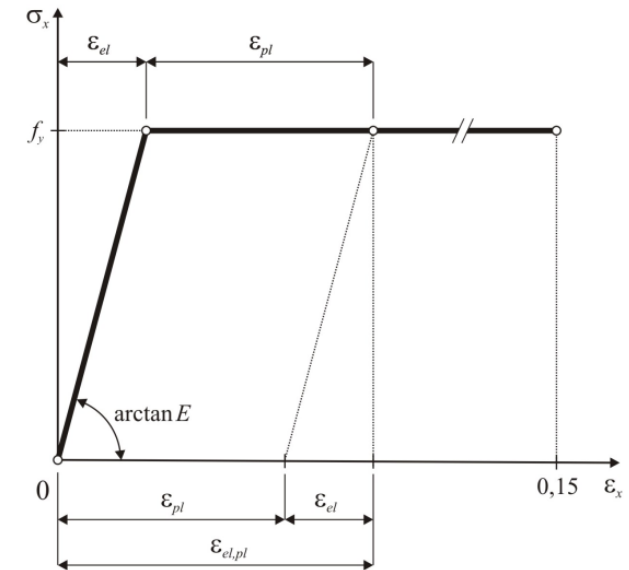
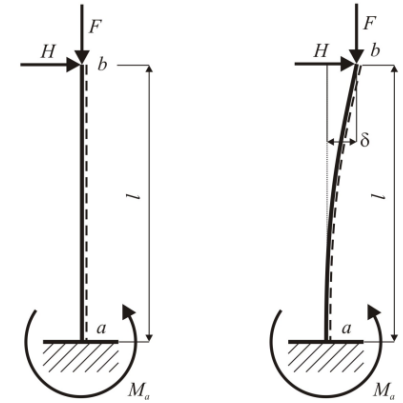


Výpočetní model

S mezním stavem, v rámci něhož se pravděpodobnostní výpočet provádí, souvisí i samotná tvorba **výpočetního modelu**.

Svou roli přitom hraje:

- použitá **metodika výpočtu** (teorie I. řádu, teorie II. řádu),
- matematický popis **chování materiálu konstrukce** (**pružné chování materiálu**, kdy je limitním stavem např. dosažení napětí na mezi kluzu, využití **plastických vlastností**, kdy je limitní např. plastická únosnost, přípustná velikost trvalé deformace nebo tažnost materiálu/limitní poměrná deformace).



Výpočetní model

Na **výpočetní model** může mít rozhodující vliv i skutečnost, zda je předmětem pravděpodobnostního výpočtu posudek spolehlivosti:

- **část nosné konstrukce**
(nosný prvek, nejvíce namáhaný průřez),
- **celý nosný systém.**

U pravděpodobnostního posuzování vede výpočetní model k definici **funkce spolehlivosti** s označením RF (Reliability Function), která bývá také nazývána **funkce poruchy** G nebo **rezerva spolehlivosti** Z .



Funkce spolehlivosti

Nosná konstrukce musí být navržena tak, aby **odolnost konstrukce** R byla větší než **účinek zatížení** E .

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti je založen na **podmínce spolehlivosti**, kterou lze vyjádřit ve tvaru:

$$RF = R - E \geq 0$$

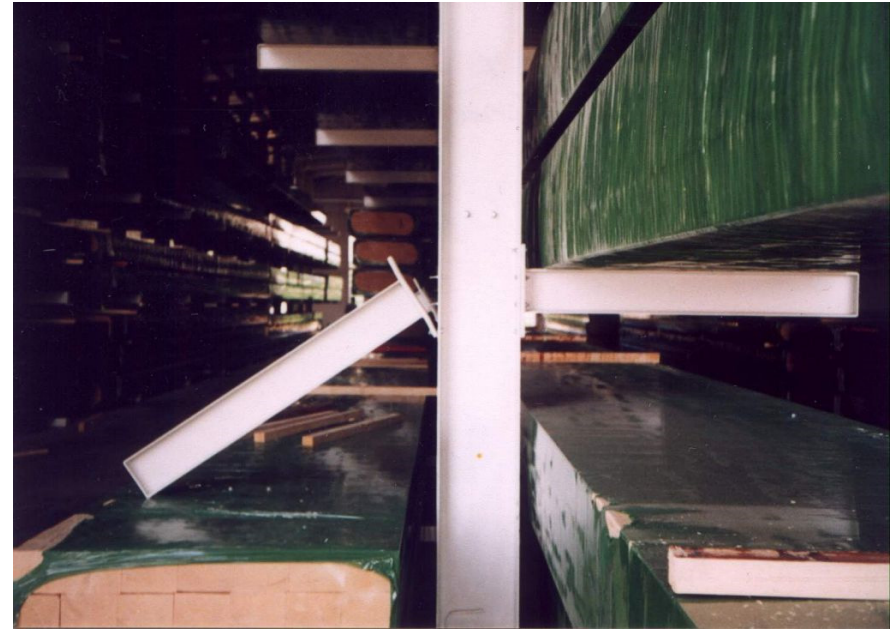
$$RF = \frac{E}{R} \leq 1$$

$$RF = \frac{R}{E} - 1 \geq 0$$

$$RF = \frac{R}{E} \geq 1$$

$$RF = 1 - \frac{E}{R} \geq 0$$

Nesplnění kterékoliv podmínky spolehlivosti představuje z hlediska spolehlivosti **nepříznivý**, tzn. **poruchový stav**, kdy účinek zatížení E převyšuje velikost odolnosti konstrukce R .



Pravděpodobnost poruchy

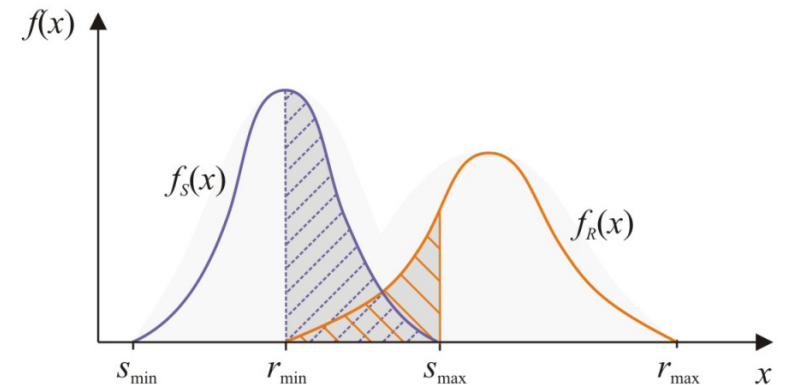
Proměnlivost odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S lze vyjádřit:

- **histogramy**,
- **funkcí hustoty pravděpodobnosti** (PDF): $f_R(x)$, $f_S(x)$,
- **distribuční funkcí** (CDF): $\Phi_{R(x)}$, $\Phi_{S(x)}$.

Vzájemná poloha křivek $f_R(x)$ a $f_S(x)$ charakterizuje a specifikuje oblast, ve které může vznikat porucha, a současně umožňuje určit **pravděpodobnost poruchy** P_f , např. jako:

$$P_f = P(RF < 0) = P(R - S < 0) = P(R < S)$$

Vzájemná poloha křivek funkcí hustoty pravděpodobnosti účinku zatížení $f_S(x)$ a odolnosti konstrukce $f_R(x)$



Pravděpodobnost poruchy

Porucha nastane, jeli splněna např. podmínka:

$$P_f = P(RF < 0) = P(R - S < 0) = P(R < S) = \iint_{D_f} f_{R,S}(r, s) dr ds$$

kde D_f je **oblast poruchy** s rezervou spolehlivosti $Z(\mathbf{X}) < 0$ a $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **funkce hustoty pravděpodobnosti pole náhodných veličin** $\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$.

V případě **statistické nezávislosti** odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S lze výraz upravit:

$$P_f = P(RF < 0) = P(R - S < 0) = P(R < S) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r \leq s} f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds$$

Pravděpodobnost poruchy

Existují-li průsečíky funkce hustoty pravděpodobnosti $f_R(x)$ s osou x s hodnotou $x = r_{\min}$ a funkce hustoty pravděpodobnosti $f_S(x)$ s osou x s hodnotou $x = s_{\max}$, pak pro libovolnou hodnotu s :

- **porucha nenastane**

je-li $r_{\min} > s_{\max}$. Pravděpodobnost poruchy je pak $P_f = 0$,

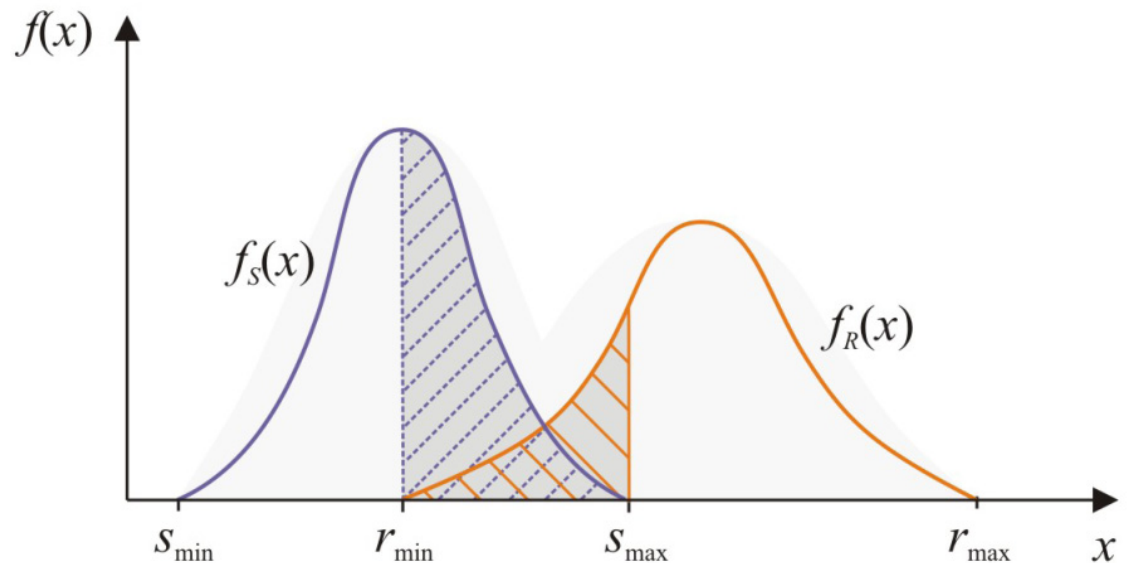
- **porucha může, ale nemusí nastat**

je-li $r_{\min} \leq s \leq s_{\max}$.

Pravděpodobnost poruchy pak pro všechny možné hodnoty s může nabývat velikost $0 \leq P_f \leq 1$,

- **porucha nastane vždy**

je-li $r_{\max} < s_{\min}$. Pravděpodobnost poruchy je pak $P_f = 1$.



Pravděpodobnost poruchy

Pravděpodobnost, že odolnost konstrukce R je menší než daná hodnota x se dá určit i s využitím **distribuční funkce** $\Phi_R(x)$:

$$P(R \leq x) = \Phi_R(x)$$

Pravděpodobnost, že účinek zatížení S se bude nacházet v intervalu $\langle x - dx; x + dx \rangle$ je rovna:

$$P\left(x - \frac{dx}{x} \leq S \leq x + \frac{dx}{x}\right) = f_S(x)$$

Pravděpodobnost současné platnosti obou výrazů je dána součinem $dP_f = f_S(x) \cdot \Phi_R(x) dx$. Pro x z intervalu $(-\infty; \infty)$ je pravděpodobnost poruchy P_f dána integrálem:

$$P_f = P(R - S < 0) = P(R < S) = \int_{-\infty}^{\infty} dP_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) \cdot \Phi_R(x) dx$$

Návrhová pravděpodobnost poruchy

Mírou spolehlivosti konstrukce je v pravděpodobnostním výpočtu **mezní návrhová hodnota pravděpodobnosti poruchy** P_d (dále jen **návrhová pravděpodobnost**) nebo **návrhová hodnota indexu spolehlivosti** β_d .

Konstrukce je **spolehlivá** pokud je splněna **podmínka spolehlivosti**:

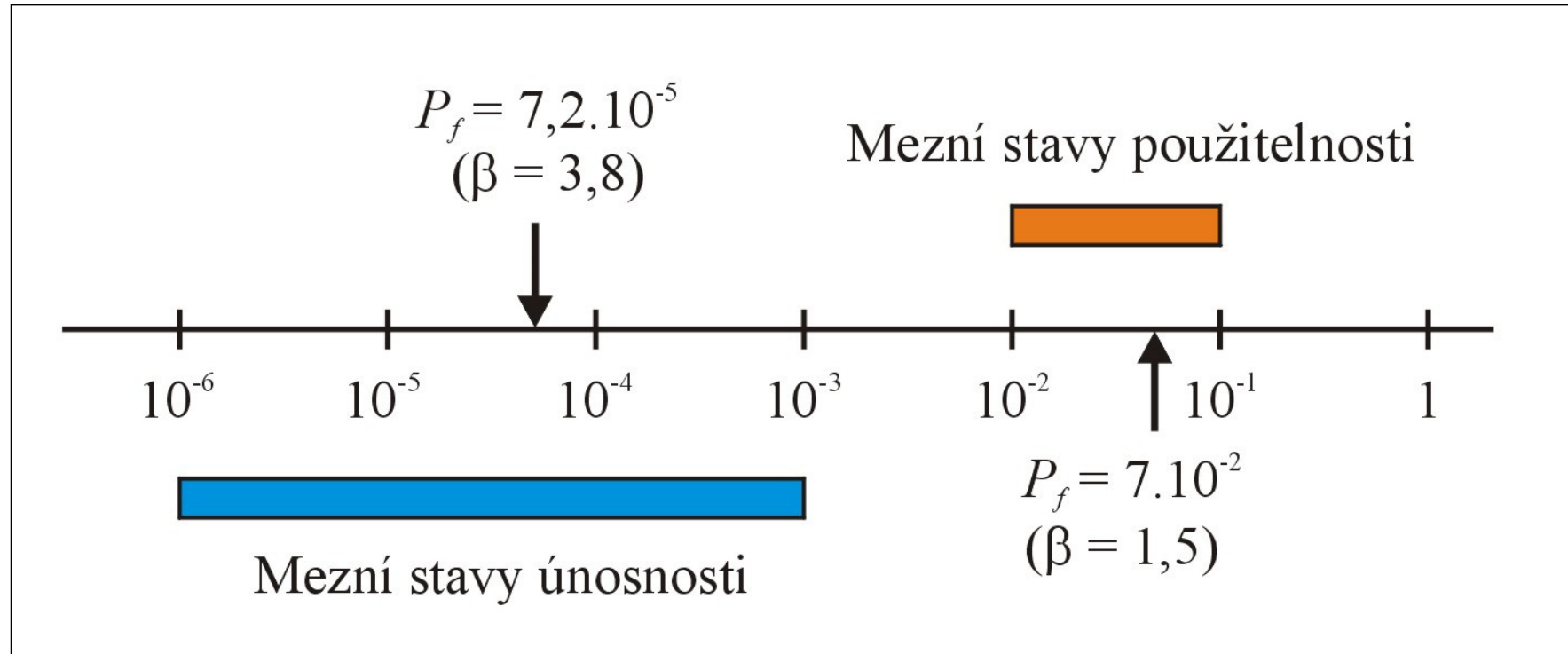
$$P_f \leq P_d$$

$$\beta_d < \beta$$

Návrhová hodnota pravděpodobnosti poruchy P_d (nebo **návrhová hodnota indexu spolehlivosti** β_d) se určuje na základě:

- požadované **úrovně spolehlivosti**,
- typu **mezního stavu**,
- předpokládané **doby životnosti** konstrukce T_d .

Návrhová pravděpodobnost poruchy



Obvyklý rozsah hodnot **pravděpodobnosti poruchy** P_f pro návrhovou životnost 50 let a **mezní stavy únosnosti** a **použitelnosti** (a doporučené hodnoty)

Návrhová pravděpodobnost poruchy

Při **volbě úrovně spolehlivosti** příslušné konstrukce se mají uvážit okolnosti zahrnující:

- možnou **příčinu** a/nebo způsob dosažení mezního stavu,
- možné **následky poruchy** vyjádřené rizikem ztráty života, zraněním a možnými ekonomickými, ekologickými nebo sociálními ztrátami,
- **společenskou závažností poruchy**,
- **náklady a postupy** nutné ke **snížení rizika poruchy**.

Směrné hodnoty návrhových pravděpodobností P_d , resp. **indexu spolehlivosti β_d** podle platných evropských normových předpisů (Eurokódů) jsou uvedeny v následujících tabulkách.

Definice tříd následků podle ČSN EN 1990

<i>Třídy následků</i>	<i>Popis</i>	<i>Příklady pozemních nebo inženýrských staveb</i>
CC3	Velké následky s ohledem na ztráty lidských životů nebo velmi významné následky ekonomické, sociální nebo pro prostředí	Stadióny, budovy určené pro veřejnost, kde jsou následky poruchy vysoké (např. koncertní sály)
CC2	Střední následky s ohledem na ztráty lidských životů nebo značné následky ekonomické, sociální nebo pro prostředí	Obytné a administrativní budovy určené pro veřejnost, kde jsou následky poruchy středně závažné (např. kancelářské budovy)
CC1	Malé následky s ohledem na ztráty lidských životů nebo malé/zanedbatelné následky ekonomické, sociální nebo pro prostředí	Zemědělské budovy, kam lidé běžně nevstupují (např. budovy pro skladovací účely, skleníky)

Návrhová pravděpodobnost

Doporučené minimální hodnoty **indexu spolehlivosti** β a **návrhové pravděpodobnosti** P_d pro **mezní stav únosnosti** podle ČSN EN 1990:

Třída (úroveň) spolehlivosti	Minimální hodnoty β		P_d
	Referenční doba 1 rok	Referenční doba 50 let	
RC3 (velké důsledky)	5,2	4,3	$8,4 \cdot 10^{-6}$
RC2 (střední důsledky)	4,7	3,8	$7,2 \cdot 10^{-5}$
RC1 (malé důsledky)	4,2	3,3	$4,8 \cdot 10^{-4}$

Návrhová pravděpodobnost

Doporučené minimální hodnoty **indexu spolehlivosti** β a **návrhové pravděpodobnosti** P_d pro **mezní stav použitelnosti** podle ČSN EN 1990:

Třída (úroveň) spolehlivosti	Minimální hodnoty β		P_d
	Referenční doba 1 rok	Referenční doba 50 let	
RC2 (střední důsledky)	2,9	1,5	$6,7 \cdot 10^{-2}$

Závislost mezi **pravděpodobností poruchy** P_f a **indexem spolehlivosti** β

P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}
β	1,28	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20

Diferenciace spolehlivosti konstrukcí

Diferenciace spolehlivosti konstrukcí je založena na:

- volbě hodnot **indexů spolehlivosti**,
- úpravě **dílčích součinitelů** pro zatížení nebo vlastností týkajících se odolnosti,
- úrovni **kontroly při navrhování**,
- úrovni **kontroly během provádění**,
- úrovni **inspekce** a dodržování postupů podle projektové dokumentace.

Pro účely **diferenciace spolehlivosti** doporučeny tři třídy následků **CC1** až **CC3** (*consequences classes*).

Index spolehlivosti, pravděpodobnost poruchy

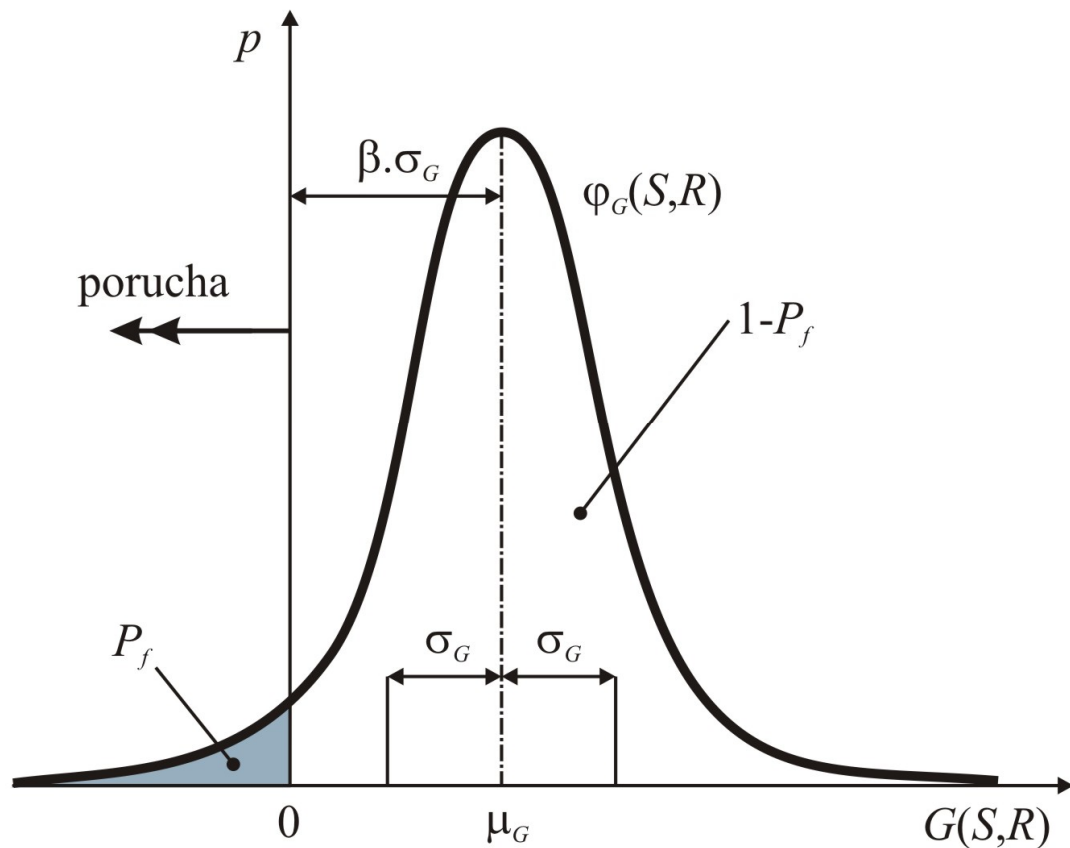
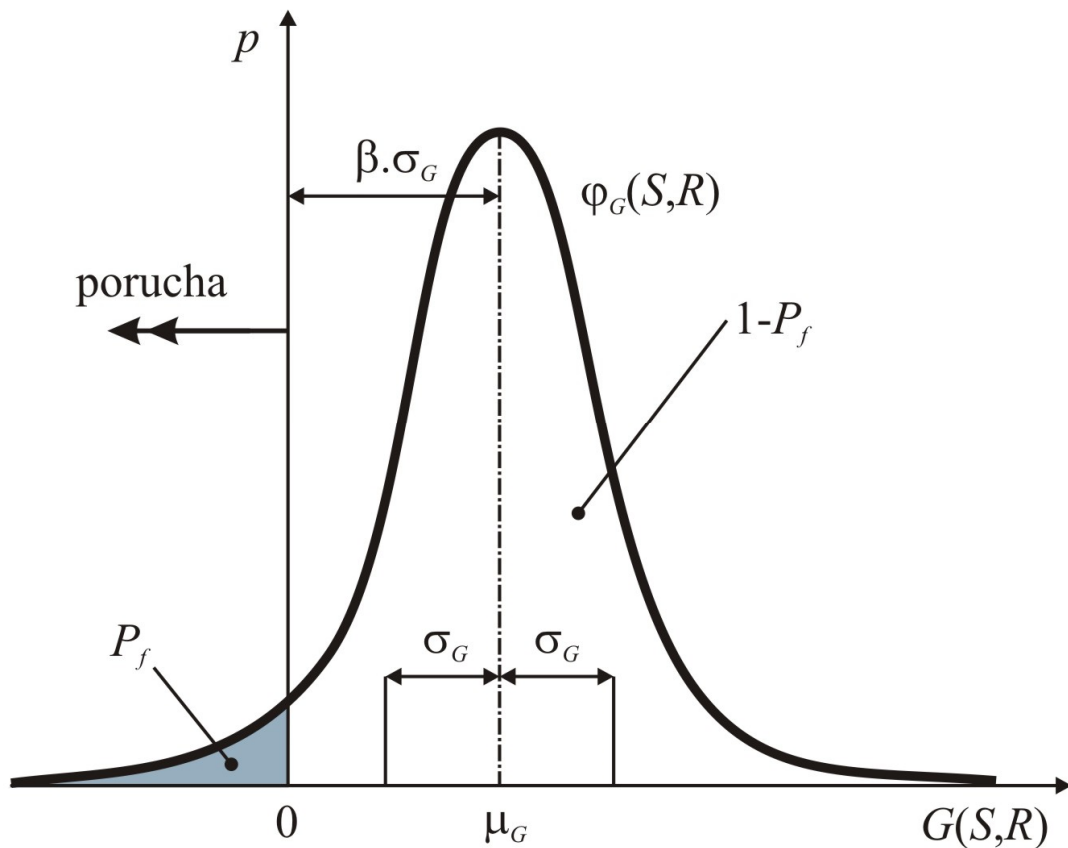


Schéma vychází z definice **funkce spolehlivosti G** při uvážení **normálního rozdělení pravděpodobnosti** odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S .

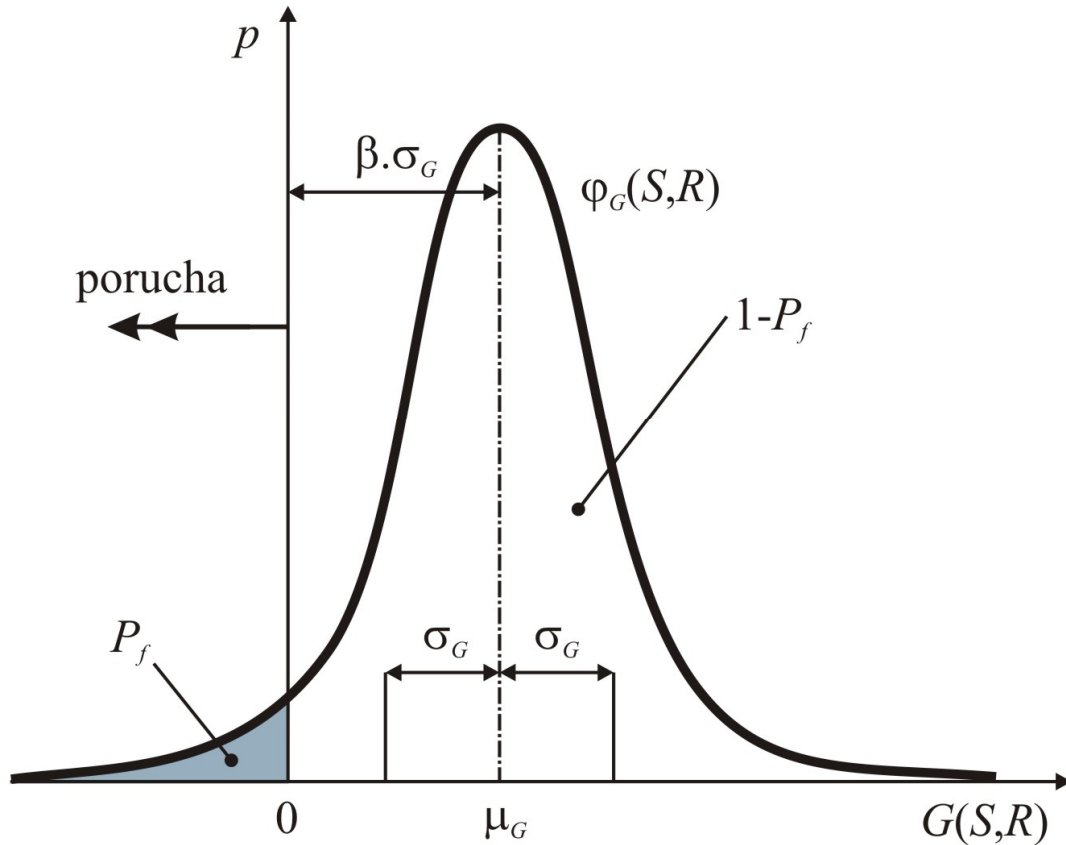
Porucha konstrukce nastává v případě, že $G < 0$.

Index spolehlivosti, pravděpodobnost poruchy



Index spolehlivosti β je pak vyjádřen jako vzdálenost **střední hodnoty** funkce spolehlivosti G od počátku v jednotkách **směrodatné odchylky** σ_G .

Index spolehlivosti



Pro **index spolehlivosti** β pak platí:

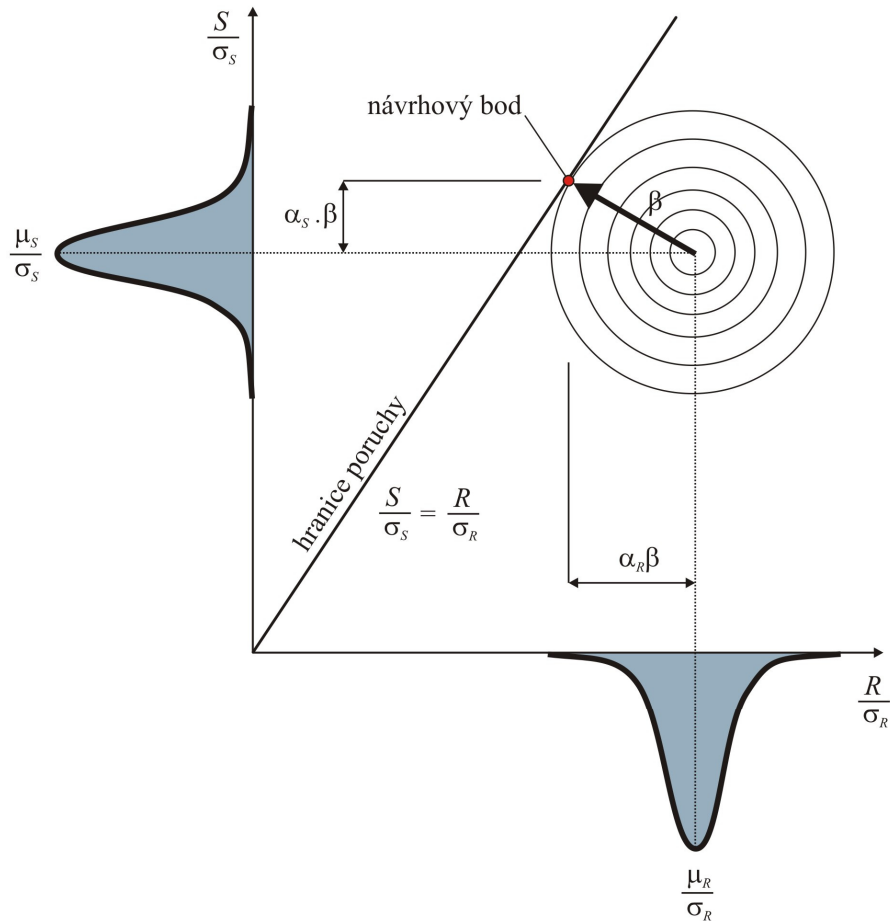
$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G}$$

kde **střední hodnota** μ_G a **směrodatná odchylka** σ_G jsou dány vztahy:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S$$

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}$$

Index spolehlivosti



Grafická interpretace **indexu spolehlivosti** β :

Přímka určující poruchovou oblast je definována vztahem:

$$\mu_G - \beta \cdot \sigma_G = 0$$

Veličiny $\alpha_{R,S}$ představují **separační součinitele** náhodné proměnné S od R a naopak.

Index spolehlivosti β se váže k tzv. **návrhovému bodu** (*design point*):

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \geq \beta_d$$

Užitečné převodní vztahy

Přímý vztah mezi **indexem spolehlivosti** β a **pravděpodobností poruchy** P_f :

$$P_f = \Phi(-\beta) \qquad P_d = \Phi(-\beta_d)$$

kde Φ označuje **distribuční funkci normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti** ($\mu_N = 0, \sigma_N = 1$), resp.

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \qquad \beta_d = -\Phi^{-1}(P_d)$$

kde Φ^{-1} je **inverzní distribuční funkce normovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti** pro pravděpodobnost poruchy P_f , resp. P_d .

Závislost mezi pravděpodobností poruchy P_f a indexem spolehlivosti β (EN 1990)

P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}
β	1,28	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20

Užitečné aproximační vztahy

Aproximační vztahy pro výpočet **pravděpodobnosti poruchy** P_f a **indexu spolehlivosti** β pro interval $10^{-7} \leq P_d \leq 10^{-1}$:

$$P_f \approx 10^{-0,1981 \cdot (-\beta - 0,605)^2 - 0,297}$$

$$\beta \approx -0,605 + \sqrt{-\frac{\log P_f}{0,198} - 1,5}$$

Příklad: Návrhová hodnota indexu spolehlivosti β_d pro třídu spolehlivosti RC2 a návrhovou životnost 50 let je rovna hodnotě 3,8. Tutéž hodnotu lze získat dosažením návrhové pravděpodobnosti $P_d = 7,2 \cdot 10^{-5}$ téže třídy spolehlivosti RC2 do aproximačního nebo převodního vztahu:

$$\beta_d \approx -0,605 + \sqrt{-\frac{\log(7,2 \cdot 10^{-5})}{0,198} - 1,5} \cong 3,802104 \approx 3,8$$

$$\beta_d = -\Phi^{-1}(7,2 \cdot 10^{-5}) \cong 3,801195 \approx 3,8$$

Lze využít funkci
z tabulkového procesoru
Excel **NORMSINV**

Užitečné aproximační vztahy

Příklad:

Hodnotu návrhové pravděpodobnosti P_d lze naopak určit dosazením návrhové hodnoty indexu spolehlivosti $\beta_d = 3,8$ (třída spolehlivosti RC2 s návrhovou životností 50 let) do aproximačního či převodního vztahu:

$$P_d \approx 10^{-0,1981 \cdot (-3,8 - 0,605)^2 - 0,297} \cong 7,228741 \cdot 10^{-5} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$$

Lze využít funkci z tabulkového procesoru Excel **NORMSDIST**.

$$P_d = \Phi(-3,8) = 7,234804 \cdot 10^{-5} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$$

Návrhová životnost konstrukce

Při stanovení hodnoty **návrhové pravděpodobnosti** P_d lze brát v úvahu i **návrhovou životnost konstrukce**, tedy předpokládanou dobu, po kterou má být konstrukce nebo její část používána při běžné údržbě pro stanovený účel, avšak bez nutnosti zásadnější opravy.

Lze definovat 5 informativních **kategorií návrhové životnosti** a orientační hodnoty životnosti konstrukcí v letech, včetně příkladů staveb podle doporučení národní přílohy ČSN EN 1990.

Návrhová životnost konstrukce

Kategorie návrhové životnosti	Informativní návrhová životnost T_d (v letech)	Příklady
1	10	Dočasné konstrukce
2	10 to 20	Vyměnitelné konstrukční části, např. jeřábové nosníky, ložiska
3	25 to 50	Zemědělské a obdobné stavby
4	80	Budovy a další běžné stavby
5	100	Monumentální stavby, mosty a jiné inženýrské konstrukce

Informativní návrhové životnosti podle ČSN EN 1990.

Návrhová životnost konstrukce

Pro konstrukce s jinou **návrhovou životností** T_{dx} než je referenční návrhová životnost T_d lze určit **návrhovou pravděpodobnost** P_{dx} pomocí vzorce:

$$P_{dx} = 1 - (1 - P_d)^{\frac{T_{dx}}{T_d}},$$

kde P_d je návrhová pravděpodobnost pro návrhovou dobu životnosti T_d a P_{dx} je návrhová pravděpodobnost v čase $T_{dx} \leq T_d$.

Upozornění: Pravděpodobnost poruchy je **časově závislá funkce** $P_f(t)$.