

Téma 8:
Metoda POPV / DOProC
**(Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet /
Direct Optimized Probabilistic Calculation)**

- Teoretické pozadí
- Optimalizační techniky
- Programový systém ProbCalc
- Řešené příklady

Výpočet pravděpodobnosti poruchy

Analýza spolehlivosti vede k odhadu pravděpodobnosti poruchy:

$$P_f = \int_{D_f} f(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1, dX_2, \dots, dX_n$$

kde D_f je **oblast poruchy** a $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ **funkce poruchy** n **náhodných proměnných** X_1, X_2, \dots, X_n definovaných jejich rozdělením pravděpodobnosti.

Určení pravděpodobnosti poruchy P_f na základě explicitního výpočtu integrálu bývá velice obtížné.

Pravděpodobnostní metody

Simulační metody

Prostá simulace Monte Carlo,

Stratifikované simulační techniky:

- Latin Hypercube Sampling – LHS,
- Stratified Sampling – SC.

Pokročilé simulační metody:

- Importance Sampling – IS,
- Adaptive Sampling – AS,
- Axis Orthogonal Importance Sampling,
- Directional Sampling – DS,
- Line Sampling – LS,
- Design Point Sampling,
- Subset Simulations,
- Descriptive Sampling,
- Slice Sampling.

Aproximační metody

- First (Second) Order Reliability Method - FORM (SORM),
- Response Surface Method – RSM,
- Perturbační techniky – např. Stochastic Finite Element Method (SFEM),
- Artificial Neural Network – ANN.

Numerické metody

(bez simulací a aproximací)

- Point Estimate Method – PEM,
- **Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet – POPV (Direct Optimized Probabilistic Calculation – DOProC).**

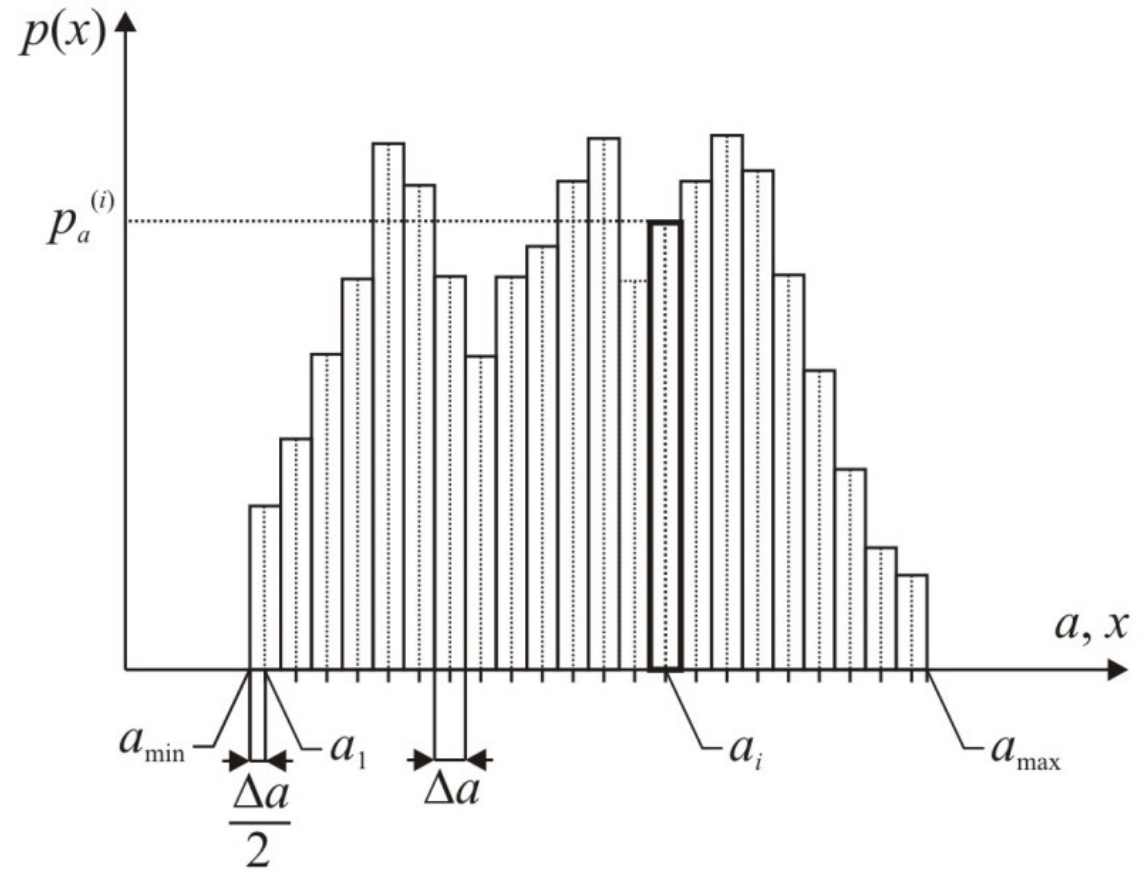
Přehled např. Krejsa & Králik (2015)

Základní charakteristika metody POPV

- Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet – POPV, je v řadě případů efektivní způsob pro **pravděpodobnostní posouzení spolehlivosti konstrukcí** a/nebo pro jiné **pravděpodobnostní výpočty**.
- Vstupní náhodné proměnné (zatížení, geometrie, materiálové charakteristiky, imperfekce) mohou být vyjádřeny **empirickým (neparametrickým)** nebo **parametrickým rozdělením pravděpodobnosti** pomocí histogramů.
- Analyzovaná funkce spolehlivosti může být popsána analyticky v textovém módu nebo numericky s využitím DLL knihovny.
- Výsledek zatížen pouze numerickou chybou a chybou plynoucí z diskretizace vstupních a výstupních veličin.
- Počet intervalů v histogramech je velmi důležitý pro výsledný počet numerických operací a předpokládaný strojový čas výpočtu.
- Počet numerických operací lze při zachování korektnosti řešení výrazně snížit – s využitím **optimalizačních technik** a postupů.

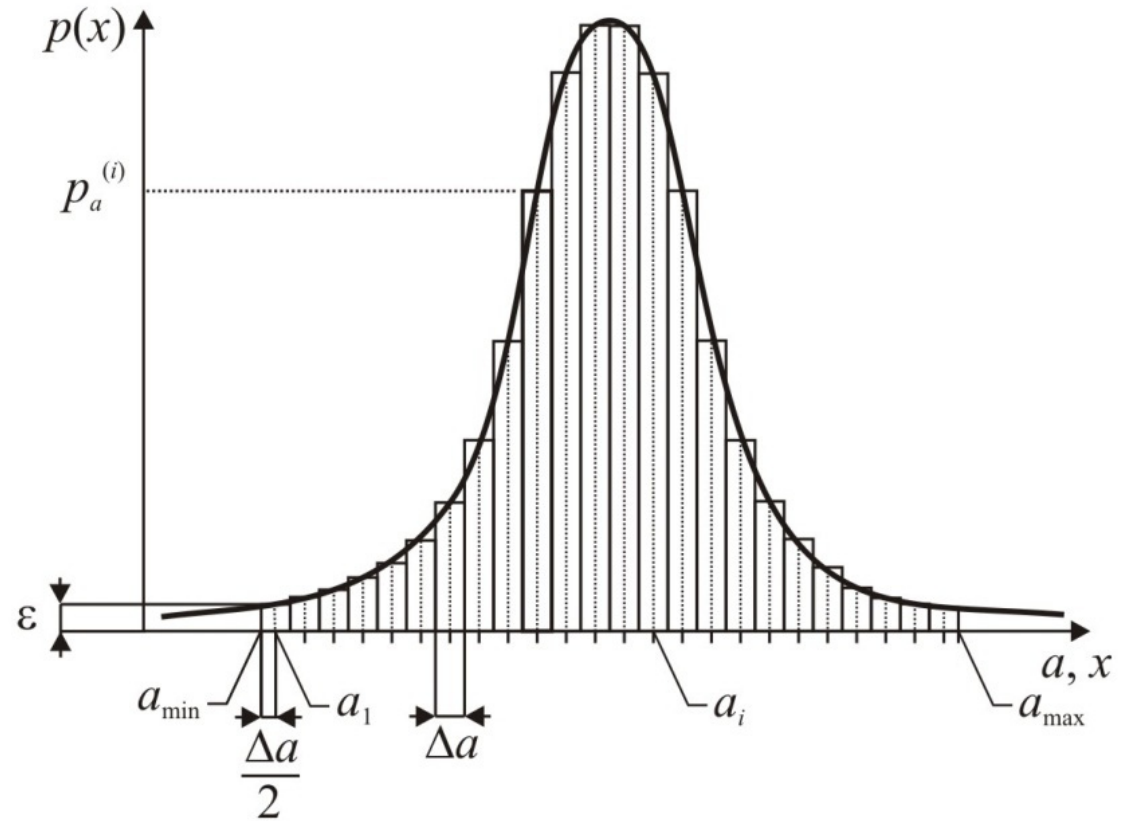
Histogram náhodné proměnné

Histogram spojité náhodné veličiny s diskretní (**discrete**) aproximací **neparametrického** (empirického) **rozdělení pravděpodobnosti**



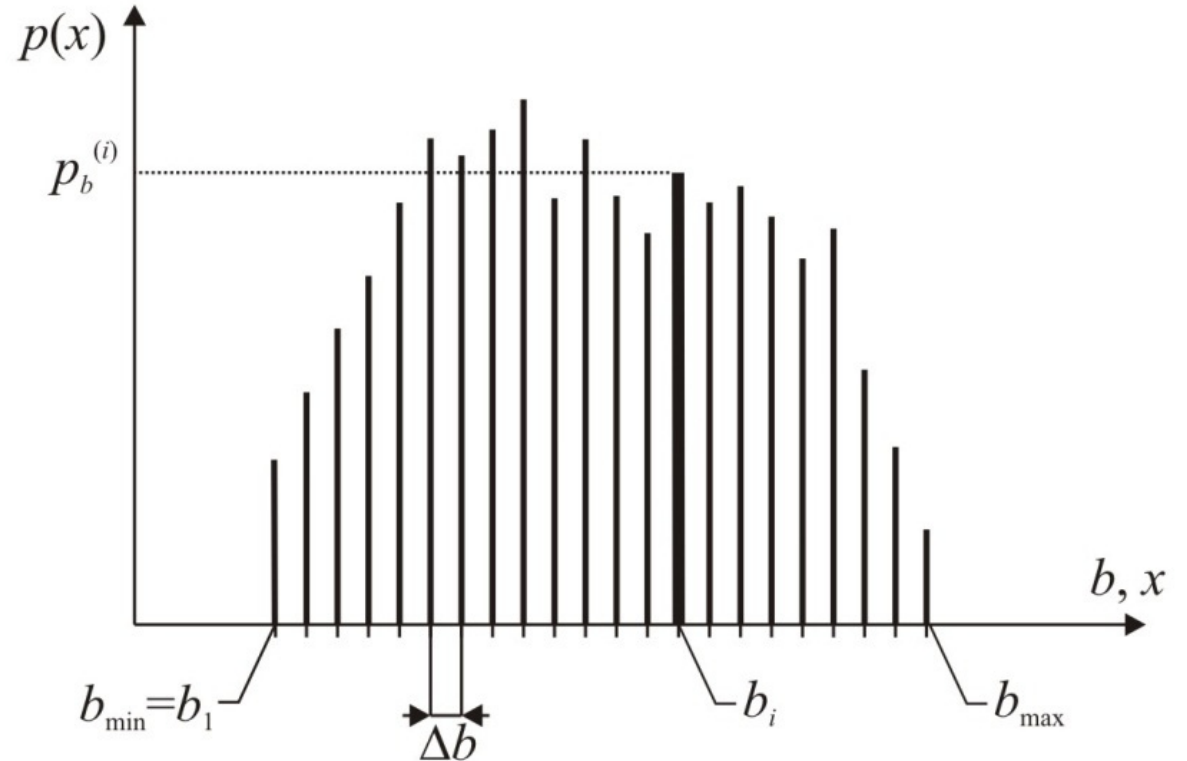
Histogram náhodné proměnné

Histogram spojité náhodné veličiny s diskretní (**discrete**) aproximací omezeného parametrického rozdělení pravděpodobnosti



Histogram náhodné proměnné

Histogram diskrétní náhodné veličiny s čistě diskrétní (**pure discrete**) aproximací **neparametrického** (empirického) **rozdělení pravděpodobnosti**



Struktura datového souboru / Definice histogramu

Textový soubor s příponou ***.dis** (distribution), který obsahuje údaje v následujícím tvaru:

[Description] (1. oddíl datového souboru)

Identification= volitelný popis datového souboru

Type= Pure Discrete | Discrete | Continuous (typ aproximace)

[Parameters] (2. oddíl datového souboru)

Min= minimální hodnota náhodné proměnné

Max= maximální hodnota náhodné proměnné

Bins= celkový počet intervalů (tříd)

Total= součet četností ve všech intervalech

[Bins] (3. oddíl datového souboru)

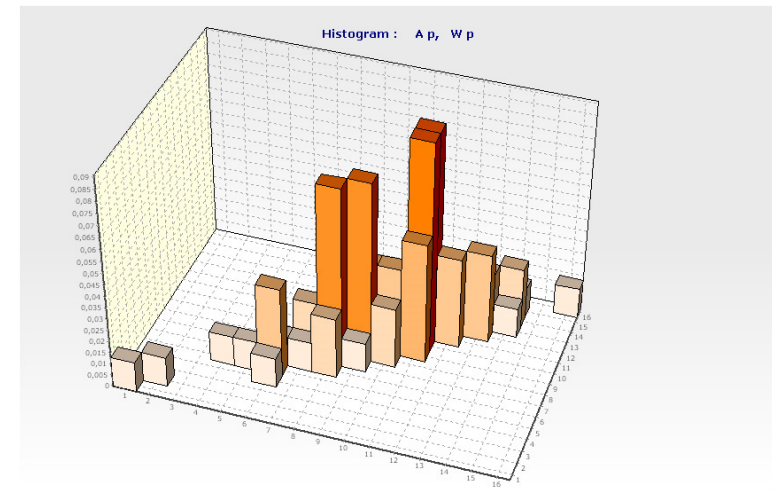
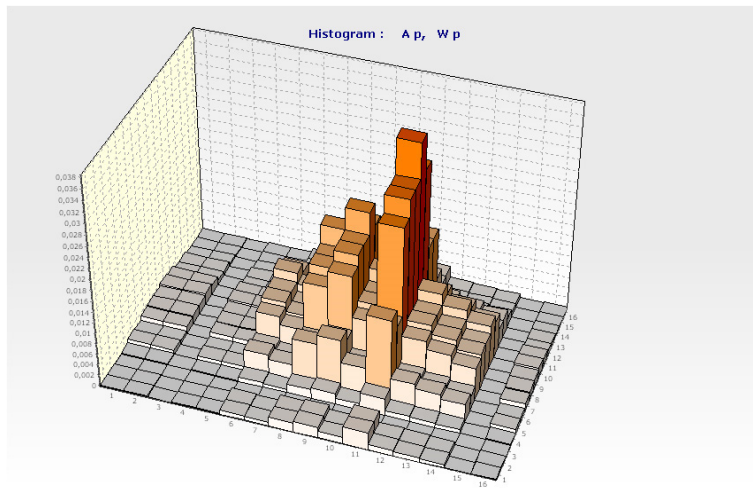
četnost v 1. intervalu

četnost ve 2. intervalu

atd. ...

Statistická závislost vstupních náhodných veličin

- Některé vstupní proměnné mohou být **statisticky závislé** (korelované), např. průřezové charakteristiky, materiálové a pevnostní vlastnosti atd.
- Statisticky závislé náhodné veličiny mohou být zadávány do pravděpodobnostního výpočtu pomocí **dvojných** nebo **trojných histogramů**.



Pracovní plocha programu HistAn2D: dvojný histogram dvou statisticky nezávislých (vlevo) a závislých (vpravo) náhodných proměnných

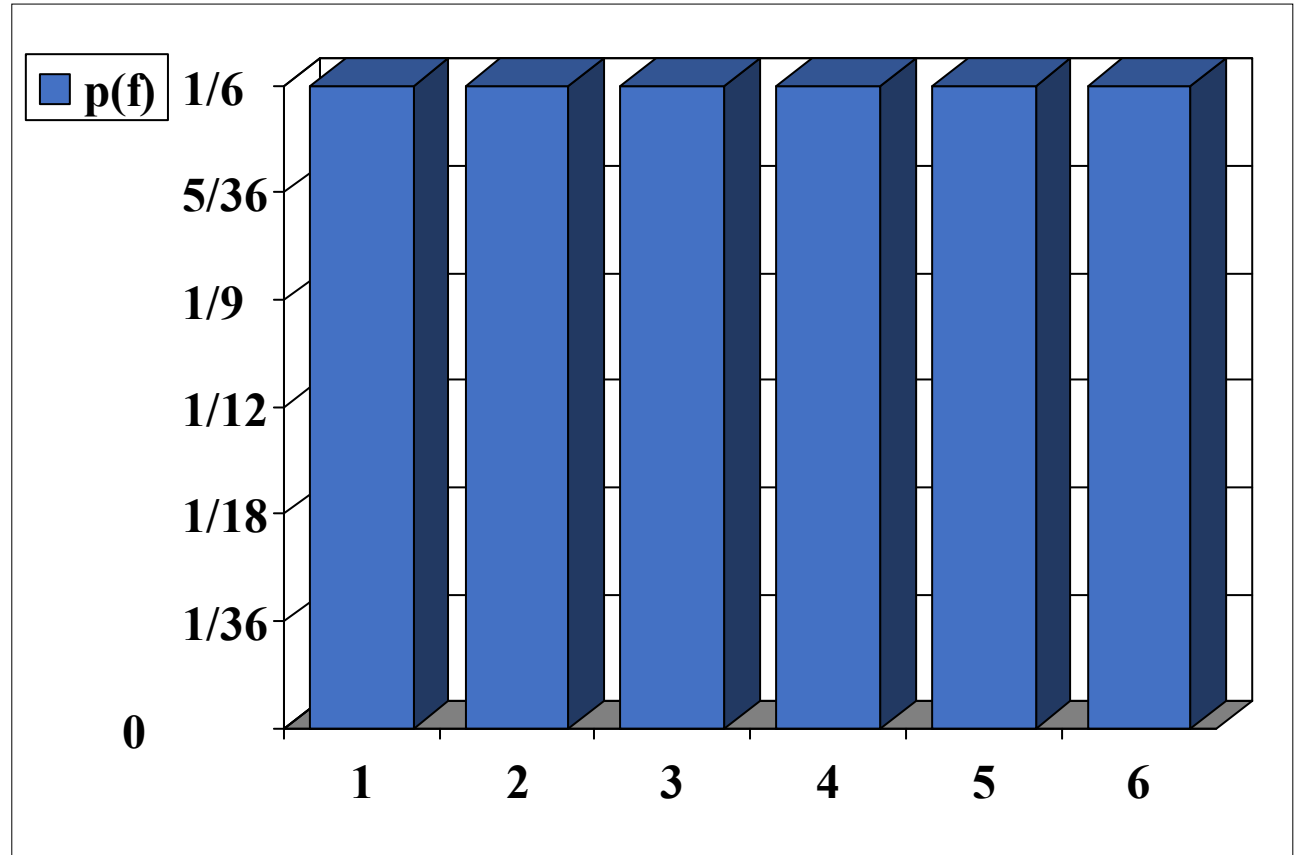
Pravděpodobnost výskytu čísla při hodu hrací kostkou

Hod hrací kostkou – všechna čísla mají stejnou pravděpodobnost.



$$p_1 = \frac{1}{n}$$

$$p_1 = \frac{1}{6}$$



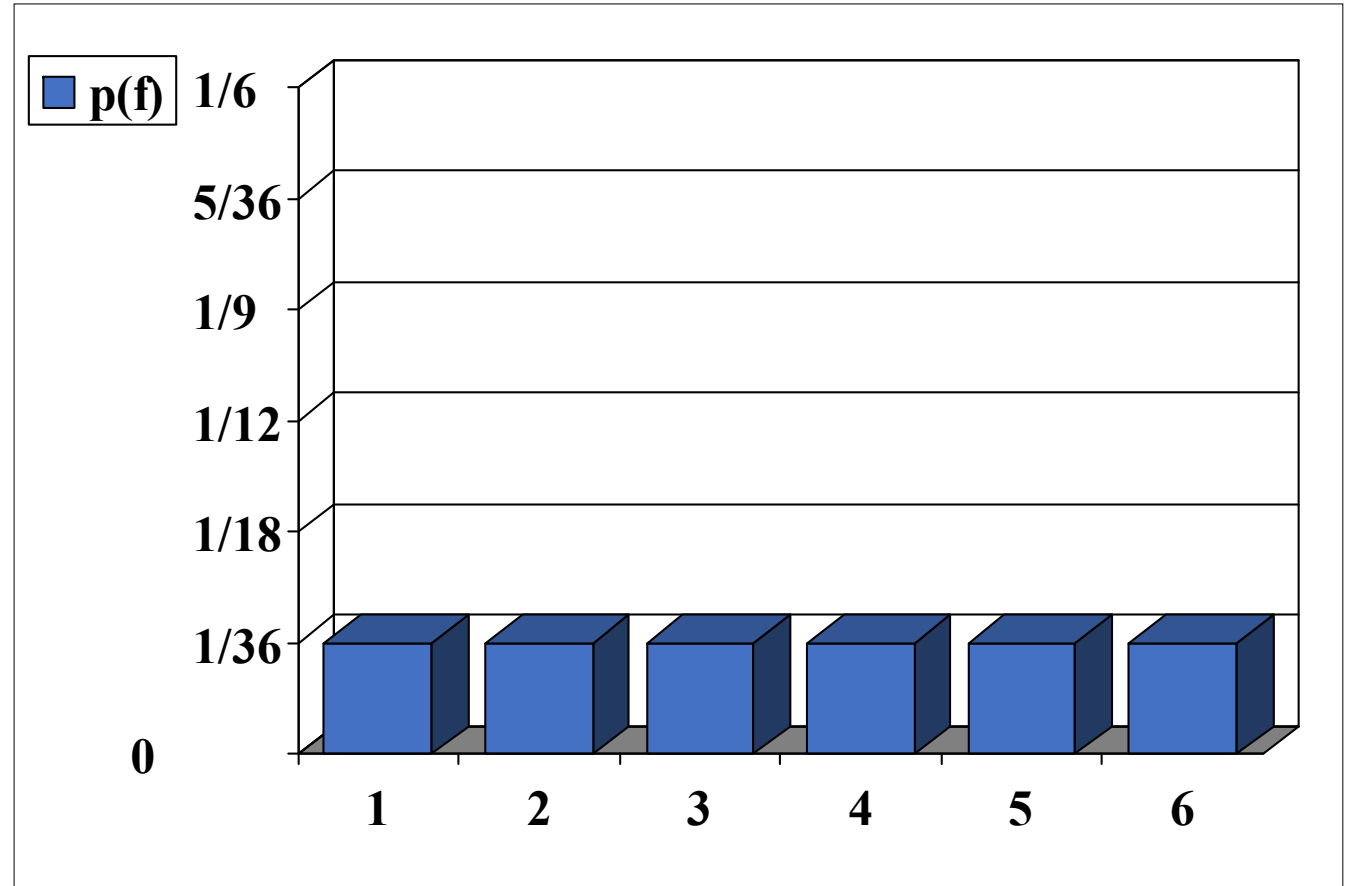
Statistika hodů dvěma kostkami

Pravděpodobnost stejných čísel získaných při hodu **dvou hracích kostek**.



$$p = p_1 \cdot p_2$$

$$p_1 = \frac{1}{36}$$



Statistika hodů dvěma kostkami

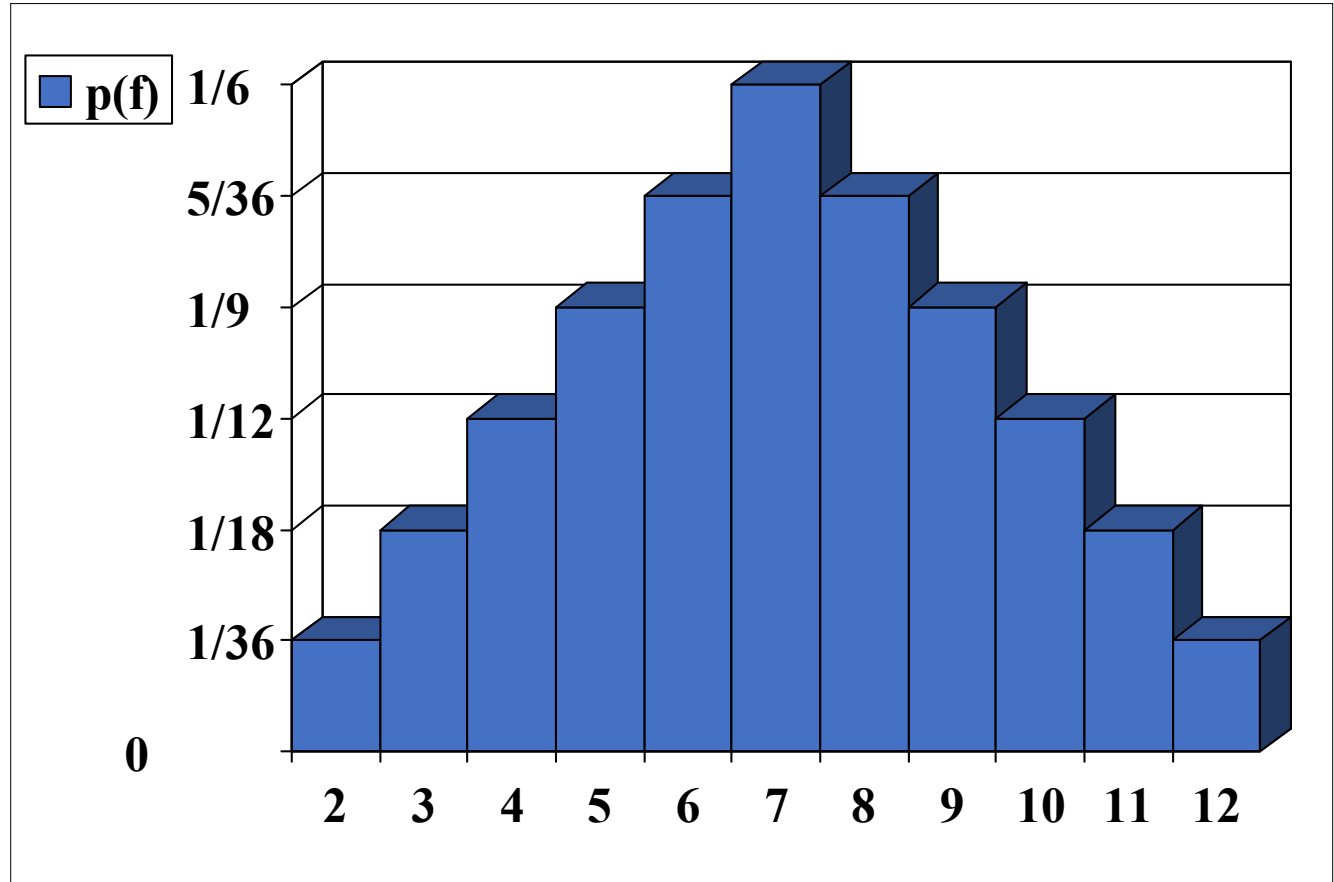
Součet čísel při hodu **dvou hracích kostek**.



$$p(2) = \frac{1}{36}$$

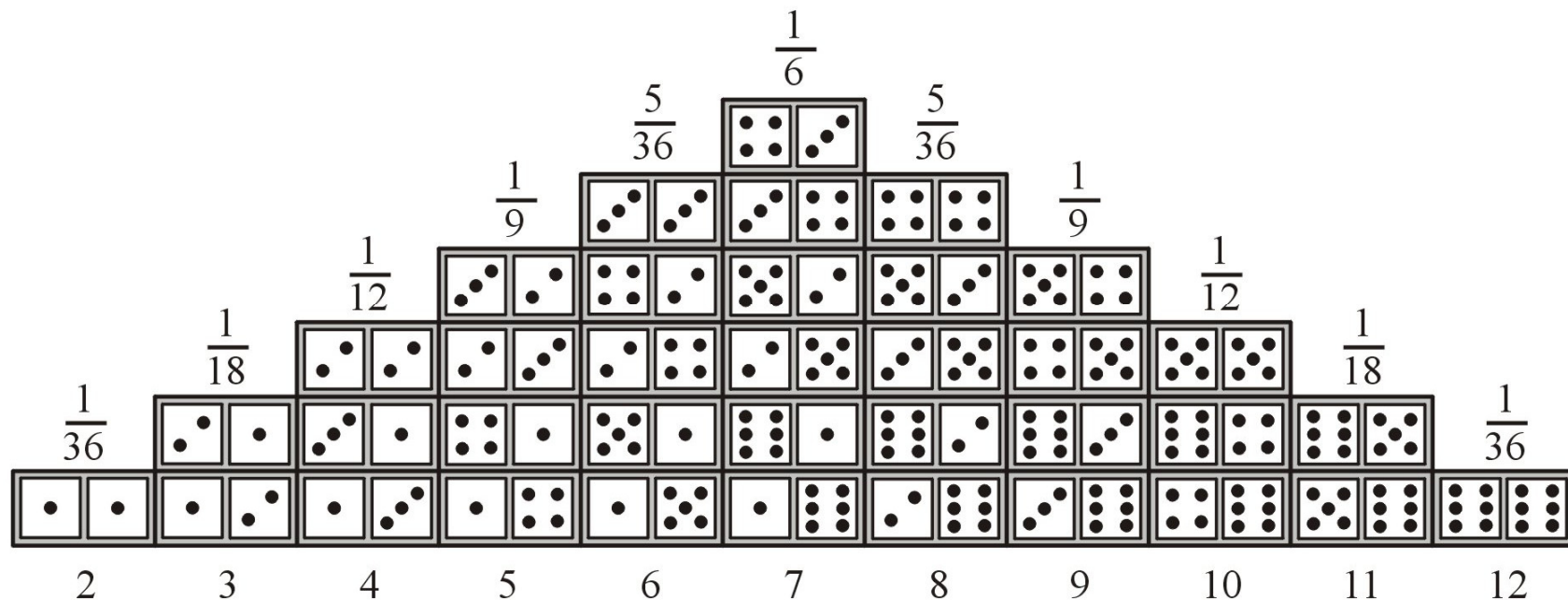
$$p(3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$p(4) = \dots$$

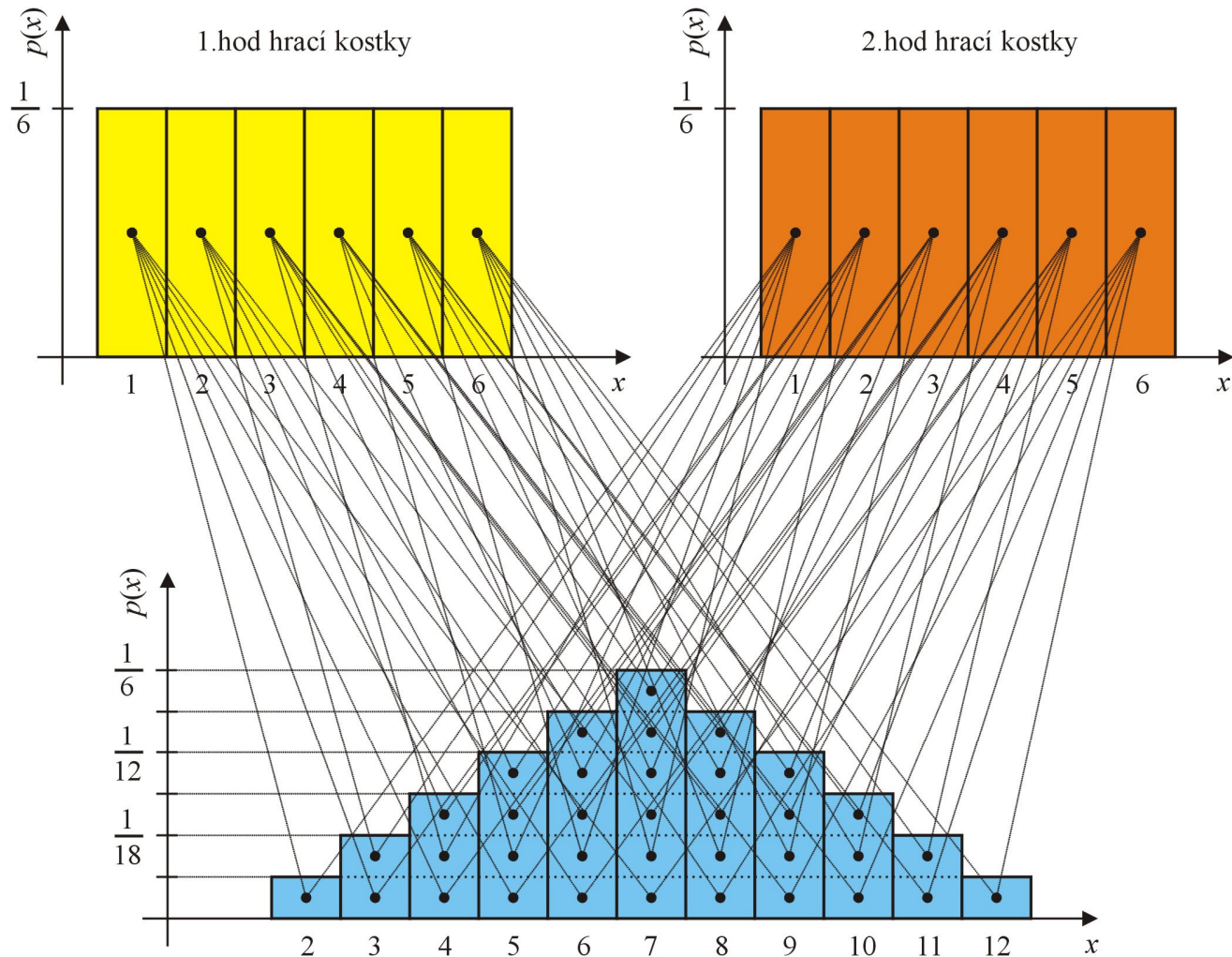


Statistika hodů dvěma kostkami

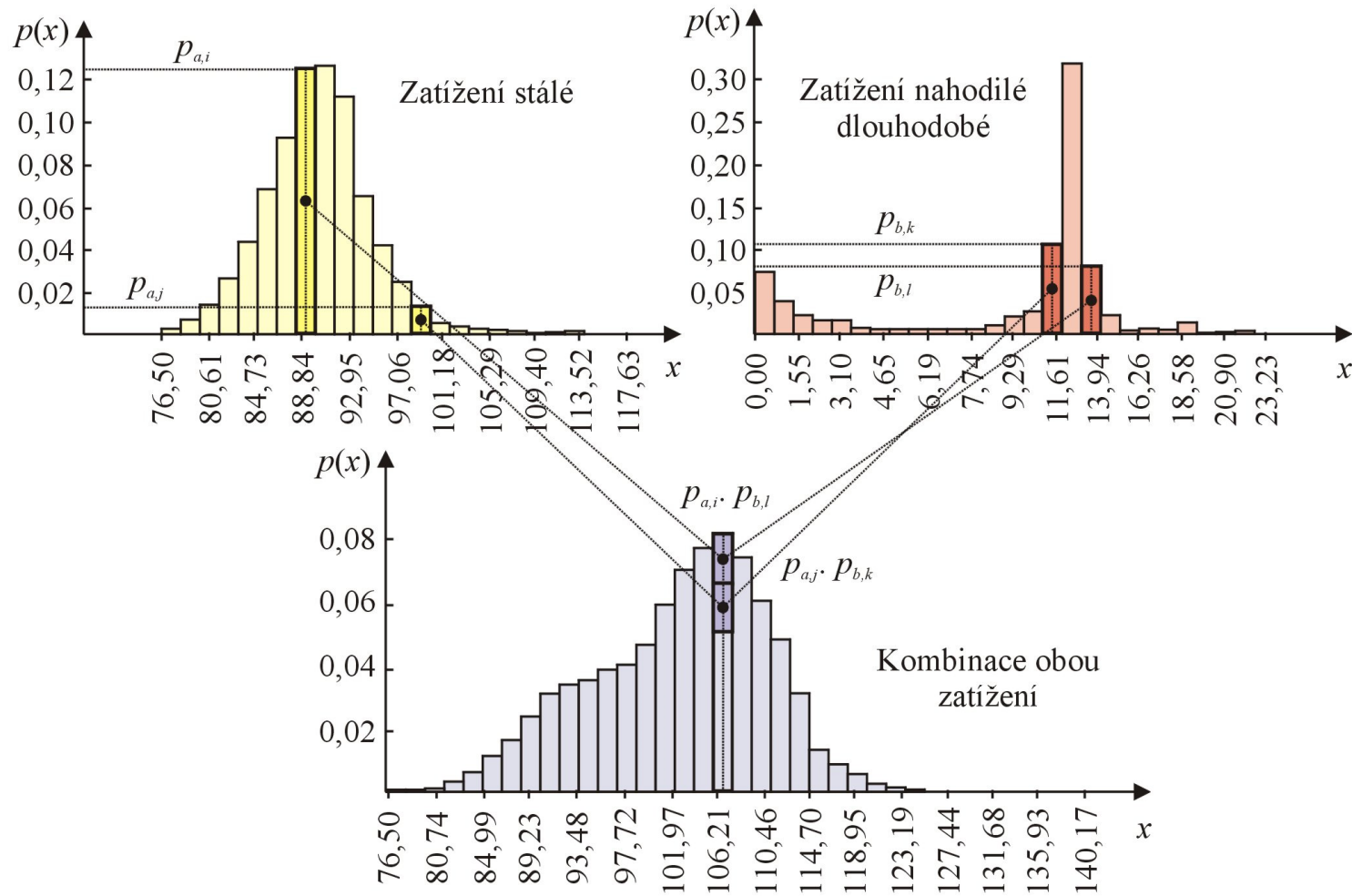
Různé možnosti pro **sčítání čísel při hodu dvou hracích kostek**. Výsledky nejsou stejně pravděpodobné, neboť u některých je více způsobů, jak součet získat.



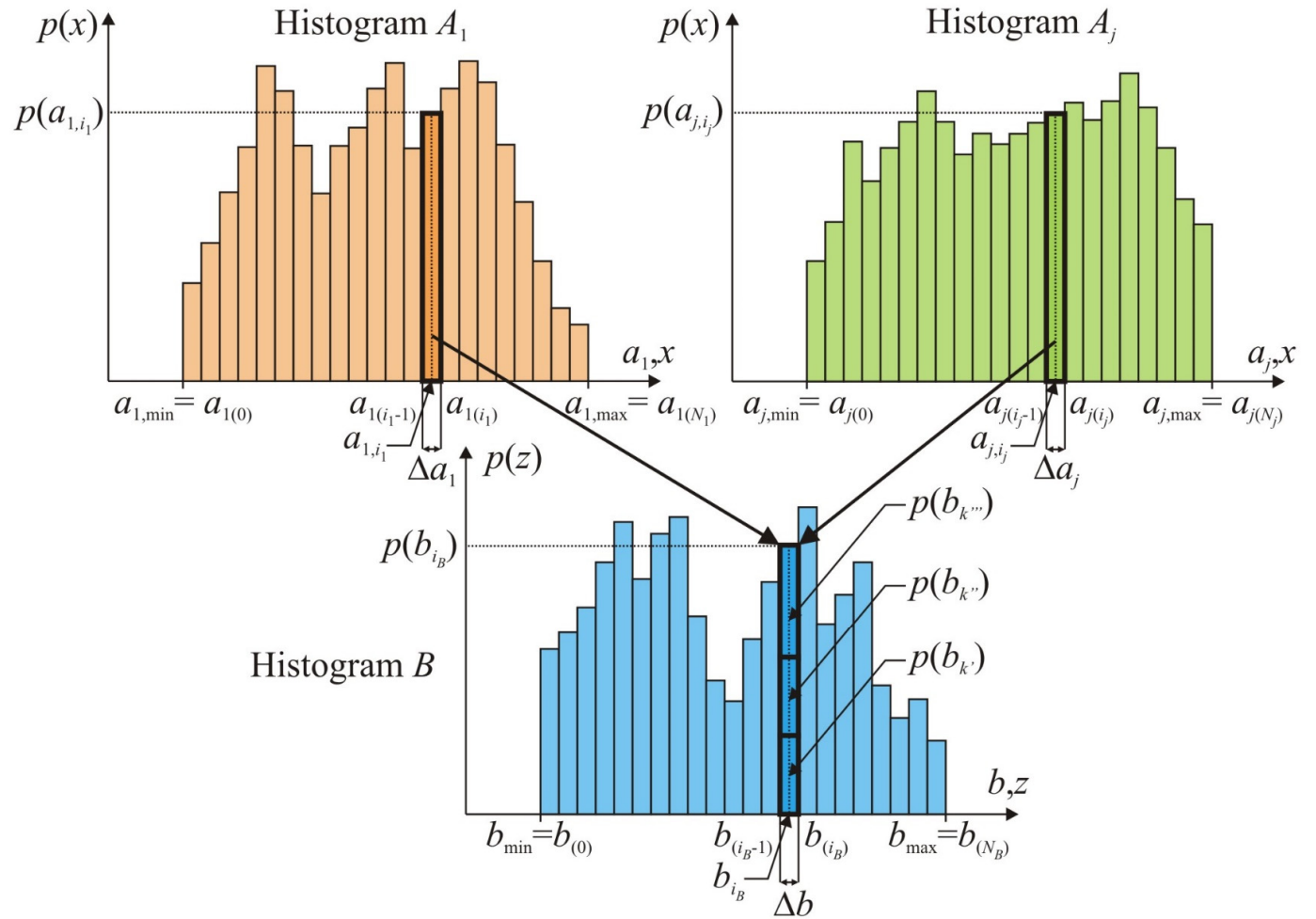
Princip numerického výpočtu



Numerický výpočet kombinace dvou zatížení



Základní výpočetní algoritmus metody POPV



$$B = f(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$$

Statistika hodů dvěma kostkami

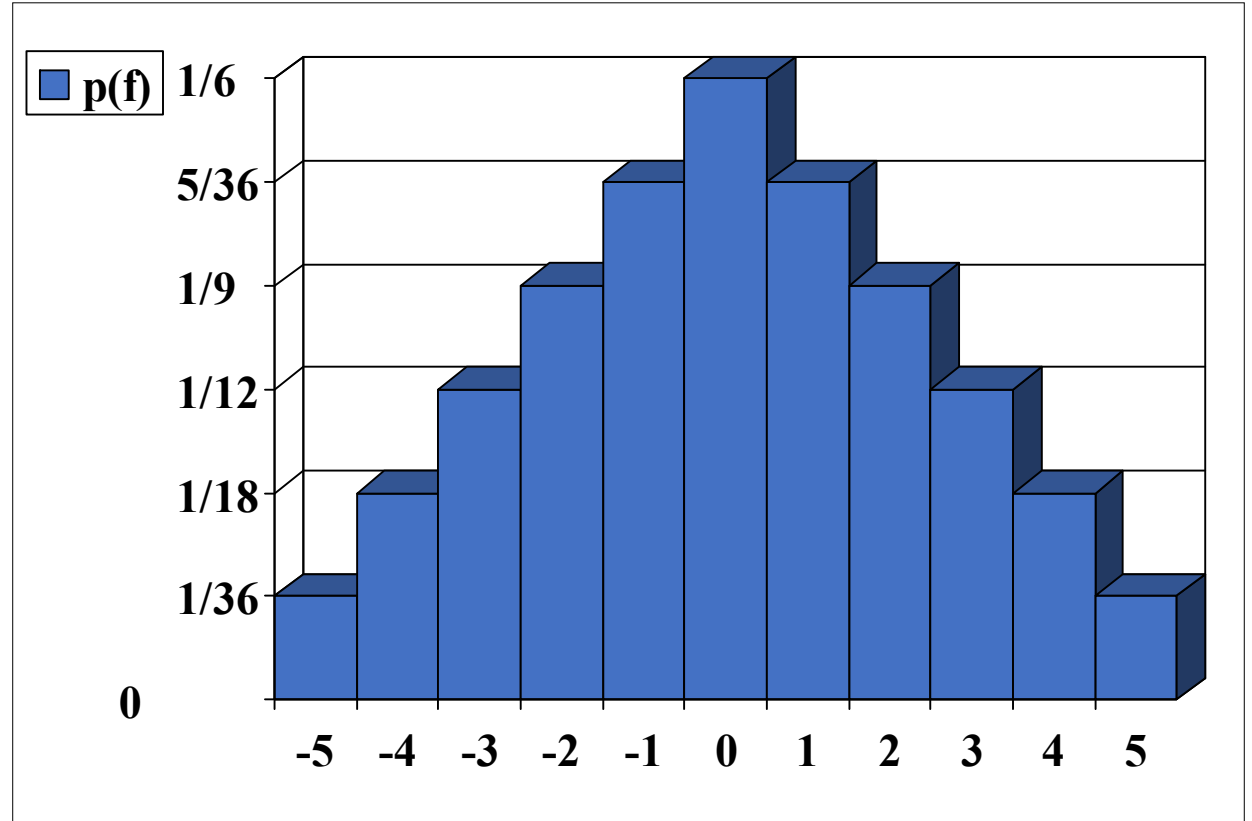
Různé možnosti pro **rozdíl čísel při hodu dvou hracích kostek**. Výsledky nejsou stejně pravděpodobné, neboť u některých je více způsobů, jak rozdíl získat.



$$p(5) = \frac{1}{36}$$

$$p(4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$p(3) = \dots$$



Statistika hodů dvěma kostkami

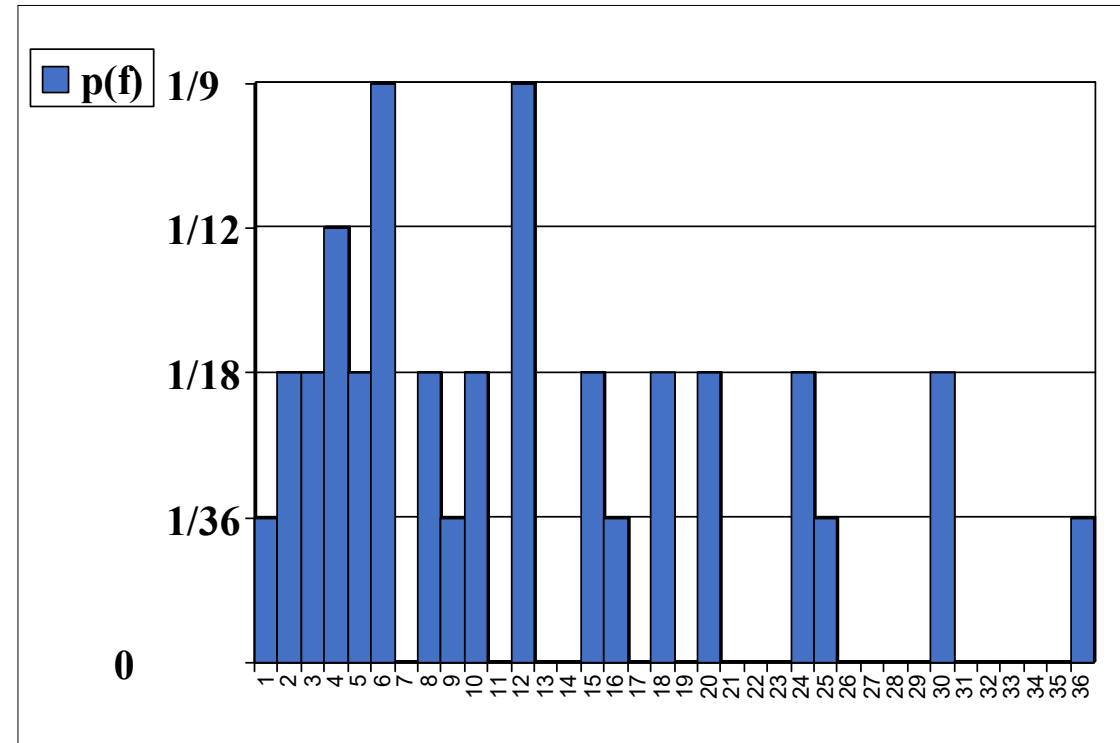
Různé možnosti pro **součin čísel při hodu dvou hracích kostek**. Výsledky nejsou stejně pravděpodobné, neboť u některých je více způsobů, jak součin získat. Některé hodnoty naopak nelze získat vůbec.



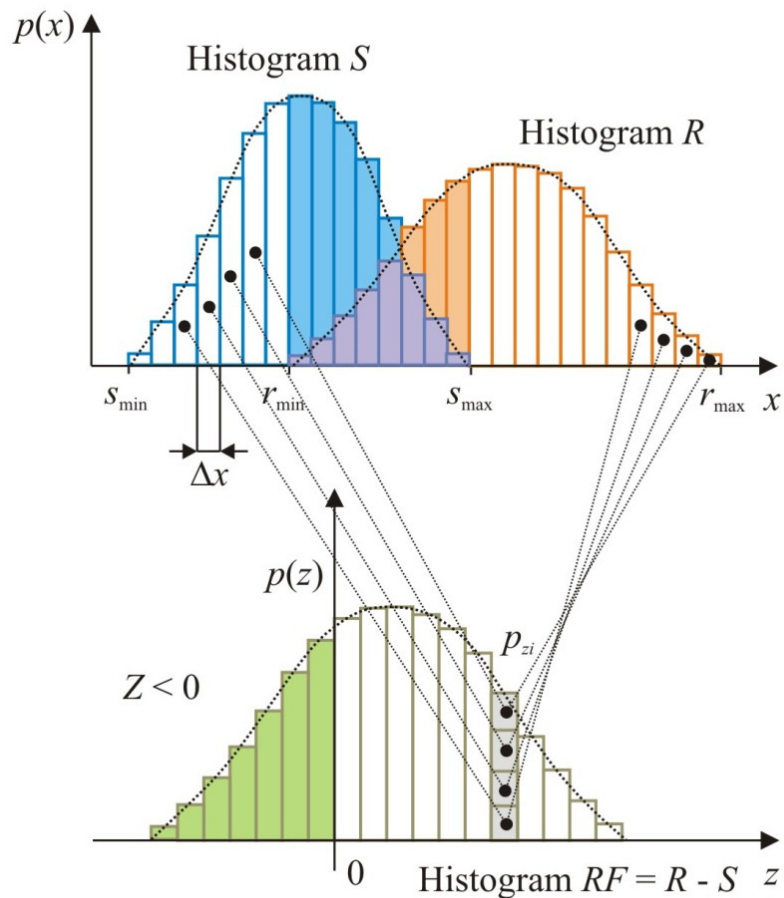
$$p(1) = \frac{1}{36}$$

$$p(2) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$p(3) = \dots$$



Princip numerického výpočtu



Výsledný histogram Z se určuje ze všech kombinací dvojic hodnot S_i a R_i .

Pravděpodobnost poruchy P_f odpovídá pravděpodobnosti $P_f = P(Z < 0)$.

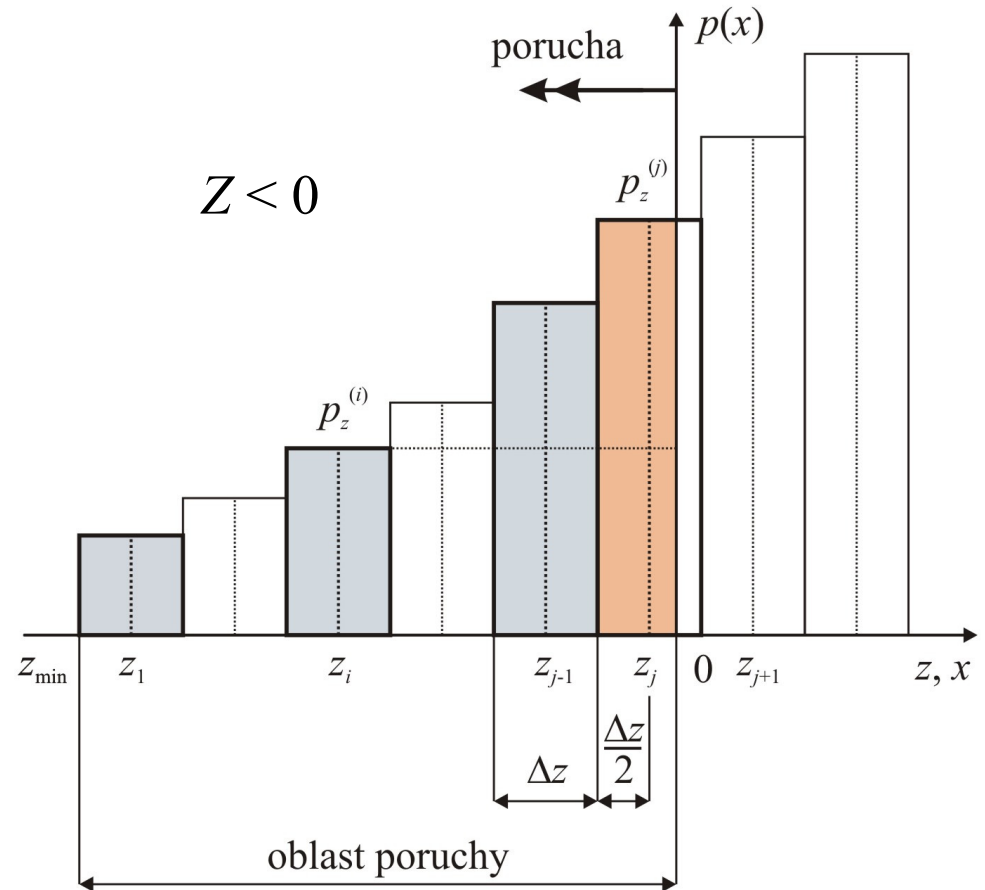
Tento přístup byl v metodě POPV aplikován prvotně, výpočet probíhá podobně jako u metody Monte Carlo.

Numerický výpočet pravděpodobnosti poruchy

Schéma výpočtu **pravděpodobnosti poruchy** P_f s využitím useknutého histogramu **funkce spolehlivosti** Z .

Histogram Z obsahuje n intervalů s šířkou Δz .

$$P_f = \sum_{i=1}^{j-1} p_z^{(i)} + p_z^{(j)} \cdot \left(1 - \frac{z_j + \frac{\Delta z}{2}}{\Delta z}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{j-1} p_z^{(i)} + p_z^{(j)} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z_j}{\Delta z}\right)$$



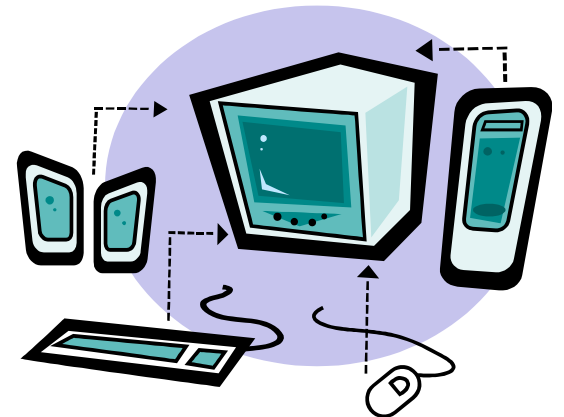
Základní výpočetní algoritmus

Výpočetní náročnost je u základního výpočetního algoritmu metody POPV dána zejména:

- Počtem **náhodných vstupních veličin** $i = 1 \dots N$,
- **Počtem intervalů** n_i histogramu každé náhodné vstupní veličiny,
- **Náročností řešené úlohy** (výpočetního modelu),
- **Algoritmem pravděpodobnostního výpočtu** (způsobem, jakým je výpočetní model nadefinován):
 - v textovém režimu,
 - ve strojovém kódu (dynamická knihovna DLL).

Optimalizační techniky v metodě POPV

- **Grupování vstupních náhodných veličin**, které lze vyjádřit jedním společným histogramem.
- **Intervalová optimalizace** - snižování počtu intervalů u histogramů vstupních náhodných veličin (citlivostní analýza).
- **Zónová optimalizace** - každý histogram je rozdělen do zón podle jejich podílu na výsledné pravděpodobnosti poruchy.
- **Trendová optimalizace** – využití vhodného směru (trendu) v algoritmu pravděpodobnostního výpočtu.
- **Grupování dílčích výsledných náhodných veličin.**
- **Paralelizace výpočtu** – výpočet probíhá současně na několika procesorech.
- Kombinace uvedených optimalizačních postupů.



Grupování vstupních náhodných veličin

Nechť $B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_N$, přičemž v každém histogramu je n intervalů (např. $n = 256$, $N = 10$).

Celkový počet výpočetních operací je pak $P_0 = n^N = 256^{10} = 1,20893 \cdot 10^{24}$.

Stejný výsledek lze získat **postupným sčítáním vždy dvou histogramů**. Pak je počet výpočetních operací $P_0^* = (N - 1) \cdot n^2 = 9 \cdot 256^2 = 589\,824$ a poměr:

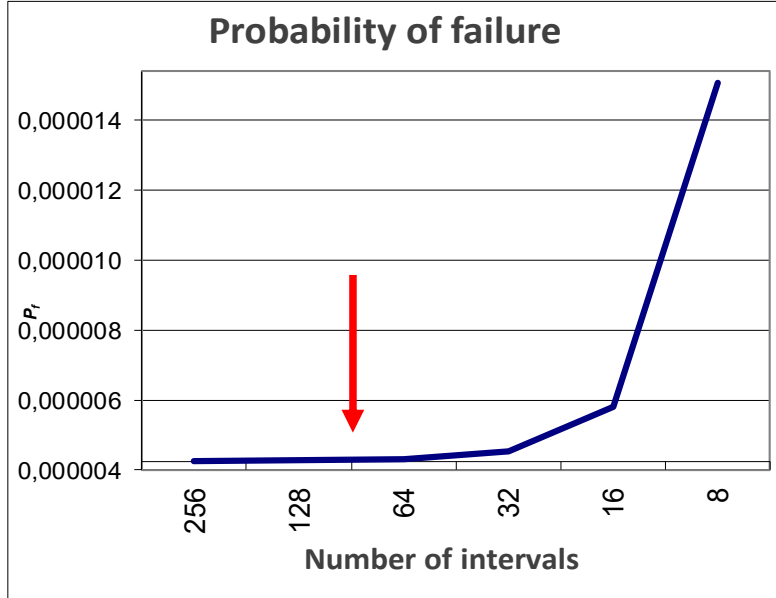
$$\frac{P_0^*}{P_0} = (N - 1) \cdot n^{(N-2)} = 9 \cdot 256^8 = 4,87891 \cdot 10^{-19}.$$

Pokud je vytváření společných histogramů (grupování) vstupních náhodných veličin korektní, jedná se o **velmi racionální výpočetní postup**.

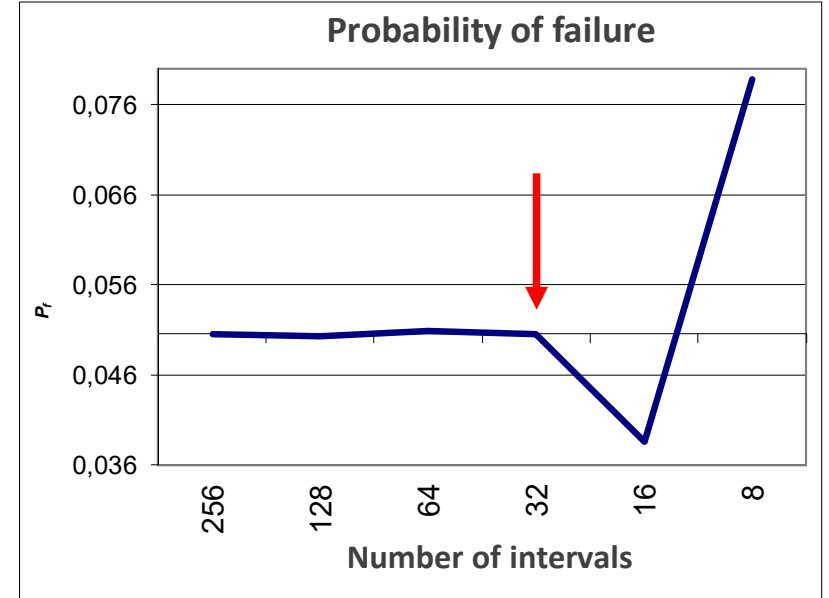
Intervalová optimalizace

Smyslem **intervalové optimalizace** je:

- **minimalizovat počet intervalů** v histogramech podle vlivu dané veličiny na výslednou pravděpodobnost poruchy (**citlivostní analýza**),
- snížit tím počet výpočetních operací a minimalizovat dobu výpočtu.

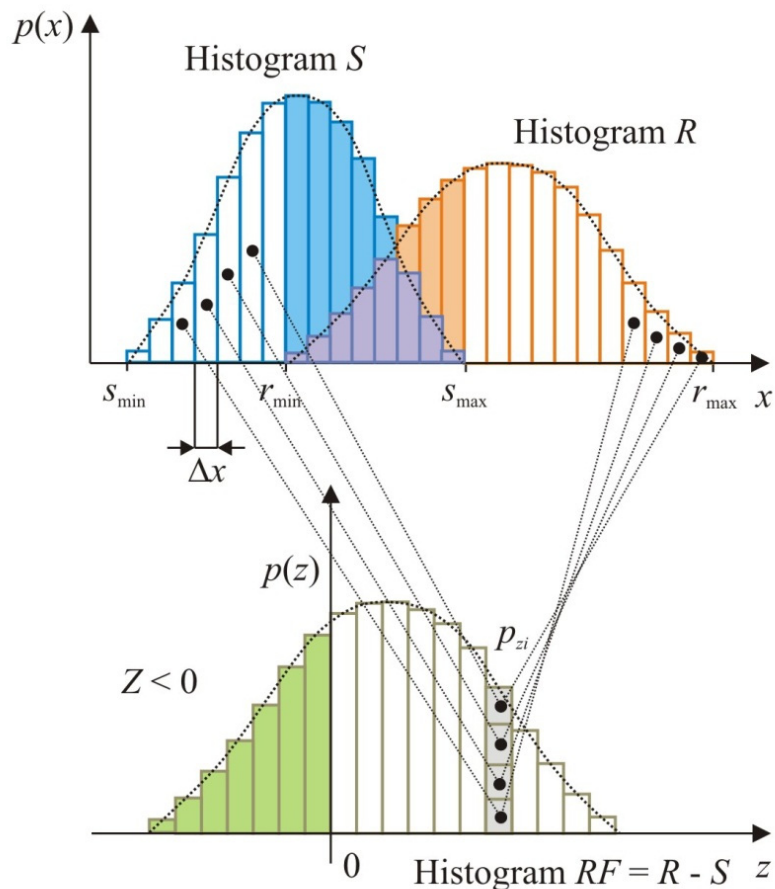


Postačující počet intervalů histogramu

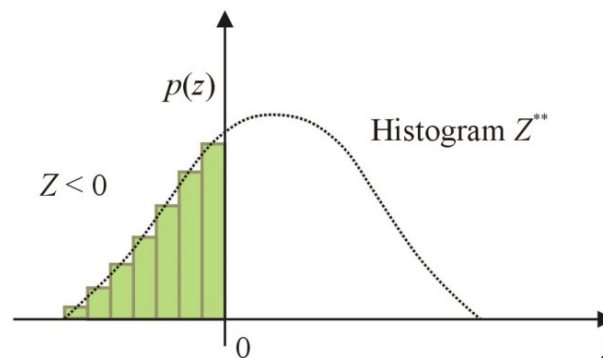
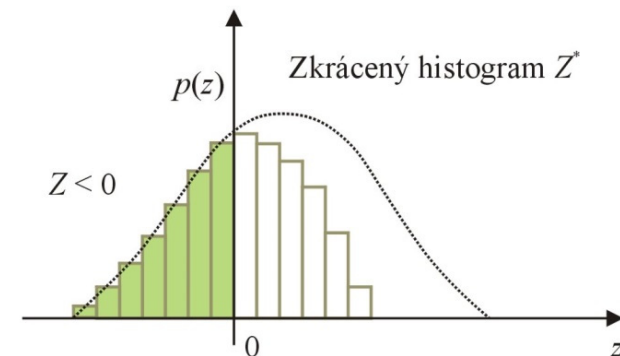


Postačující počet intervalů histogramu

Princip numerického výpočtu



Kombinace všech dvojic hodnot S_i a R_i při výpočtu histogramu výsledné náhodné veličiny Z (např. funkce spolehlivosti RF).



Otázka: Je nutné provádět při výpočtu pravděpodobnosti poruchy P_f všechny kombinace?

Zónová optimalizace

Každý histogram se rozdělí na zóny (**zónová optimalizace**), které se na vzniku pravděpodobnosti poruchy při jakýchkoliv hodnotách v ostatních histogramech:

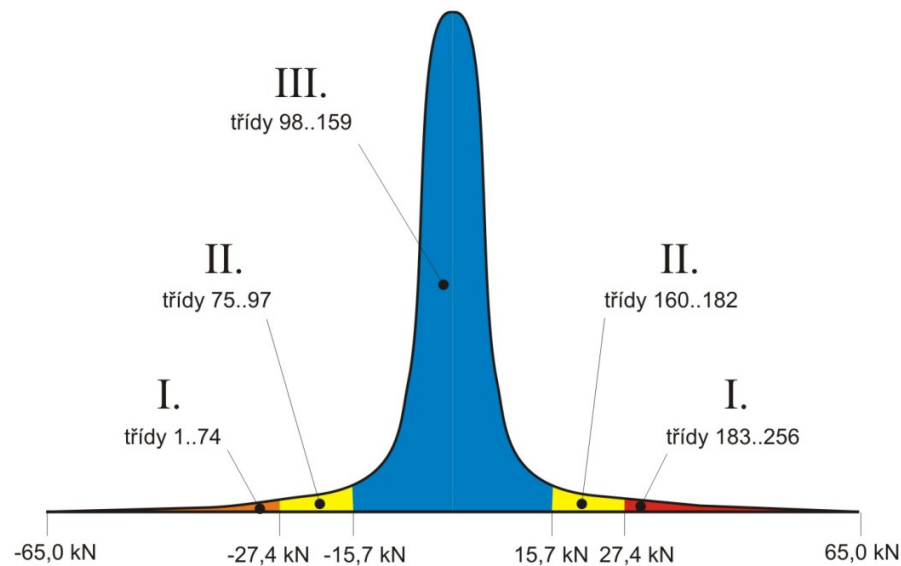
1. **zóna** – podílejí vždy
2. **zóna** – mohou a nemusí podílet
3. **zóna** – nepodílejí nikdy

$$P_f = P_{f,1} + P_{f,2}$$

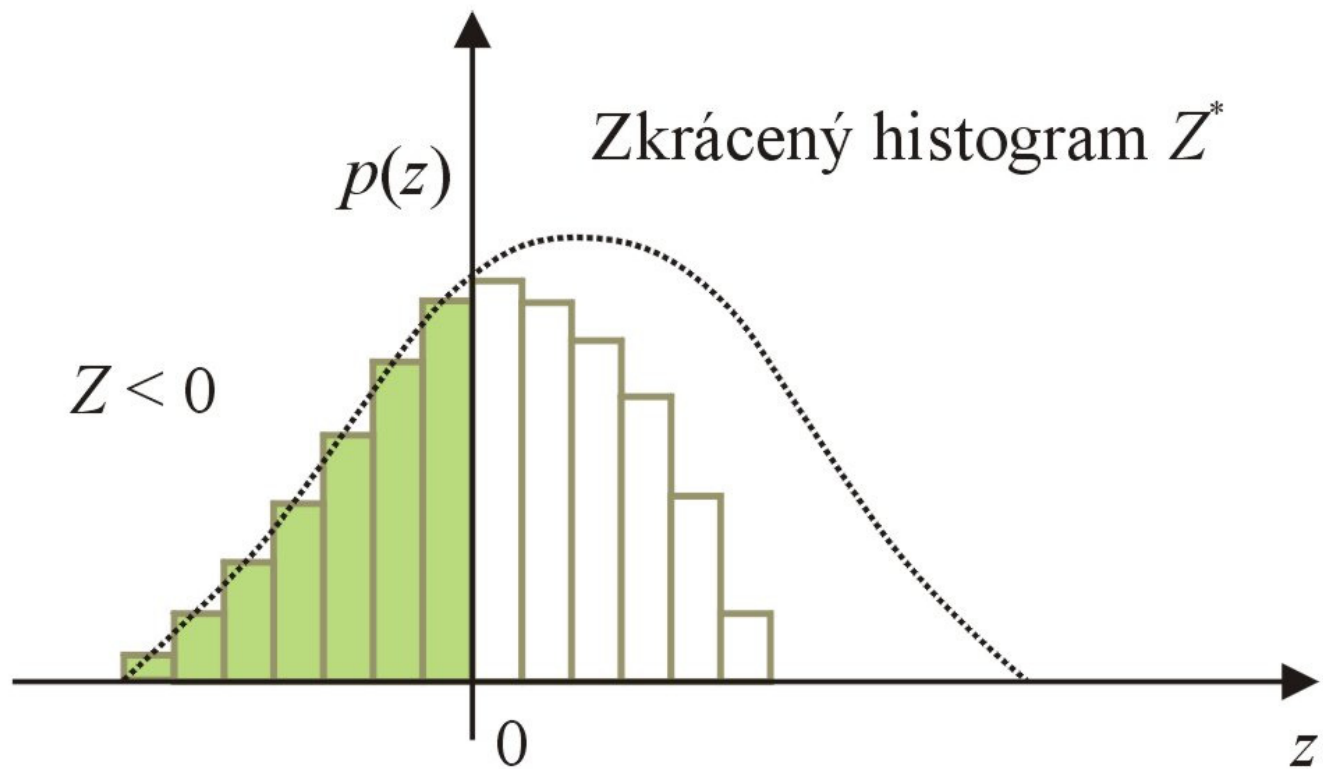
$$P_f = 0 \text{ nikdy}$$

$P_{f,2}$ pouze v některých kombinacích

$$P_{f,1} \text{ vždy}$$



Zónová optimalizace

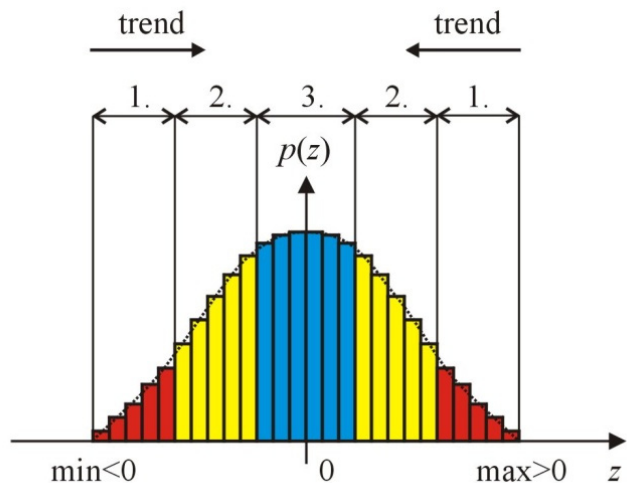


Výsledný histogram funkce spolehlivosti RF určený metodou POPV při uplatnění **zónové optimalizace** – tzv. „zkrácený histogram“ Z^*

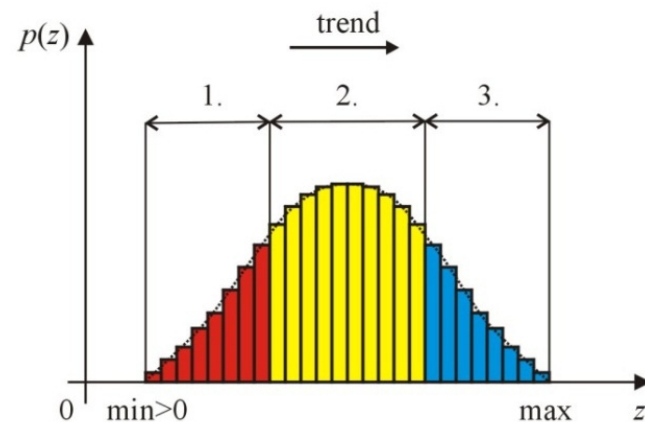
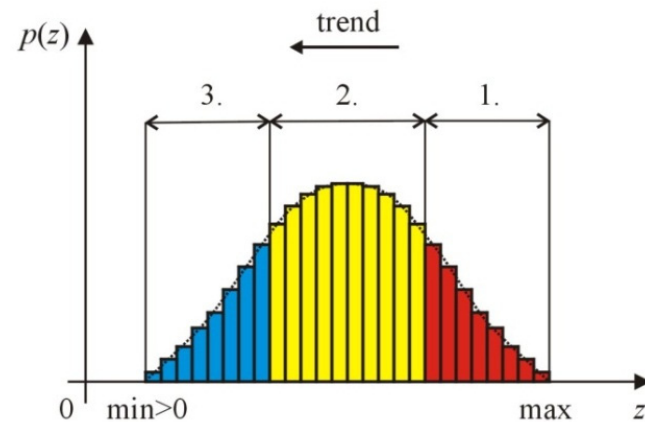
Trendová optimalizace

Nemonotonní histogram:

- Zóny v histogramech se nemění pouze jedním směrem,
- Histogramy mají minimálně dvě stejné zóny.



- ### Monotonní histogram:
- Zóny v histogramech se mění pouze jedním směrem.

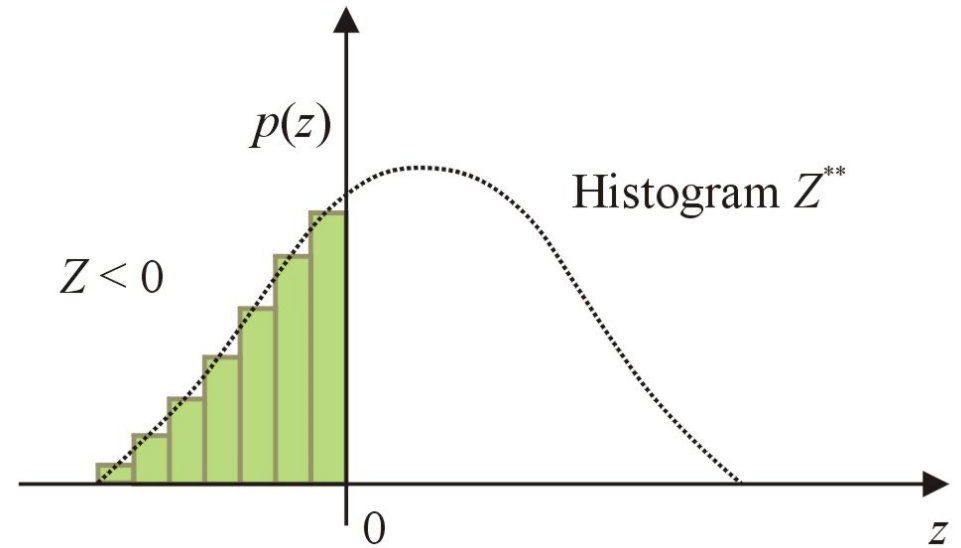


Trendová optimalizace

Výsledný histogram funkce spolehlivosti RF určený metodou POPV při uplatnění **trendové optimalizace** – výsledkem (pseudo)histogram Z^{**}

Výpočet pravděpodobnosti poruchy P_f v případě více náhodných veličin a při aplikaci **zonální** a **trendové optimalizace** je numerickým řešením integrálu:

$$P_f = \int_{D_f} f(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1, dX_2, \dots, dX_n$$



Grupování dílčích výsledných veličin

Je obdobou grupování vstupních náhodných veličin.

Platí-li např.:

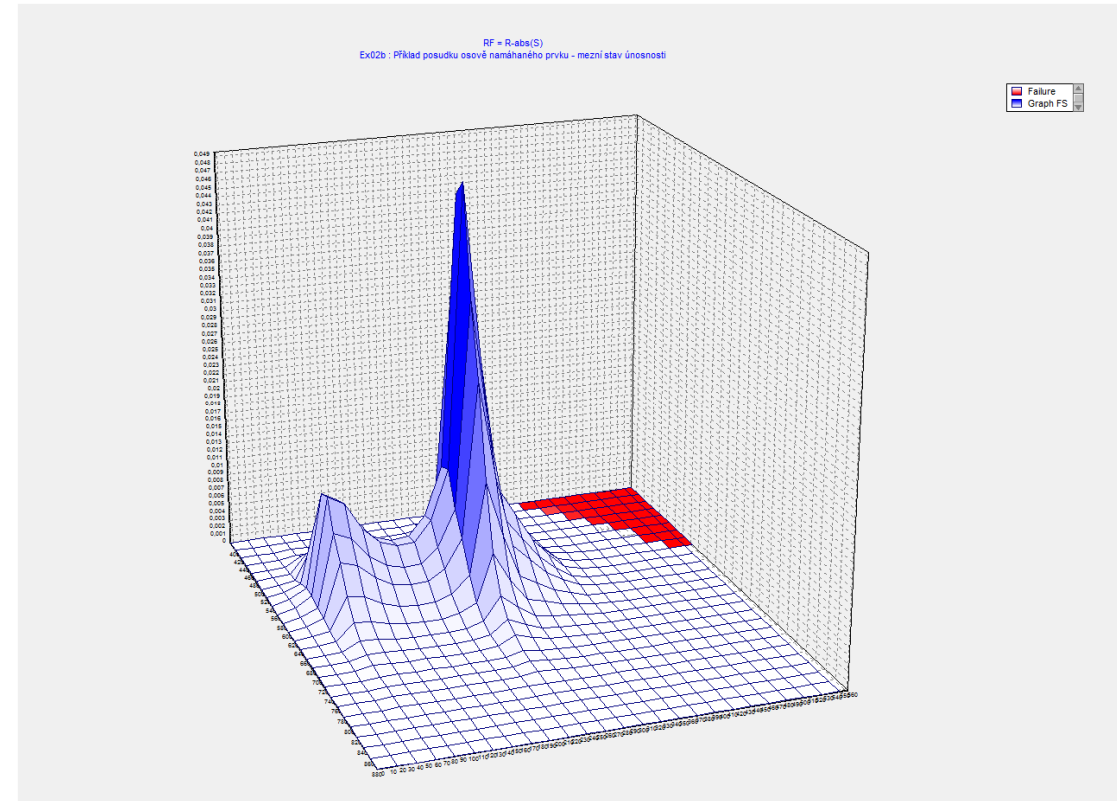
$$RF = R - f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N)$$

pak je často výhodné provést samostatně výpočet

$$E = f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_N)$$

a následně pak

$$RF = R - E$$



Paralelizace, kombinování optimalizačních technik

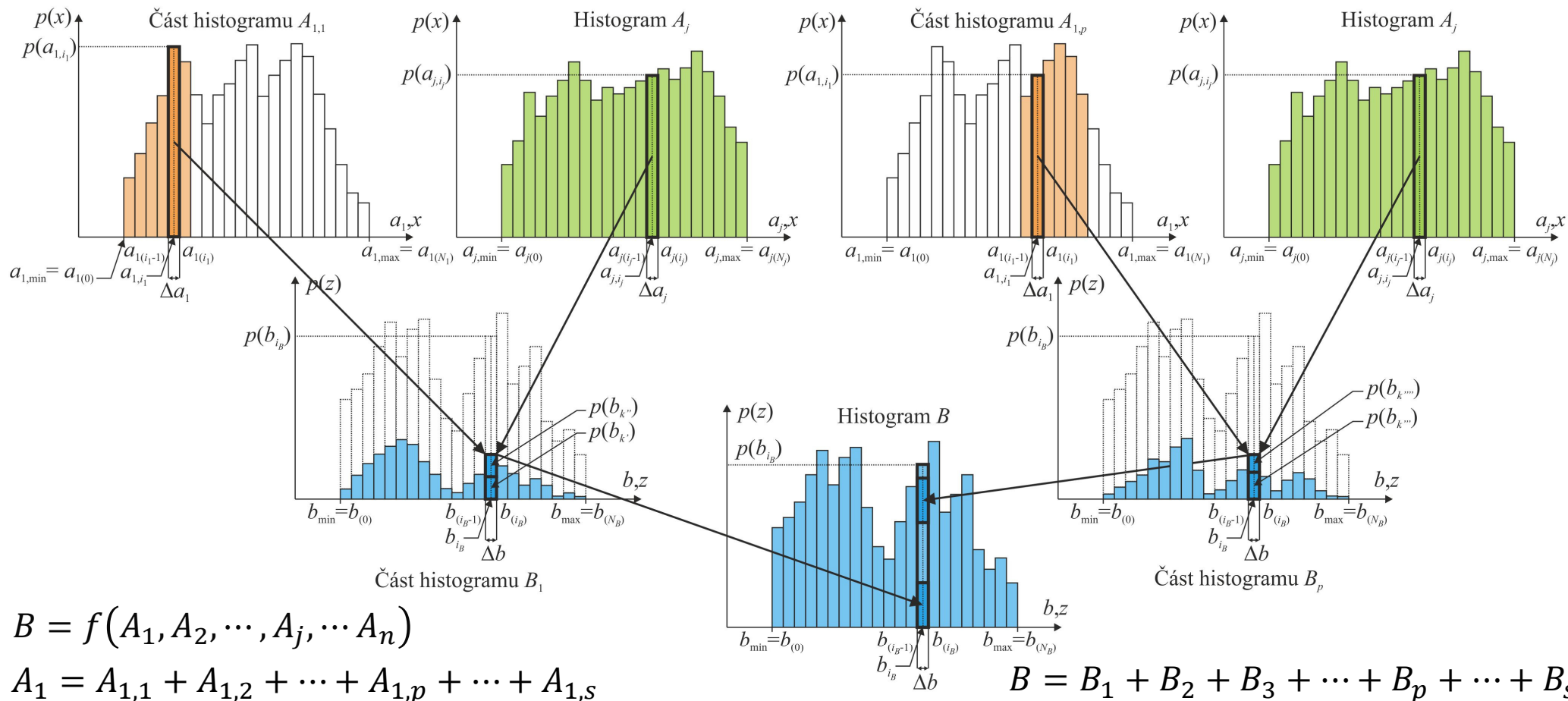
Metoda POPV umožňuje:

- **kombinovat** zmiňované optimalizační techniky,
- **paralelizovat** výpočet na víceprocesorových systémech (testováno na superpočítači).



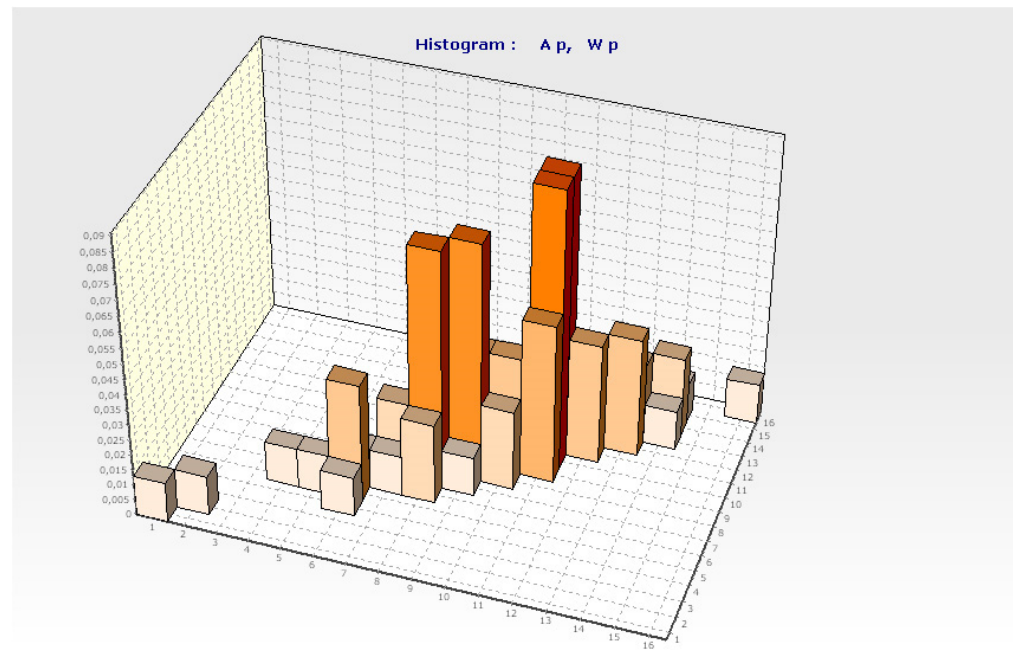
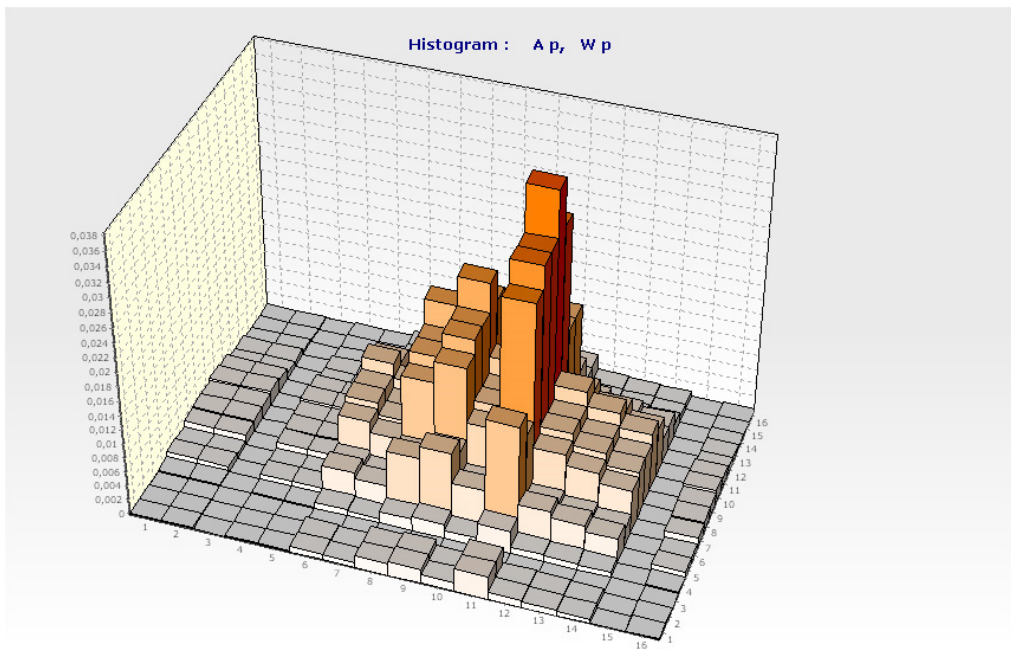
Národní superpočítačové centrum
IT4 Innovations, Ostrava

Základní výpočetní algoritmus při paralelizaci



Statistická závislost vstupních náhodných veličin

Statisticky závislé náhodné veličiny mohou být zadávány do pravděpodobnostního výpočtu pomocí **dvojných** nebo **trojných histogramů**.



Pracovní plocha programu HistAn2D: dvojný histogram dvou statisticky nezávislých (vlevo) a závislých (vpravo) náhodných proměnných

Statistická závislost vstupních náhodných veličin

Teoretické pozadí: V každém standardním histogramu A vodorovná osa obsahuje intervaly a_j , které jsou omezeny hodnotami a_{\min} a a_{\max} , zatímco svislá osa obvykle popisuje pravděpodobnost p_{a_j} výskytu hodnot těchto intervalů a_j .

Součet pravděpodobností ve všech intervalech a_j je v histogramu $\sum p_{a_j} = 1$.

Ve **dvojném histogramu** dvou náhodných proměnných Z_1 a Z_2 je proměnná Z_1 omezena $Z_{1,\min}$ a $Z_{1,\max}$, zatímco Z_2 hodnotami $Z_{2,\min}$ a $Z_{2,\max}$.

Hodnota náhodné proměnné může být rozdělena s využitím kroku Δz_1 do N_1 intervalů pro náhodnou proměnnou Z_1 , nebo s využitím kroku Δz_2 do N_2 intervalů pro náhodnou proměnnou Z_2 . Celkový počet intervalů je pak:

$$N_1 = \frac{Z_{1,\max} - Z_{1,\min}}{\Delta z_1} \text{ a } N_2 = \frac{Z_{2,\max} - Z_{2,\min}}{\Delta z_2}.$$

Statistická závislost vstupních náhodných veličin

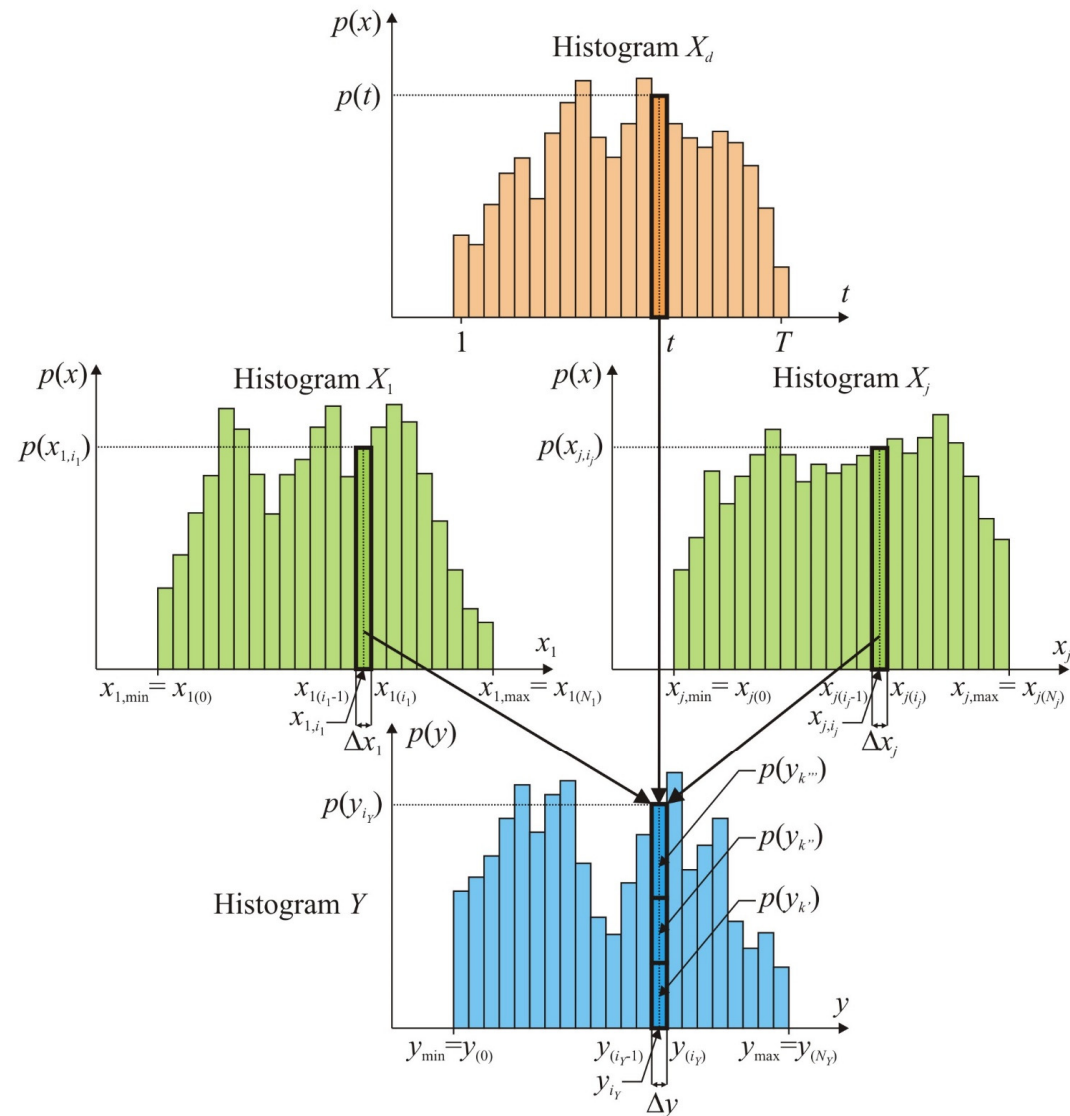
Teoretické pozadí: Pokud je hodnota vstupní náhodné proměnné z_1 z j -tého intervalu $z_{1,j}$, teoreticky hodnota náhodné proměnné z_2 může nabývat hodnot: $z_{2,1}, z_{2,2}, \dots, z_{2,j}, \dots, z_{2,N_2}$, tedy N_2 hodnot.

Dvojný histogram dvou náhodných veličin z_1 a z_2 může obsahovat $N_1 \cdot N_2$ intervalů. Znamená to, že každý interval dvojného histogramu obsahuje dvě hodnoty $z_{1,j}$ a $z_{2,j}$ a pravděpodobnost výskytu hodnoty každého intervalu $p_{z_{1,j}, z_{2,j}}$. Opět platí: $\sum p_{z_{1,j}, z_{2,j}} = 1$.

Počet intervalů s nenulovou pravděpodobností může dosáhnout součinu $N_1 \cdot N_2$. Pokud jsou náhodné veličiny statisticky závislé, může být počet intervalů dvojného histogramu s nenulovou pravděpodobností podstatně nižší než součin $N_1 \cdot N_2$.

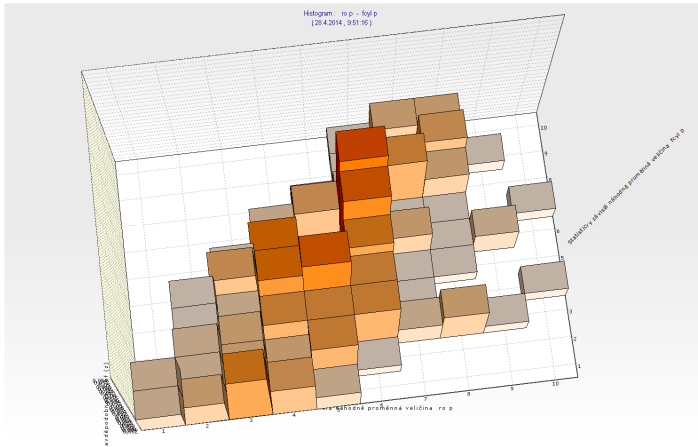
Základní výpočetní algoritmus při výpočtu se vstupními statisticky závislými náhodnými veličinami

$$Y = f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n, X_{1d}, \dots, X_{jd}, \dots, X_{md})$$

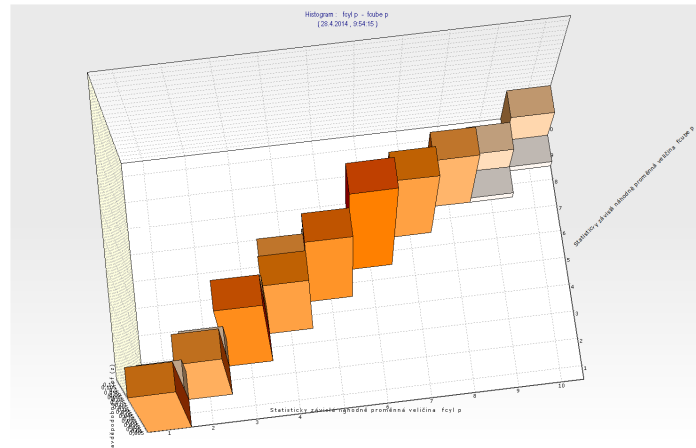


Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D

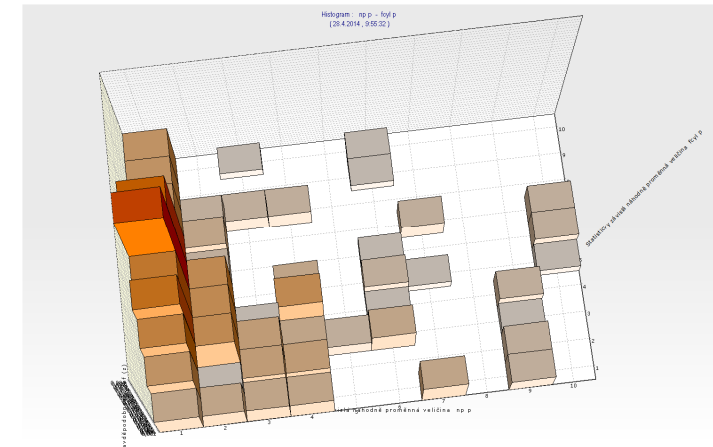
Histogramy dvou (tří) **statisticky závislých** náhodných vstupních veličin může vstupovat do pravděpodobnostního výpočtu s využitím programu ProbCalc.



objemová hmotnost vs. pevnost v tlaku, korelace 60,8 % až 62,2 %



krychelná vs. válcová pevnost v tlaku, korelace 99,8 % až 100,0 %



pevnost betonu v tlaku vs. výška podlaží v budově, korelace -21,1 % až -25,8 %

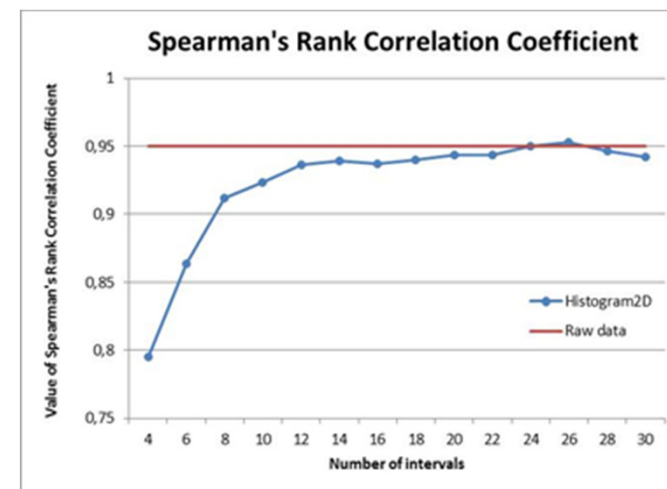
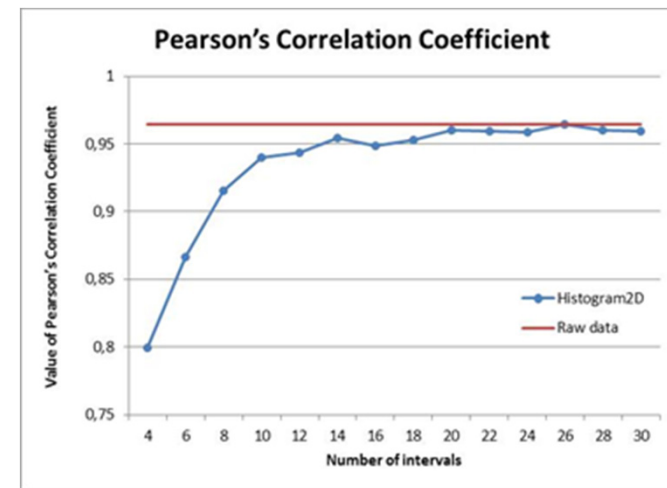
Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D

Korelační koeficienty dvojného histogramu statisticky závislých náhodných proměnných s rozdílnými počty intervalů

(Pearsonův a Spearmanův korelační koeficient pro naměřené hodnoty je roven 0,9645; resp. 0,9499).

Počet intervalů ve dvojném histogramu	Pearsonův korelační koeficient	Spearmanův pořadový korelační koeficient	Počet intervalů ve dvojném histogramu	Pearsonův korelační koeficient	Spearmanův pořadový korelační koeficient
$4^2 = 16$	0,79985097	0,79507798	$18^2 = 324$	0,95267109	0,94023800
$6^2 = 36$	0,86661900	0,86360377	$20^2 = 400$	0,96046634	0,94378886
$8^2 = 64$	0,91530000	0,91194405	$22^2 = 484$	0,95940904	0,94355084
$10^2 = 100$	0,93984931	0,92352904	$24^2 = 576$	0,95903334	0,94989866
$12^2 = 144$	0,94381175	0,93613068	$26^2 = 676$	0,96464064	0,95260826
$14^2 = 196$	0,95443331	0,93939308	$28^2 = 784$	0,96017017	0,94660574
$16^2 = 256$	0,94876401	0,93694950	$30^2 = 900$	0,95938019	0,94245225

Pearsonův korelační koeficient (nahore) a
Spearmanův pořadový korelační koeficient (dole)
dvojného histogramu vs. počet intervalů

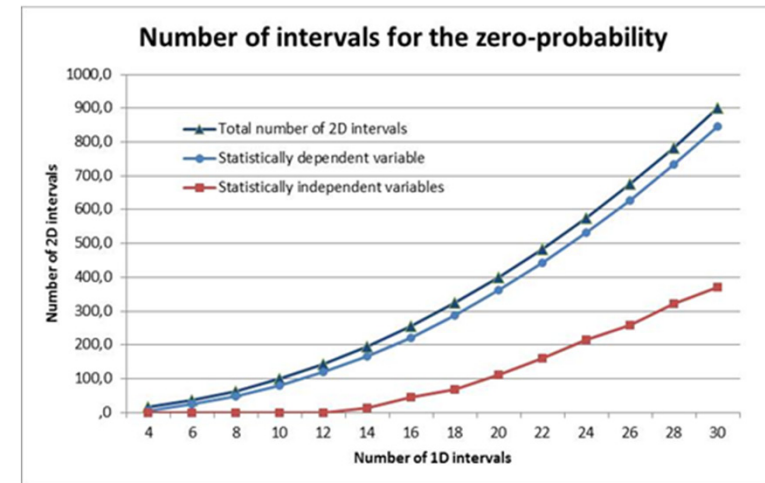


Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D

Celkový počet intervalů ve dvojném histogramu	Počet intervalů s nulovou pravděpodobností		Celkový počet intervalů ve dvojném histogramu	Počet intervalů s nulovou pravděpodobností	
	Statisticky závislé náhodné veličiny	Statisticky nezávislé náhodné veličiny		Statisticky závislé náhodné veličiny	Statisticky nezávislé náhodné veličiny
$4^2 = 16$	6	0	$18^2 = 324$	288	69
$6^2 = 36$	24	0	$20^2 = 400$	361	112
$8^2 = 64$	48	0	$22^2 = 484$	443	160
$10^2 = 100$	80	0	$24^2 = 576$	531	216
$12^2 = 144$	119	0	$26^2 = 676$	627	258
$14^2 = 196$	166	14	$28^2 = 784$	735	322
$16^2 = 256$	222	46	$30^2 = 900$	847	372

Počet intervalů dvojného histogramu **s nulovou pravděpodobností** vs. celkový počet intervalů

Počet intervalů ve dvojném histogramu: celkový počet a počet intervalů s nulovou pravděpodobností pro statisticky závislé a nezávislé náhodné veličiny.



Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D

Numerický korelační index – upožňuje vyjádřit závislost mezi náhodnými veličinami nejenom pro lineární vztahy mezi dvojicí veličin, ale i pro nelineární závislost, nebo i pro více než dvě náhodné veličiny:

$$I_k = \frac{T_M - T_C}{T_M}$$

kde T_M je celkový počet intervalů dvojného nebo trojného histogramu (optimální počet intervalů v závislosti na množství naměřených dat), T_C je počet intervalů s nenulovou pravděpodobností.

Pro **statisticky závislé veličiny**:

Úprava při nedostatečném množství dat:

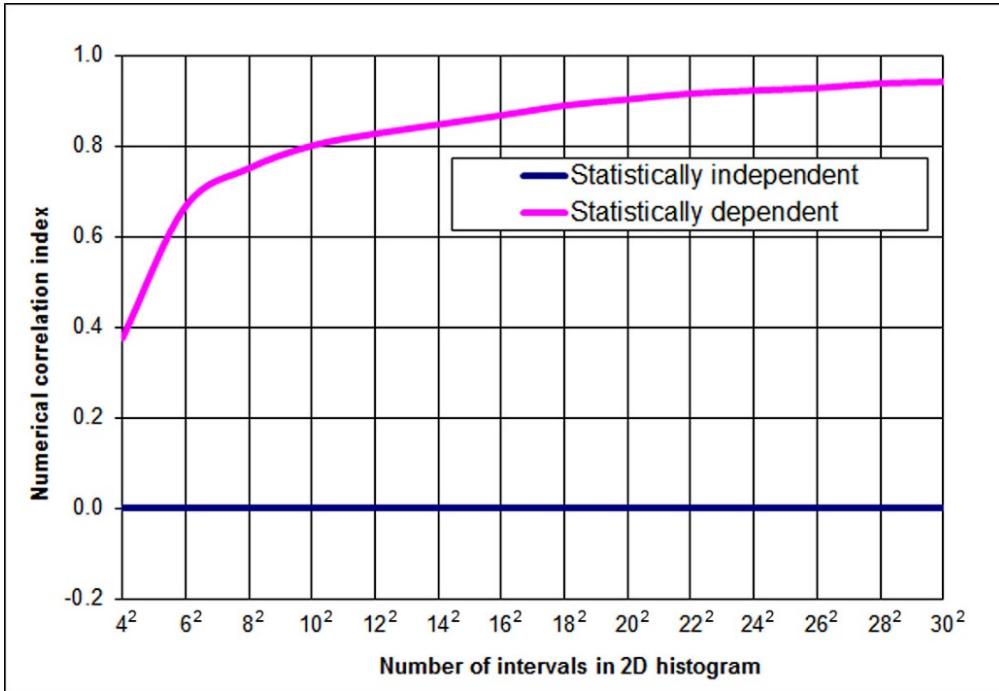
kde $n_1, n_2, n_3, \dots, n_t$ jsou počty intervalů v histogramech,

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_t$ jsou počty intervalů bez jediné naměřené hodnoty.

2 závislé proměnné: $T_M = (n_1 - p_1) \cdot (n_2 - p_2)$

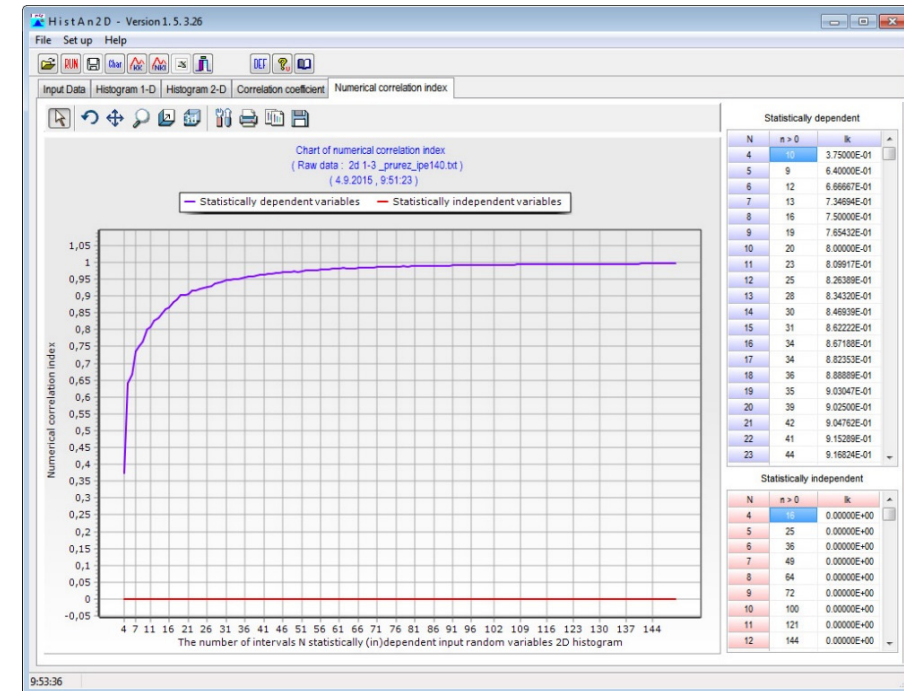
t závislých veličin: $T_M = (n_1 - p_1) \cdot (n_2 - p_2) \cdot (n_3 - p_3) \cdot \dots \cdot (n_t - p_t)$

Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D



Numerický korelační index pro dvě náhodné veličiny – průřezovou plochu A a průřezový modul W_y

Výpočet **numerického korelačního indexu** v programu HistAn2D v závislosti na počtu intervalů ve dvojném histogramu



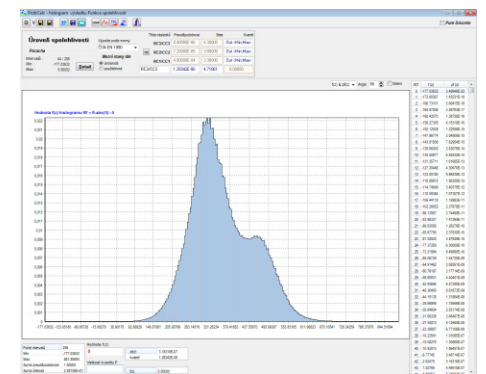
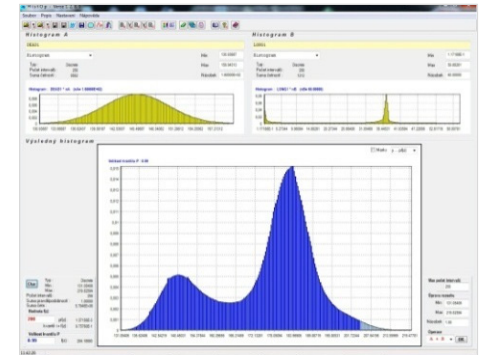
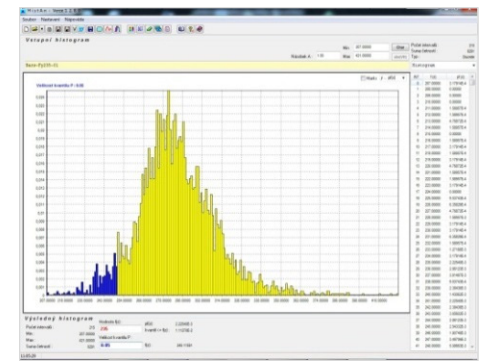
Programový systém ProbCalc

Metoda POPV byla aplikovaná do programových nástrojů:

HistAn, **HistAn2D** a **HistAn3D** – nástroje pro tvorbu a analýzu useknutých histogramů,

HistOp – programový nástroj pro základní aritmetické operace se dvěma histogramy,

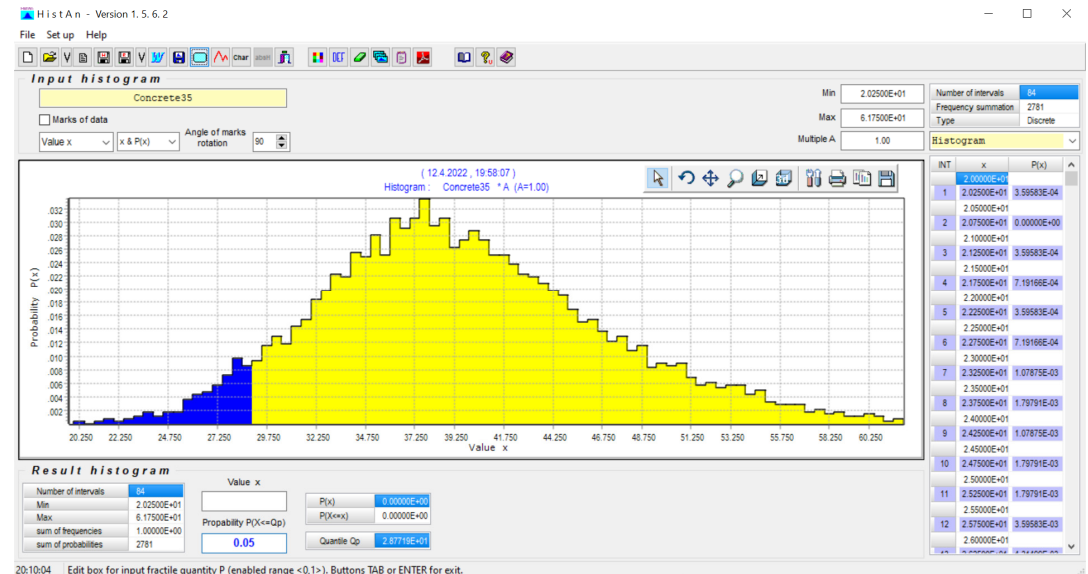
ProbCalc - slouží pro pravděpodobnostní posouzení spolehlivosti konstrukcí i pro řešení jiných pravděpodobnostních úloh. Výpočetní model lze definovat v textovém režimu nebo s pomocí dynamické knihovny DLL. Program obsahuje implementaci všech optimalizačních technik.



Programový nástroj HistAn

Program umožňuje tvorbu a detailní analýzu histogramů náhodných proměnných:

- **Minimální** a **maximální hodnoty** náhodné proměnné
- **Počet tříd** (intervalů) v histogramu a četnosti v nich definované
- **Jednoduché pravděpodobnostní výpočty** s histogramy (např. stanovení hodnoty p -kvantilu)
- Určení **kombinace** (součtu) několika vstupních **histogramů**
- Vytvoření histogramů s **parametrickým rozdělením** pravděpodobnosti
- Zpracování **naměřených** (prvotních) **dat**

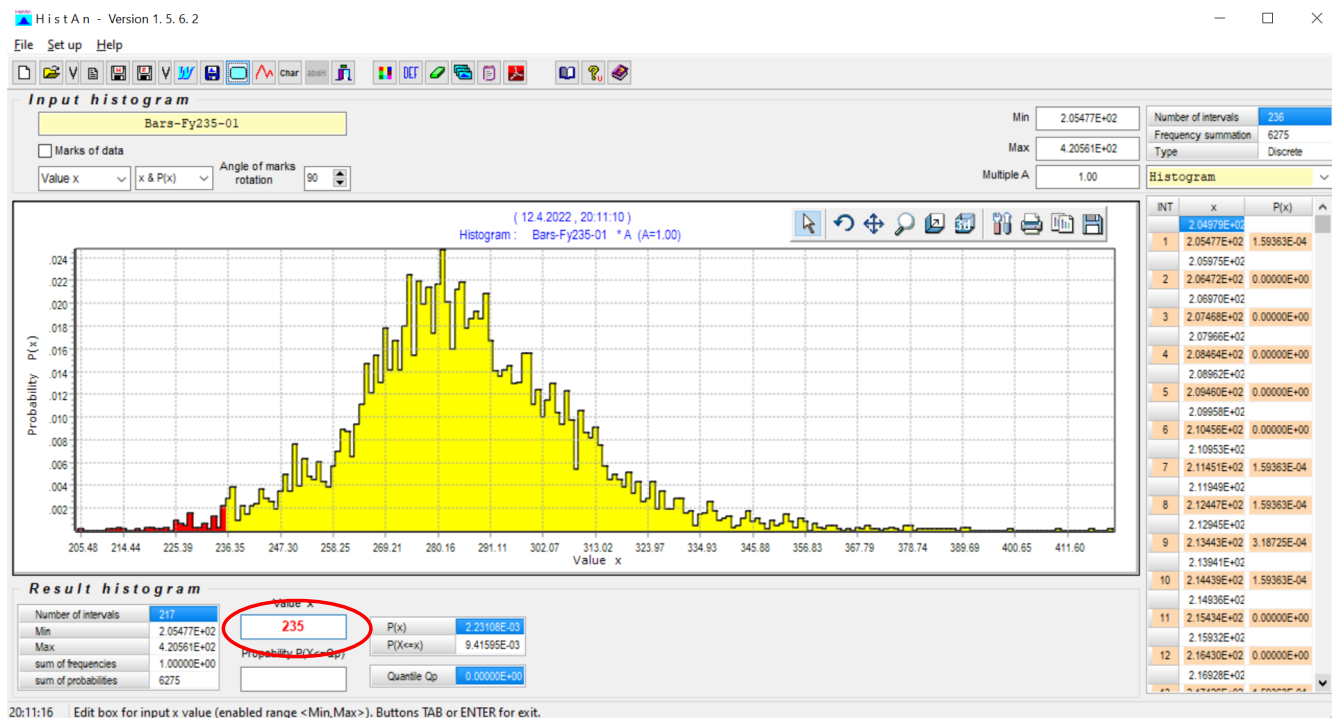


Programový nástroj HistAn

Detailní analýza histogramu definujícího **napětí na mezi kluzu oceli S235**:

- Výpočet pravděpodobnosti $P(X \leq x)$ pro zadanou hodnotu x náhodné proměnné X .
Pro zadanou hodnotu $x = 235$ MPa je **výsledná pravděpodobnost $P(X \leq x) = 9,41595 \cdot 10^{-3} = 0,94 \%$** .

Pracovní plocha
programu **HistAn**



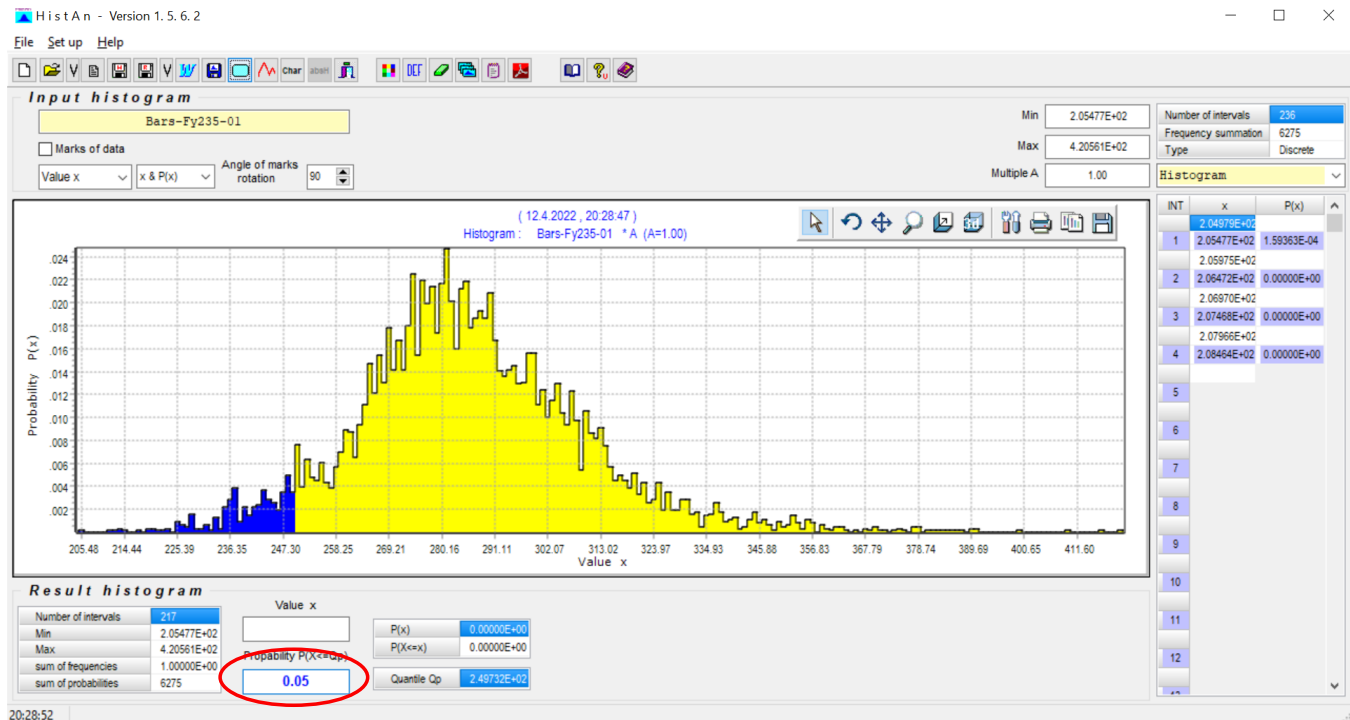
Programový nástroj HistAn

Detailní analýza histogramu definujícího **napětí na mezi kluzu oceli S235**:

- Výpočet **pěti-procentního kvantilu $x_{0,05}$** pro zadanou pravděpodobnost $p = 0,05 = 5 \%$ (platí $P(X \leq x_{0,05}) = 0,05$). **Výsledný kvantil $x_{0,05} = 249,732$ MPa.**

Poznámka: Soubor naměřených hodnot lze rozdělit do 2 skupin: 5% vzorků má hodnotu napětí na mezi kluzu $f_y \leq 249,732$ MPa (modrá část histogramu), 95% vzorků naopak $f_y > 249,732$ MPa (žlutá část histogramu).

Pracovní plocha programu **HistAn**



Programový nástroj HistOp

S využitím programu **HistOp** lze provádět **základní aritmetické operace** s dvojicí histogramů A a B , zejména:

- **Součet**,
- **Rozdíl**,
- **Součin**,
- **Dělení**,
- **Druhá mocnina** histogramu A ,
- **Absolutní hodnota** histogramu A .



Program ProbCalc

Grupování vstupních náhodných veličin

Funkce spolehlivosti

Kalkulačka

Příkazový řádek

Analytická definice výpočetního modelu

The screenshot shows the ProbCalc software interface with several panels and tables. The top panel is the 'Assign' panel, which includes a project list, a calculator, and function buttons. The middle panel is the 'Model' panel, which contains a table of model variables and their arithmetic expressions. The bottom panel is the 'Model variables' panel, which contains a table of model variables and their properties.

Model

Name of model	Arithmetic expression	RF
1 I1	$0.0000579*(1.4*Eps1)$	
2 I2	$0.00008356*(1.4*Eps2)$	
3 X2	$(5*1*P1*\sqrt{2.5})+2*3.5*(6*P1*2.5-\sqrt{3.5*Q})/(4*2.5*(4*1*2.5+3.5*Q))$	
4 P	$8*3.5*(4*1*2.5+3*2*3.5)$	
5 X1	$(1*2.5*(9*P1*2.5+4*3.5*(3*3.5*Q+8*P2))+12*I2*\sqrt{3.5})/(3.5*Q+2)$	
6 N	$-X1+P2$	
7 M	$X2*2.5-P1*2.5/2$	
8 Sigma	$(N/(0.005380*(1-2*Eps2))+M*0.15/2)/1000$	

Model variables

Variable	Type	Histogram	Min	Max	Intervals	File add
1 Eps1	Histogramy	Epsilon	-2.34694E-2	3.68804E-2	10	Histogram:
2 Eps2	Histogramy	Epsilon	-2.34694E-2	3.68804E-2	10	Histogram:
3 P1	Group	Calculated	4.10156E-1	209.58984	256	
4 Q	Group	Calculated	-64.74609	64.74609	256	
5 P2	Group	Calculated	4.68750E-1	239.53125	256	
6						
7						
8						

Reliability function

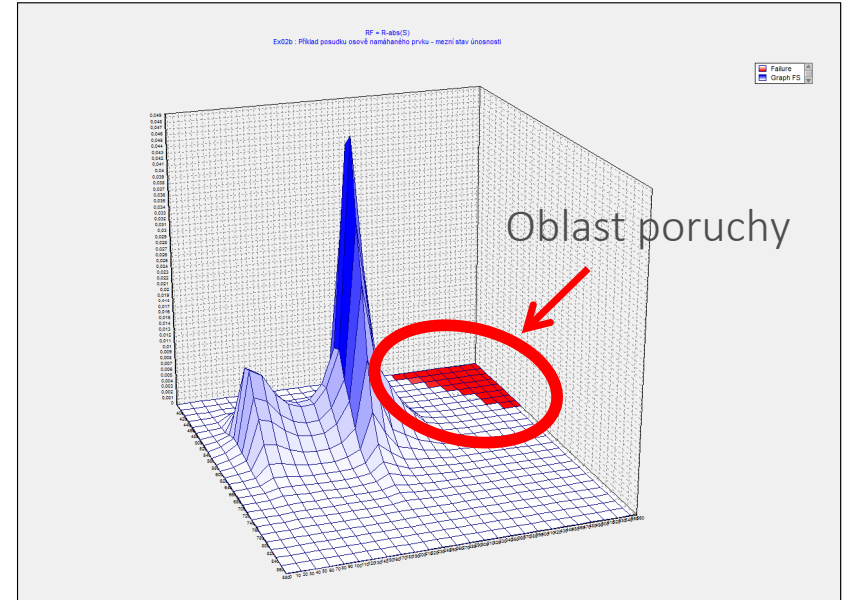
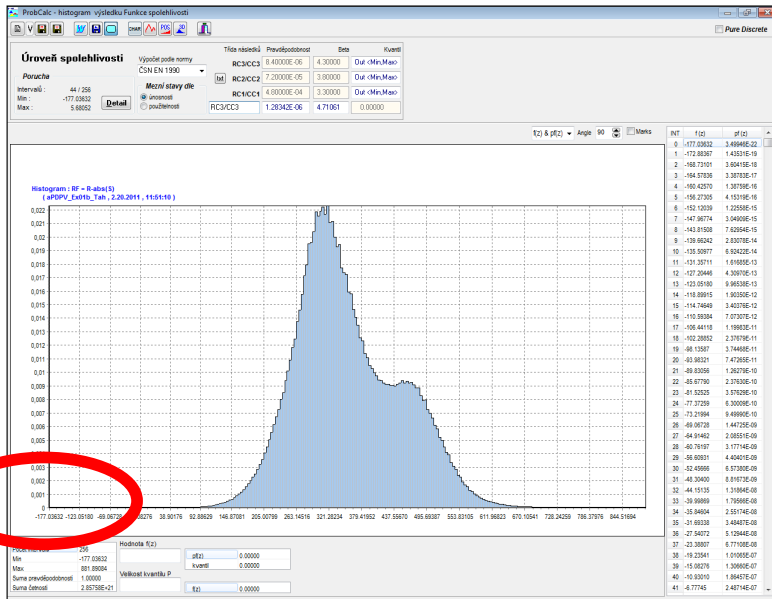
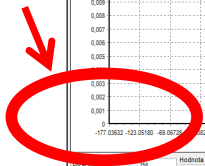
Name of group	Arithmetic expression
1 P1	$210*L$
2 Q	$65*W$
3 P2	$240*S$
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabulka vstupních náhodných veličin

Program ProbCalc

Software **ProbCalc** lze použít pro posouzení spolehlivosti konstrukce nebo jiné pravděpodobnostní výpočty.

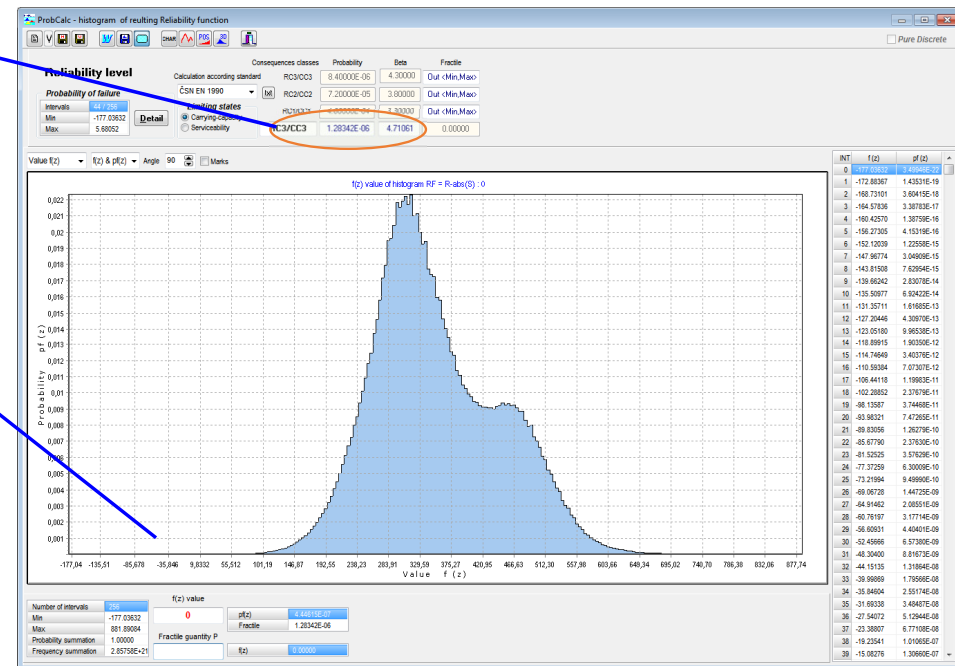
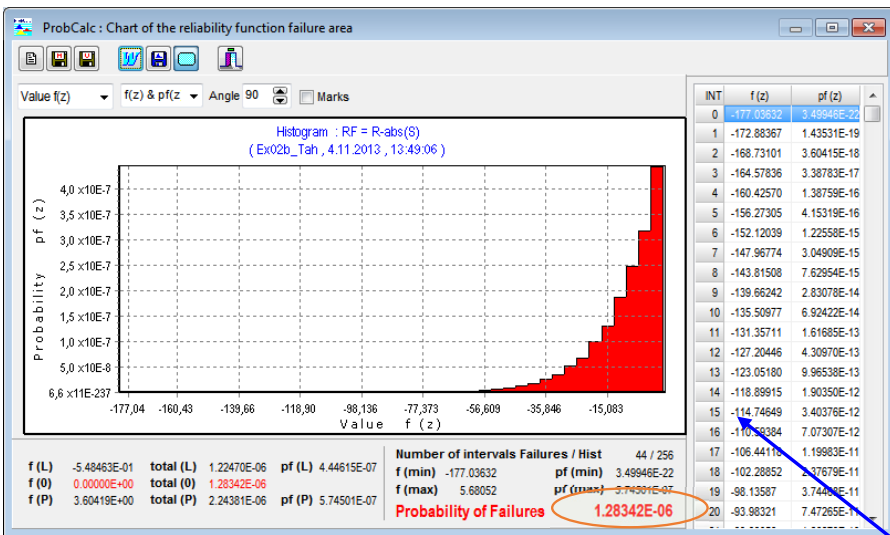
Oblast poruchy



Analýzovaná **funkce spolehlivosti** (výpočetní model) může být vyjádřena **analyticky** nebo **numericky** (s využitím dynamické knihovny).

Program ProbCalc

Pracovní plocha programu **ProbCalc** při posouzení spolehlivosti konstrukce: histogram funkce spolehlivosti RF a výsledná pravděpodobnost poruchy P_f .



Pravděpodobnost poruchy

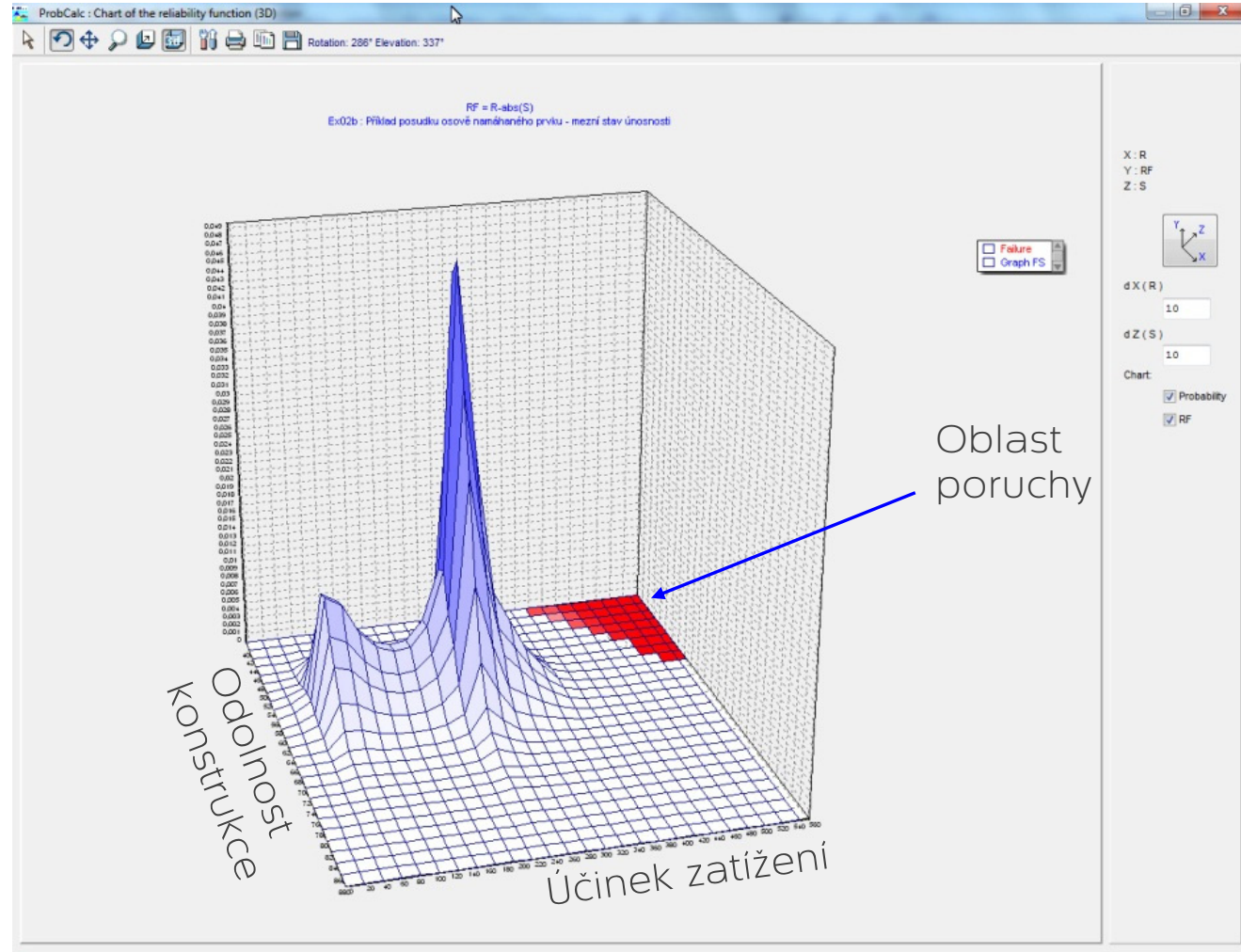
$$P_f = 1,28 \cdot 10^{-6}$$

Splňuje požadavky podle EN 1990 pro **třídu následků RC3/CC3** s návrhovou pravděpodobností

$$P_d = 8,4 \cdot 10^{-6}$$

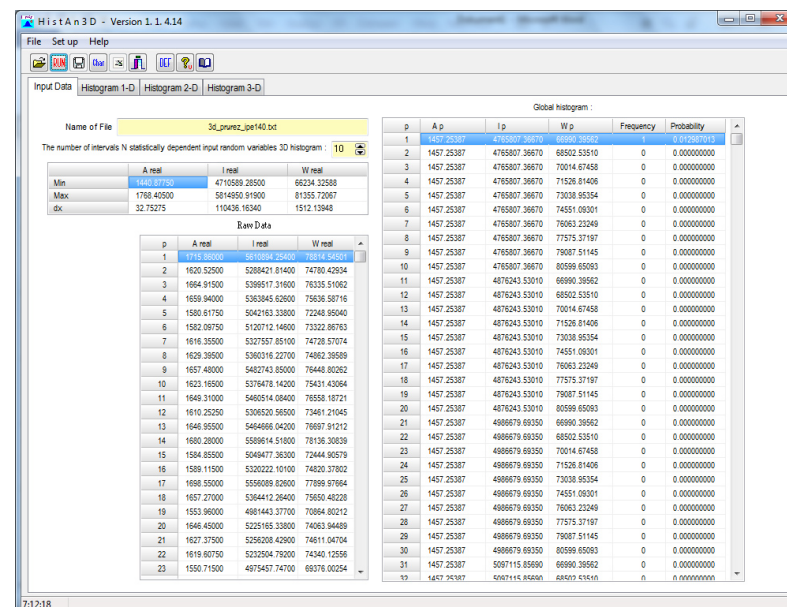
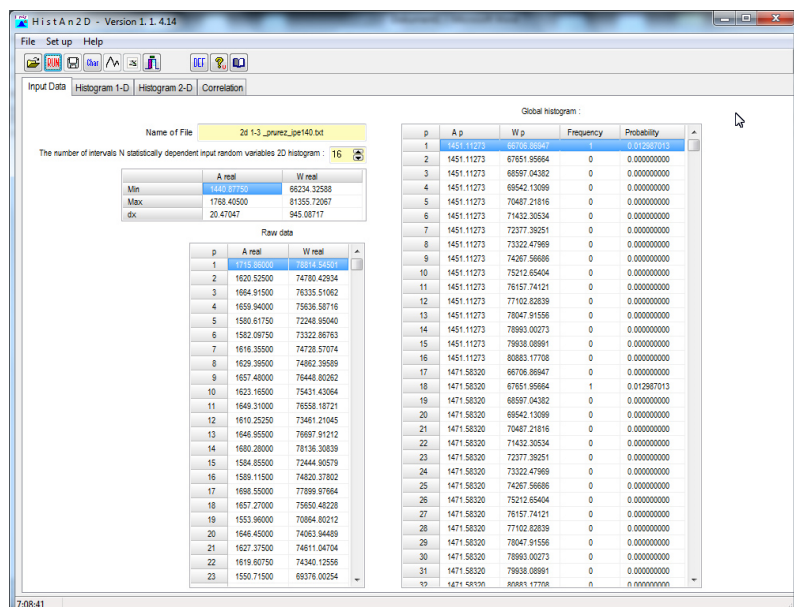
Program ProbCalc

Prostorový graf funkce
spolehlivosti RF



Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D

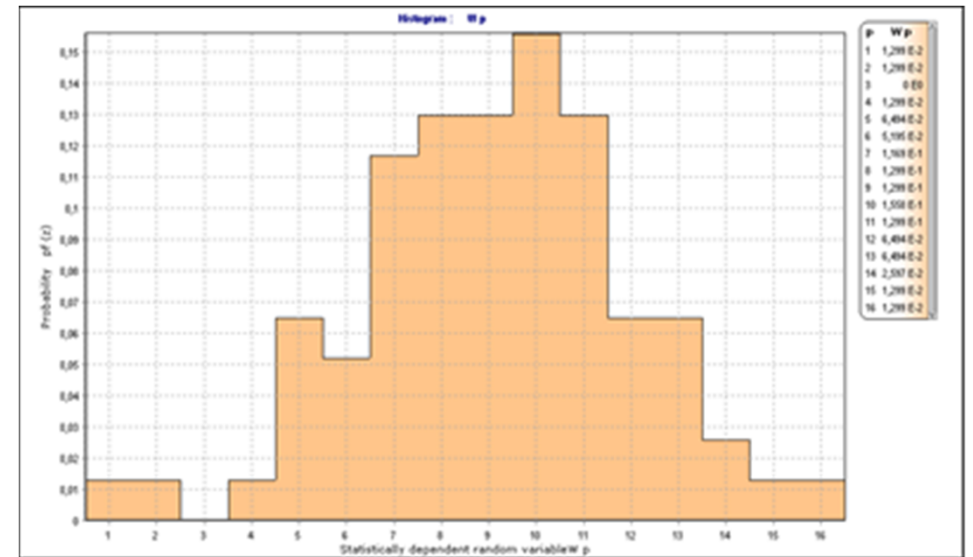
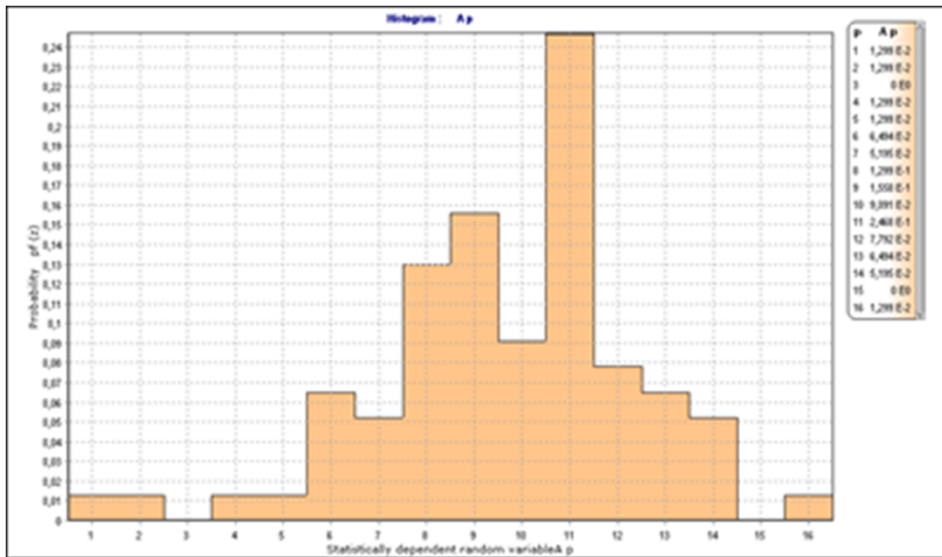
Byly vytvořeny speciální softwarové aplikace **HistAn2D** (vlevo) a **HistAn3D** (vpravo) pro tvorbu **dvojných** a **trojných histogramů**, které umožňují zohlednit **statistickou závislost** 2 nebo 3 vstupních náhodných proměnných.



Pracovní plocha programů **HistAn2D** (vlevo) a **HistAn3D** (vpravo): zpracování naměřených hodnot průřezových charakteristik profilu IPE 140.

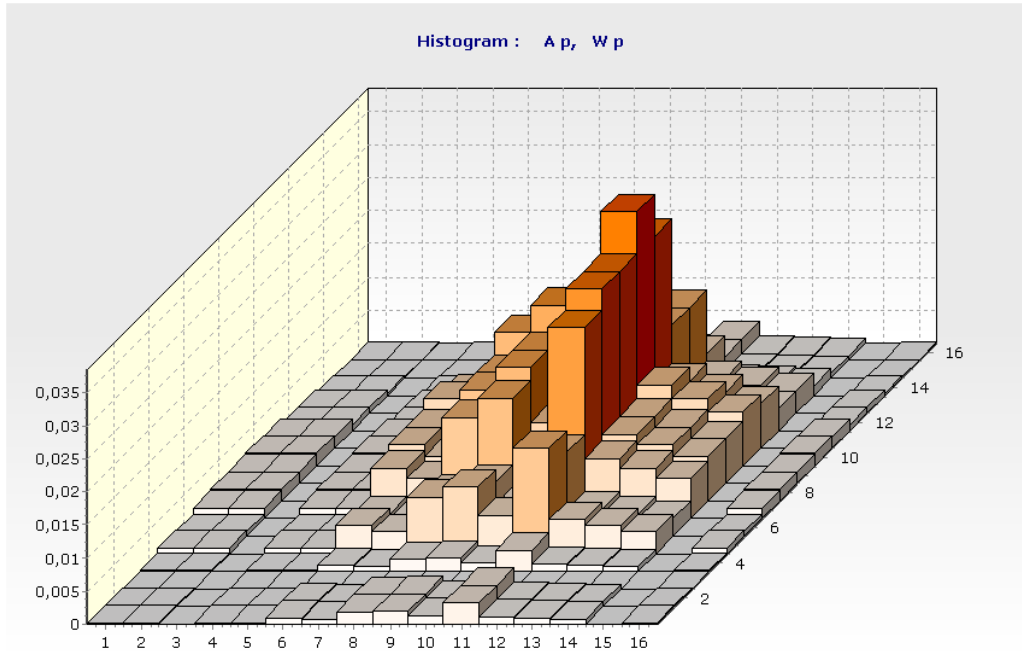
Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D

Pomocí tohoto softwaru je možné pro každou náhodnou veličinu zobrazit jednoduchý histogram s neparametrickým (empirickým) rozdělením pravděpodobnosti i vícerozměrný histogram, který popisuje statistickou závislost mezi dvojicí (trojicí) náhodných veličin.



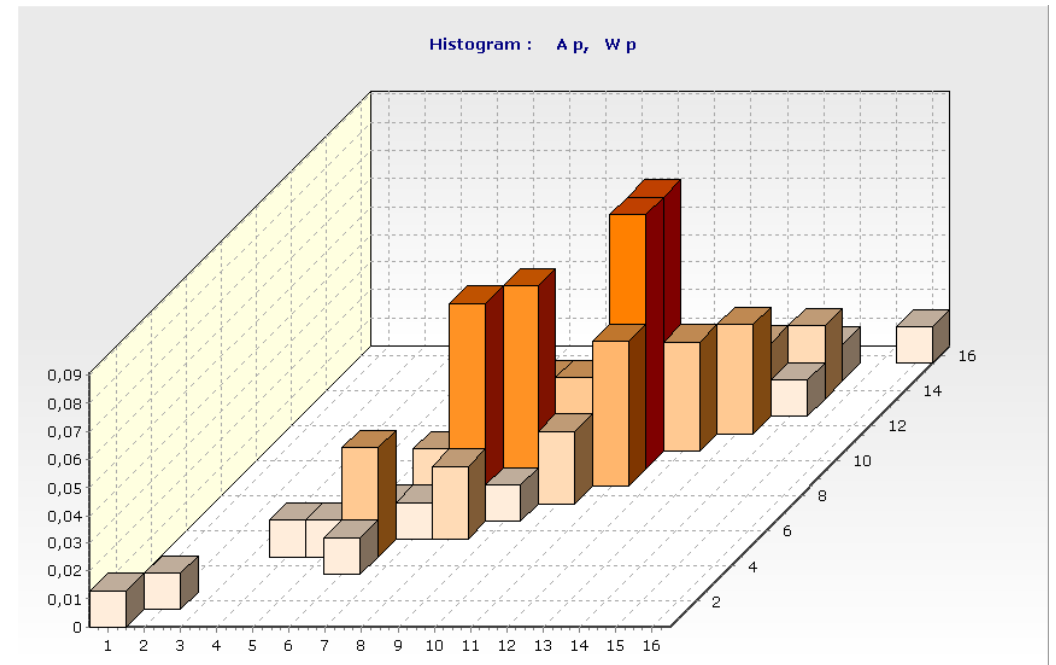
Histogramy s **neparametrickým** (empirickým) **rozdělením pravděpodobnosti**: histogram průřezové plochy A (vlevo) a průřezového modulu W_y (vpravo) profilu IPE140.

Programové nástroje: HistAn2D a HistAn3D



Dvojný histogram pro dvě **statisticky závislé** náhodné proměnné – průřezovou plochu A a průřezový modul W_y .

Dvojný histogram pro dvě **statisticky nezávislé** náhodné proměnné – průřezovou plochu A a průřezový modul W_y .



Příklad 1, Posouzení spolehlivosti sloupu

Posouzení spolehlivosti sloupu

$l \dots 6 \text{ m}$

profil HEB 300, ocel S235, $E \dots 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

imperfekce: $a \dots \pm 30 \text{ mm}$

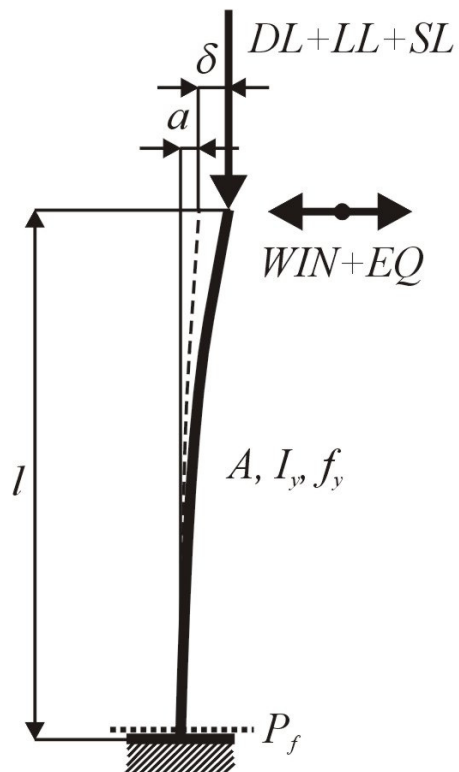


Schéma posuzované konstrukce

Zatížení	Typ	Extrémní hodnota [kN]
D	Stálé	350
L	Dlouhodobé užitné	75
S	Krátkodobé užitné	75
W	Vítr	40
EQ	Zemětřesení	$\frac{1}{20} \cdot (D + L + S) = \frac{500}{20} = 25$

Příklad 1, Posouzení spolehlivosti sloupu

Výpočet největší vodorovné výchylky δ s využitím teorie II. řádu a s uvažováním vlivu počátečních imperfekcí:

$$\delta = \frac{W + EQ + \frac{a}{l} \cdot F}{\frac{F}{l \cdot K}}$$

kde

$$K = \frac{\tan \left(l \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} \right)}{l \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}}} - 1$$

Ohybový moment v kritickém průřezu:

$$M = \frac{\delta \cdot (1 + K)}{K} \cdot F$$

Napětí v krajních vláknech:

$$S = \sigma = \left| \frac{M}{W} \right| + \left| \frac{F}{A} \right| = F \cdot \left(\frac{|\delta| \cdot (1 + K)}{K \cdot W} + \frac{1}{A} \right)$$

Příklad 1, Posouzení spolehlivosti sloupu

Mezní stav únosnosti

$$RF = R - E$$

R ... odolnost konstrukce – napětí na mezi kluzu f_y

E ... účinek zatížení – normálové napětí σ v krajních vláknech

Mezní stav použitelnosti

$$RF = \delta_{tol} - |\delta|$$

δ_{tol} ... odolnost konstrukce – limitní deformace (35 mm)

δ ... účinek zatížení – maximální vodorovná deformace

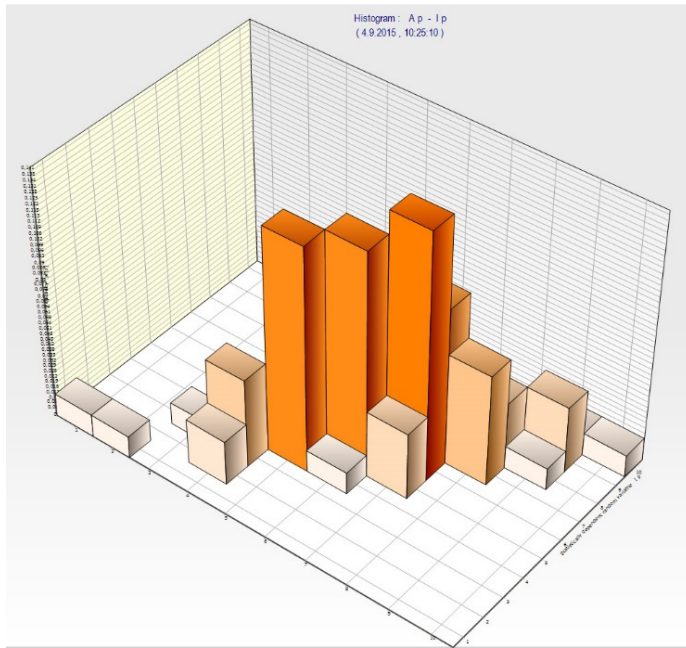
Vstupní náhodné veličiny:

- 5 typů zatížení,
- variabilita průřezových charakteristik,
- počáteční imperfekce sloupu,
- napětí na mezi kluzu f_y .

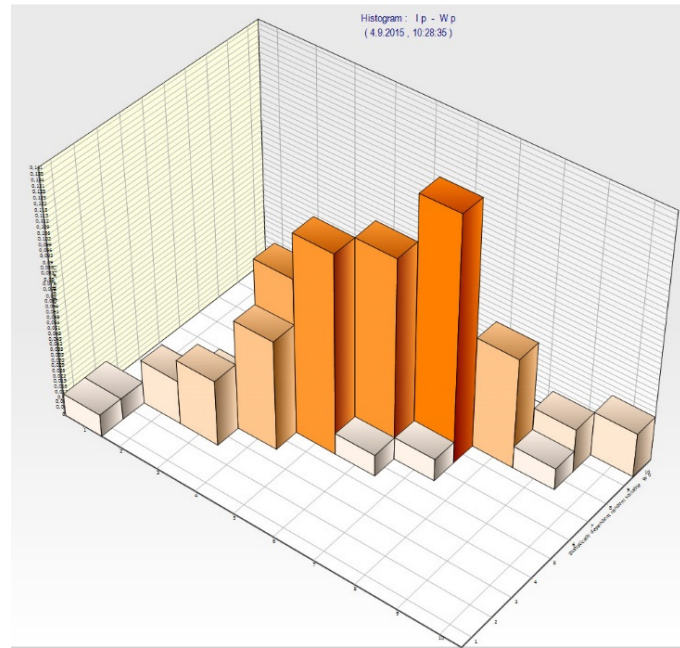
**Celkem 8 vstupních
náhodných veličin**

Příklad 1, Statisticky závislé vstupní veličiny

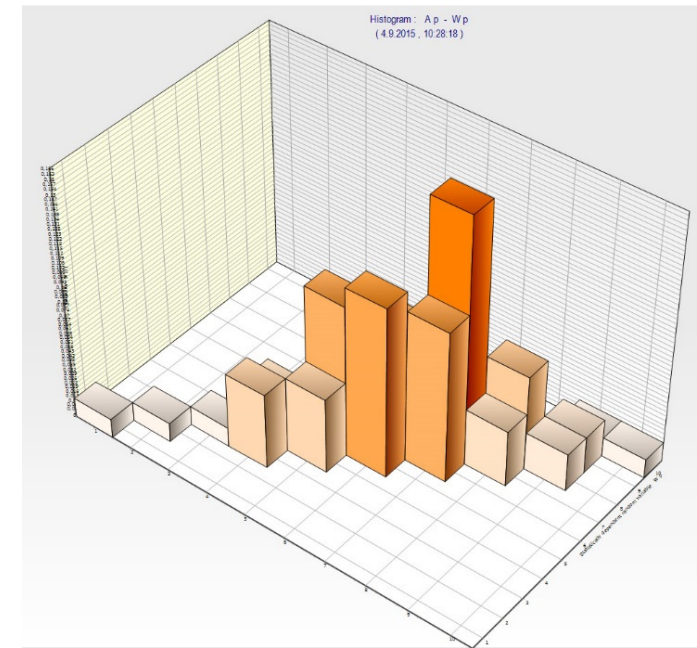
Dvojné histogramy pro pravděpodobnostní vyjádření **statisticky závislých průřezových charakteristik** profilu **HE300B**.



$A_{var}, I_{y,var}$



$I_{y,var}, W_{y,var}$



$A_{var}, W_{y,var}$

Příklad 1, Popis vstupních veličin

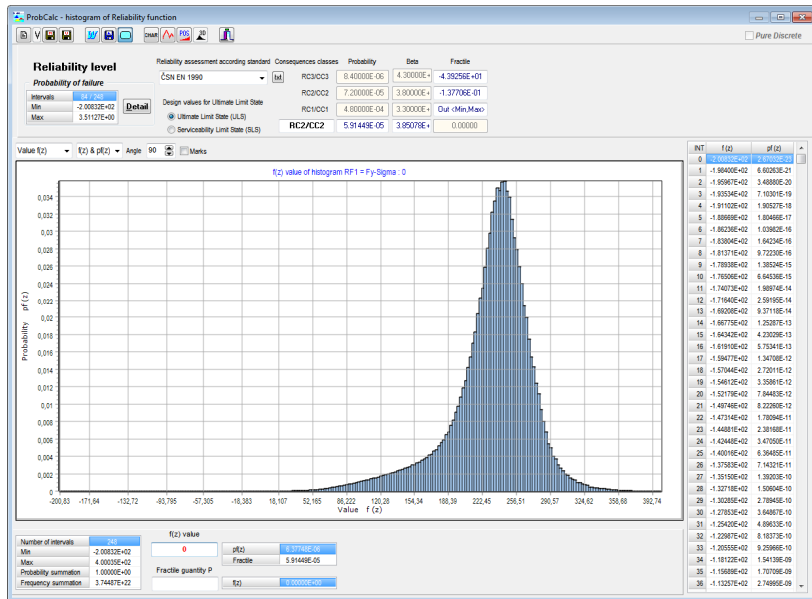
Input variable	Minimum	Maximum	N_j	Histogram
Column height l	6 m	-	-	-
Yield stress f_y	200 MPa	435 MPa	217	FY235-01
Dead load DL	260 kN	320 kN	256	DEAD1*
Long-lasting load LL	0 kN	120 kN	256	LONG1*
Short-lasting load SL	0 kN	75 kN	256	SHORT1*
Wind load WIN	-45 kN	45 kN	256	WIND1*
Earthquake EQ	-30 kN	30 kN	256	EARTH*
Geometric imperfections Imp	-30 mm	30 mm	16	IMP016
Variability of cross section properties A , W_y and I_y	-	-	10^3	3DHE300B**
Cross-sectional area A	13076 mm ²	16048 mm ²	10	1DHE300BA
Cross section modulus W_y	$1.44 \cdot 10^6$ mm ³	$1.77 \cdot 10^6$ mm ³	10	1DHE300BW
Moment of inertia I_y	$2.19 \cdot 10^8$ mm ⁴	$2.70 \cdot 10^8$ mm ⁴	10	1DHE300BI

* Histograms are taken from (Marek et al. 1995).

** 3D histogram was used for calculation considering the statistical dependence of cross section properties A , W_y , and I_y . Histograms 1DHE300BA, 1DHE300BW and 1DHE300BI are based on this, as well.

Příklad 1, Porovnání výsledků

Výsledný histogram funkce spolehlivosti RF , mezní stav únosnosti



Statisticky závislé průřezové charakteristiky

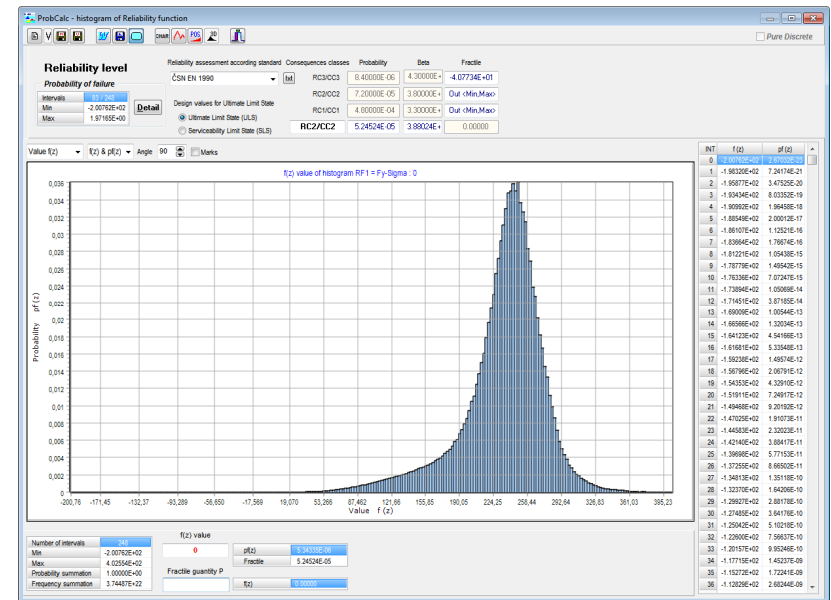
Pravděpodobnost poruchy $P_f = 5,247 \cdot 10^{-5}$ (RC2/CC2)

Doba výpočtu 9 sec.

Statisticky nezávislé průřezové charakteristiky

Pravděpodobnost poruchy $P_f = 5,133 \cdot 10^{-5}$ (RC2/CC2)

Doba výpočtu 3:20 min.



Příklad 1, Analýza dosažených výsledků

Optimization used	Calculation time	pf	RC/CC	Calculation steps
Without optimization	>>24 hours		not performed	$4.13554 \cdot 10^{18}$
Grouping of output quantities	>>24 hours		not performed	$1.75235 \cdot 10^{16}$
Grouping of input quantities	>>24 hours		not performed	$2.27541 \cdot 10^{11}$
Grouping of input variables, zone optimization	>>24 hours		not performed	$1.83501 \cdot 10^{11}$
Grouping of input variables, interval optimization	2:33:22 hours	$5.6736 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$4.59571 \cdot 10^9$
Grouping of input variables, interval and zone optimization	2:17:29 hours	$5.5559 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$3.38479 \cdot 10^9$
Grouping of input variables, interval, zone and the trend optimization	1:20:43 hours	$5.5559 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$2.04303 \cdot 10^9$
Grouping of input and output variables	37:05 min.	$5.1330 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$1.04858 \cdot 10^9$
Grouping of input and output variables, zone optimization	28:29 min.	$5.2469 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$8.22473 \cdot 10^8$
Grouping of input and output variables, parallelization (2 cores)	9:06 min.	$5.1330 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$1.04858 \cdot 10^9/2$
Grouping of input and output variables, interval optimization	4:30 min.	$5.0480 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$1.35032 \cdot 10^8$
Grouping of input and output variables, zone and interval optimization	3:35 min.	$4.8711 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$1.06021 \cdot 10^8$
Grouping of input and output variables, parallelization (8 cores)	3:20 min.	$5.1330 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$1.04858 \cdot 10^9/8$

Note: Calculations were performed using a DLL library on a PC with the following specifications: an Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU @ 3.40 GHz, MS Windows 7/64-bit/SP1; ProbCalc v.1.5.3.

Analýza výsledků
pravděpodobnostního
posouzení spolehlivosti
zaměřená na typy použitých
optimalizačních kroků s
ohledem na **statistickou**
nezávislost vstupních
náhodných veličin.

Příklad 1, Analýza dosažených výsledků

Optimization used	Calculation time	p_f	RC/CC	Calculation steps
Without optimization	>>24 hours		not performed	$9.50648 \cdot 10^{16}$
Grouping of output quantities	>>24 hours		not performed	$5.43227 \cdot 10^{14}$
Grouping of input quantities	3:52:03 hours	$5.2442 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$5.68852 \cdot 10^9$
Grouping of input and output variables	1:09 min.	$5.2467 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$3.25059 \cdot 10^7$
Grouping of input and output variables, parallelization (2 cores)	19 sec.	$5.2467 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$3.25059 \cdot 10^7/2$
Grouping of input and output variables, parallelization (8 cores)	9 sec.	$5.2467 \cdot 10^{-5}$	RC2/CC2	$3.25059 \cdot 10^7/8$

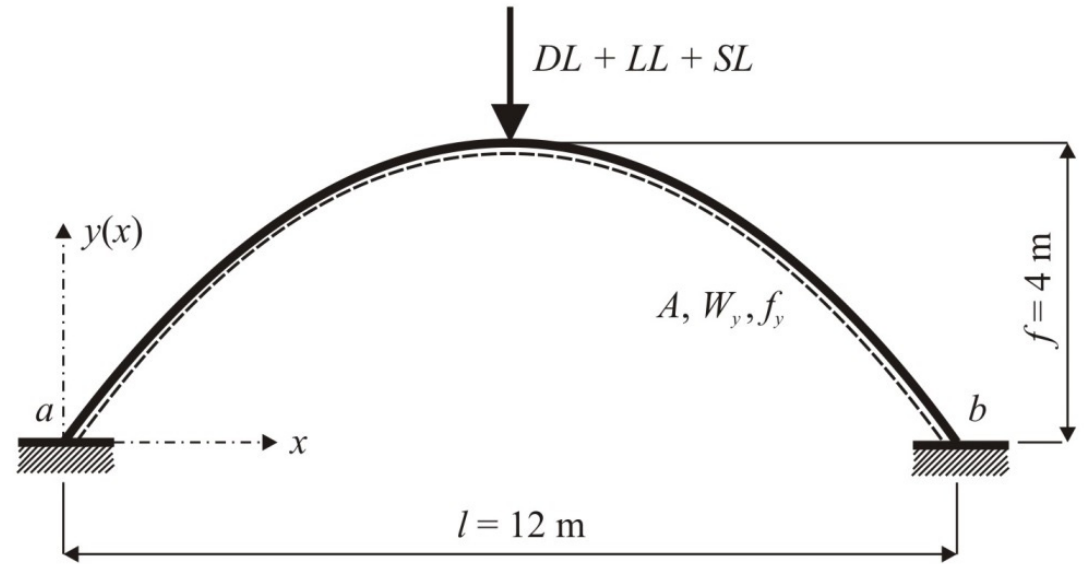
Note: Calculations were performed using a DLL library on a PC with the following specifications: an Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU @ 3.40 GHz, MS Windows 7/64-bit/SP1; ProbCalc v.1.5.3.



Analýza výsledků
pravděpodobnostního posouzení
spolehlivosti zaměřená na typy
použitých **optimalizačních kroků** s
ohledem na **statistickou závislost**
vstupních náhodných veličin.

Příklad 2, Zadání

Statické schéma jednoduché konstrukce oboustranně vetknutého **parabolického oblouku** a zatíženého kombinací tří silových zatížení.



Posudek spolehlivosti proveden s využitím interakčního vzorce:

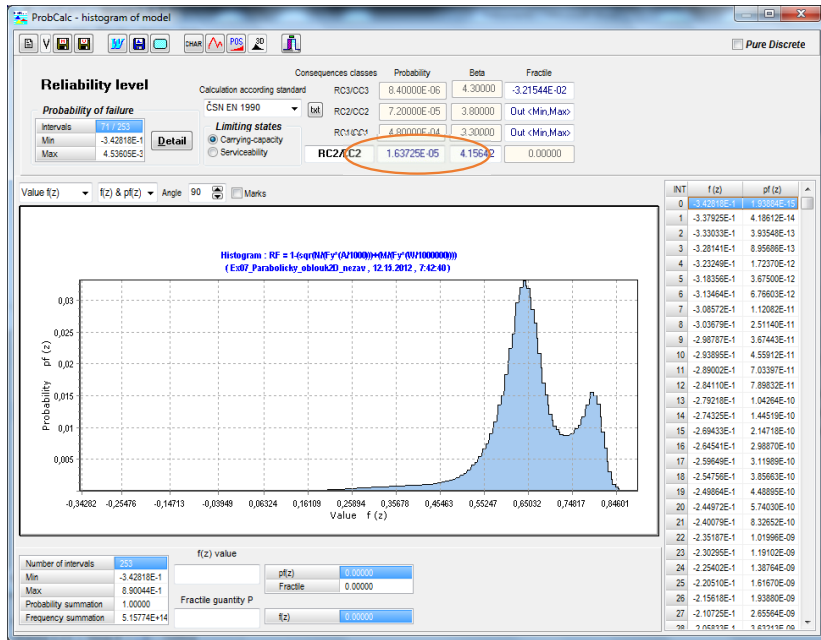
$$\left(\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}\right)^2 + \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} \leq 1$$

Pravděpodobnost poruchy P_f byla určena s využitím funkce spolehlivosti RF :

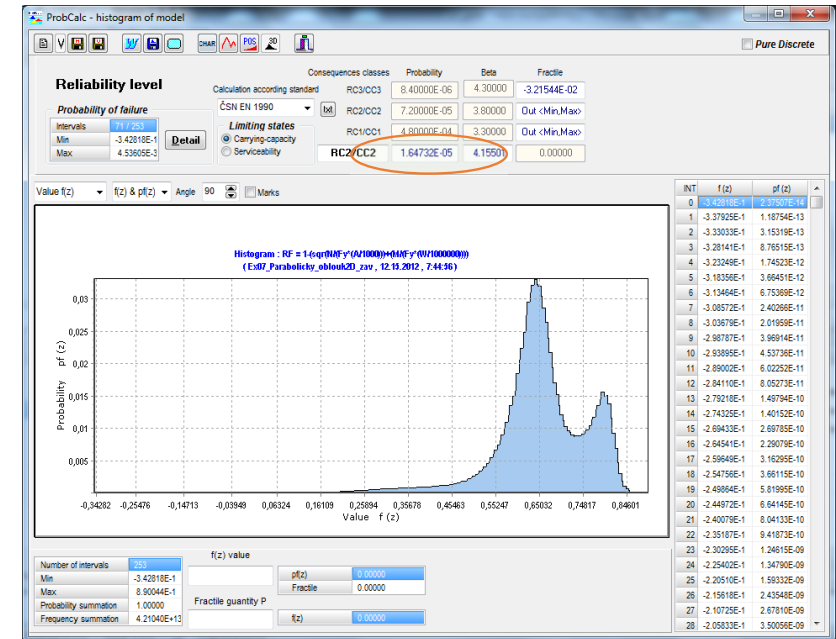
$$P_f = P(RF < 0) = P\left(1 - \left[\left(\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}}\right)^2 + \frac{M_{Ed}}{M_{Rd}}\right] < 0\right)$$

Příklad 2, Porovnání výsledků

Výsledný histogram funkce spolehlivosti RF , pravděpodobnostní výpočet se **statisticky nezávislými průřezovými charakteristikami**: průřezovou plochou A a průřezovým modulem W_y , pravděpodobnost poruchy $P_f = 1,637 \cdot 10^{-5}$.



Výsledný histogram funkce spolehlivosti RF , pravděpodobnostní výpočet se **statisticky závislými průřezovými charakteristikami**: průřezovou plochou A a průřezovým modulem W_y , pravděpodobnost poruchy $1,647 \cdot 10^{-5}$.



Praktické využití metody POPV

- Pravděpodobnostní hodnocení kombinací zatížení,
- Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti průřezů i systémů staticky (ne)určitých nosných konstrukcí,
- Pravděpodobnostní analýza betonových a drátkobetonových směsí,
- **Pravděpodobnostní návrh a posouzení svorníkové výztuže podzemních děl,**
- Posudek spolehlivosti nosných konstrukcí vystavených nárazu,
- **Pravděpodobnostní predikce šíření únavových trhlin v cyklicky namáhaných ocelových konstrukcích a mostech.**

