

Téma 5:

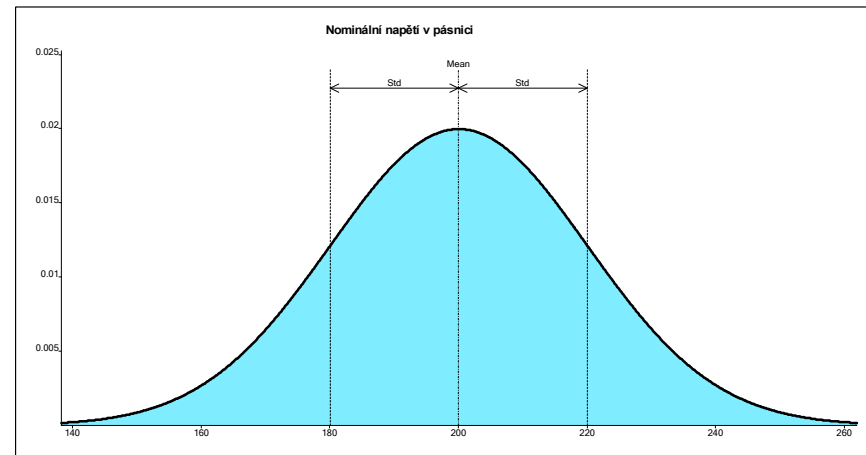
Parametrická rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny

- Parametrická rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny
- Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti, logaritmicko-normální rozdělení
- Software HistAn
- Koeficient těsnosti

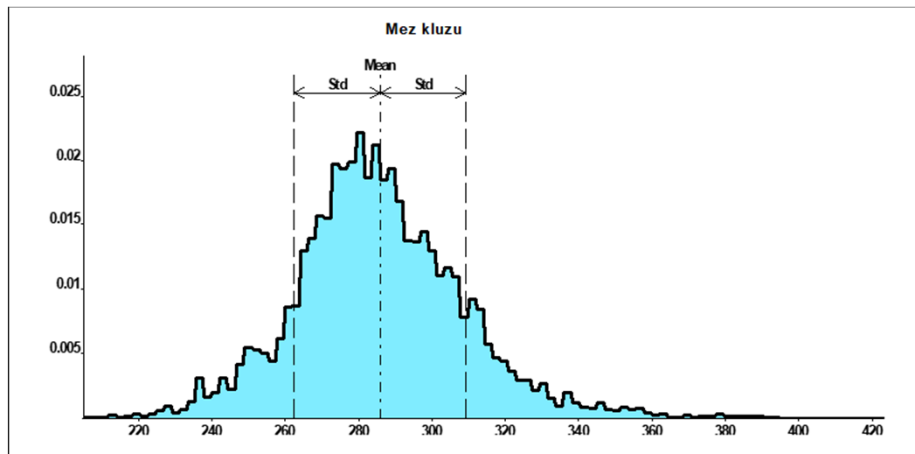
Rozdělení pravděpodobnosti

Parametrické rozdělení pravděpodobnosti – pravděpodobnosti jsou definovány analytickou funkcí – např. obecný vzorec funkce **normálního (Gaussova) rozdělení pravděpodobnosti**:

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Parametry – charakteristiky funkce hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné (např. μ **střední hodnota** a σ **směrodatná odchylka**)

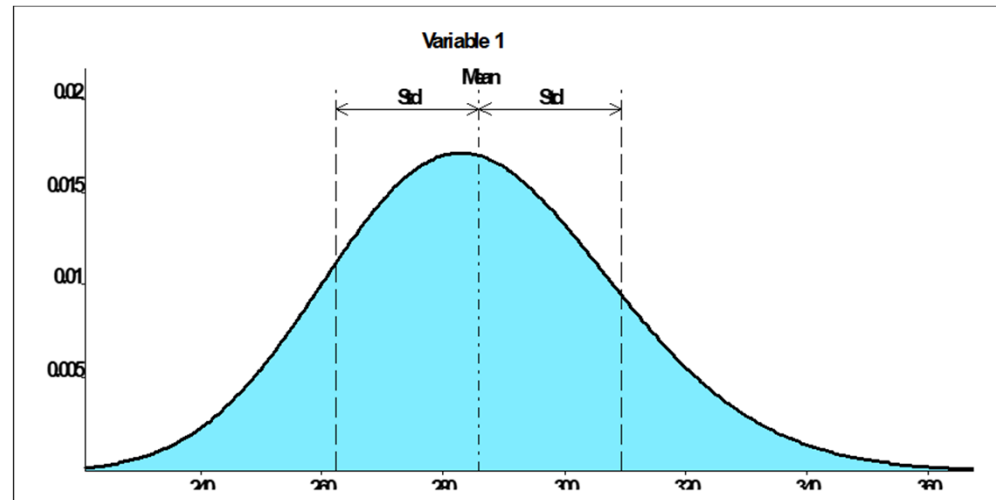


Neparametrické (empirické) rozdělení pravděpodobnosti – definováno na základě měření a monitoringu.

Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

Důležitá **parametrická rozdělení pravděpodobnosti** pro spojité náhodné veličiny:

- Rovnoměrné rozdělení
- Normální (Gaussovo) rozdělení
- Exponenciální rozdělení
- Laplaceovo rozdělení
- Logistické rozdělení
- Maxwelllovo rozdělení
- Studentovo t -rozdělení
- Fischerovo-Snedecorovo z -rozdělení
- Chí-kvadrát rozdělení



Parametry – charakteristiky funkce hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné (např. μ **střední hodnota** a σ **směrodatná odchylka**)

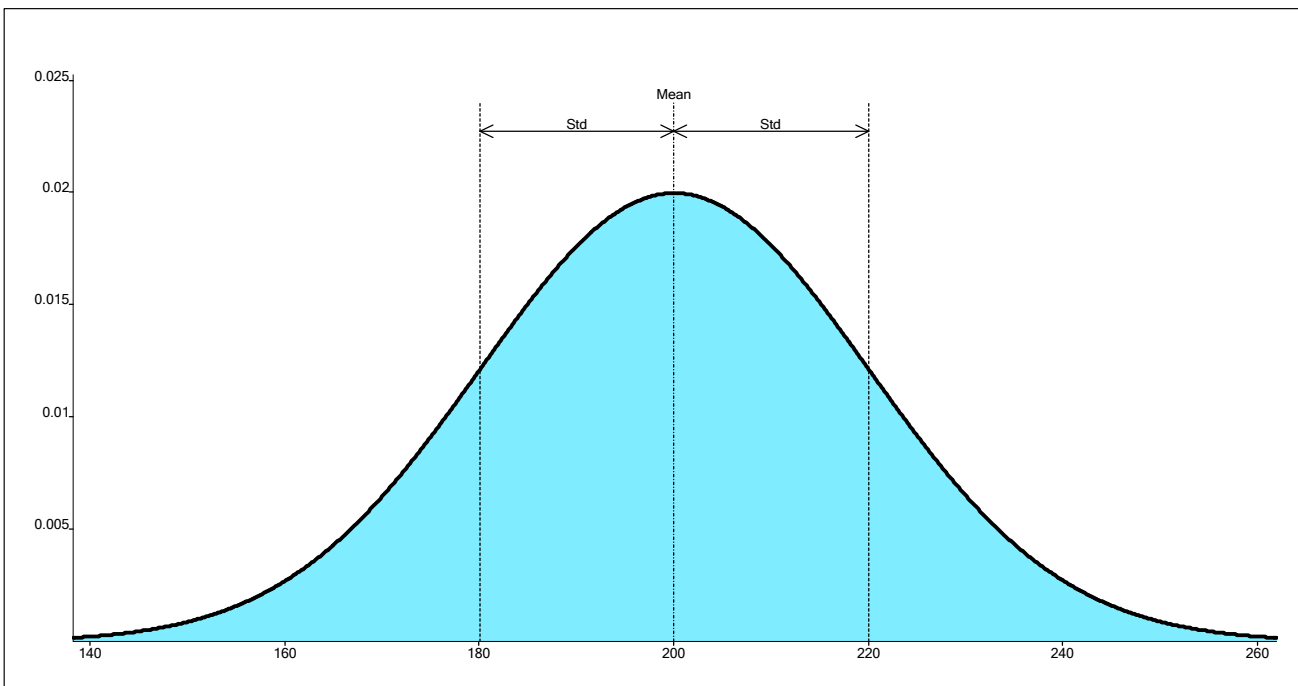
Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti

Obečný vzorec funkce **normálního (Gaussova) rozdělení pravděpodobnosti**:

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Střední hodnota (mean value) μ :

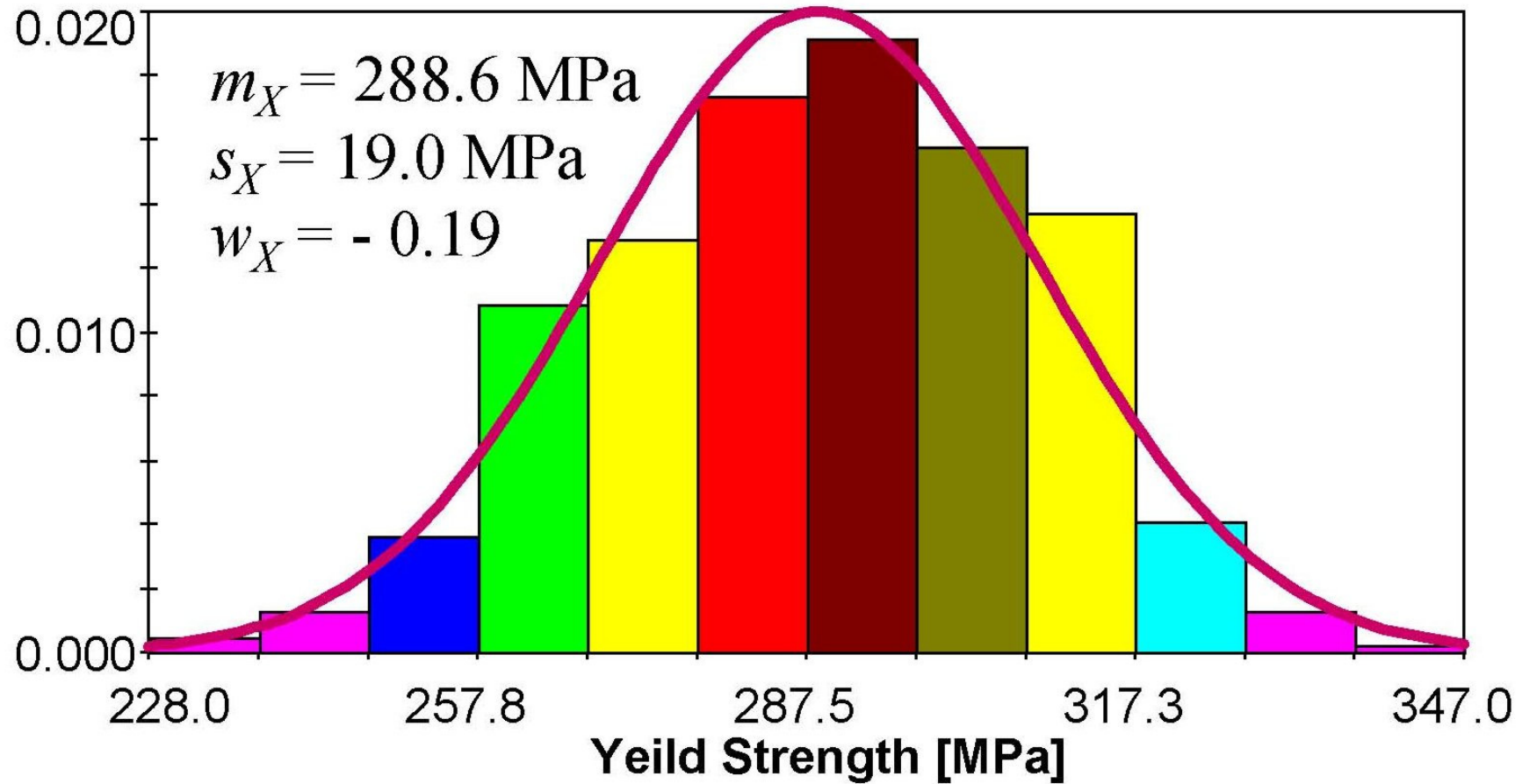
$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Směrodatná odchylka
(standard deviation) σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

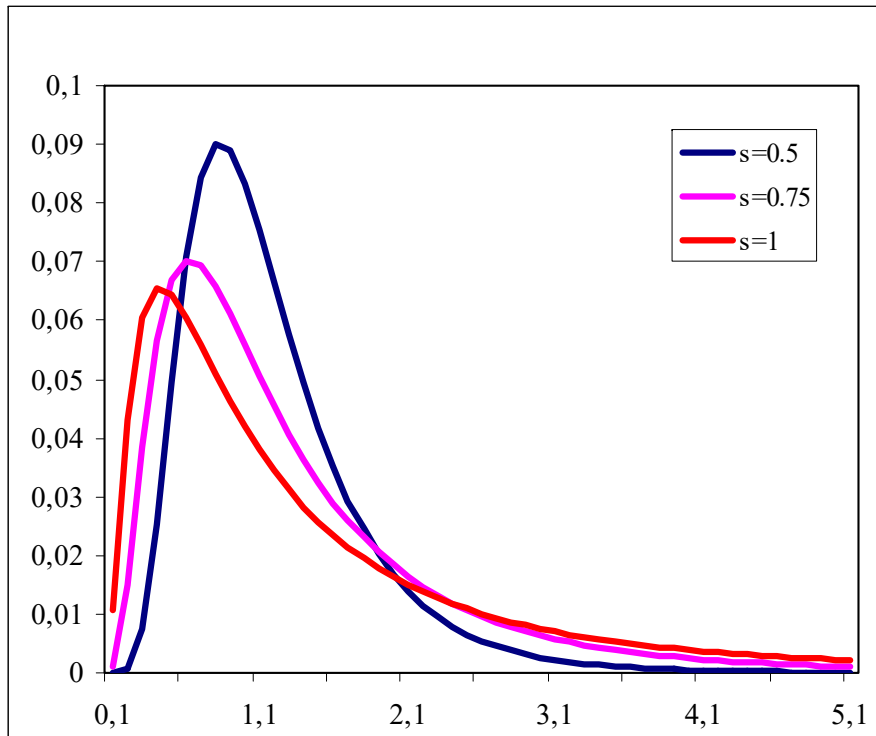
Napětí na mezi kluzu oceli S235



Log-normální rozdělení pravděpodobnosti

Obecný vzorec funkce **logaritmicko-normálního (log-normálního) rozdělení pravděpodobnosti**:

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$



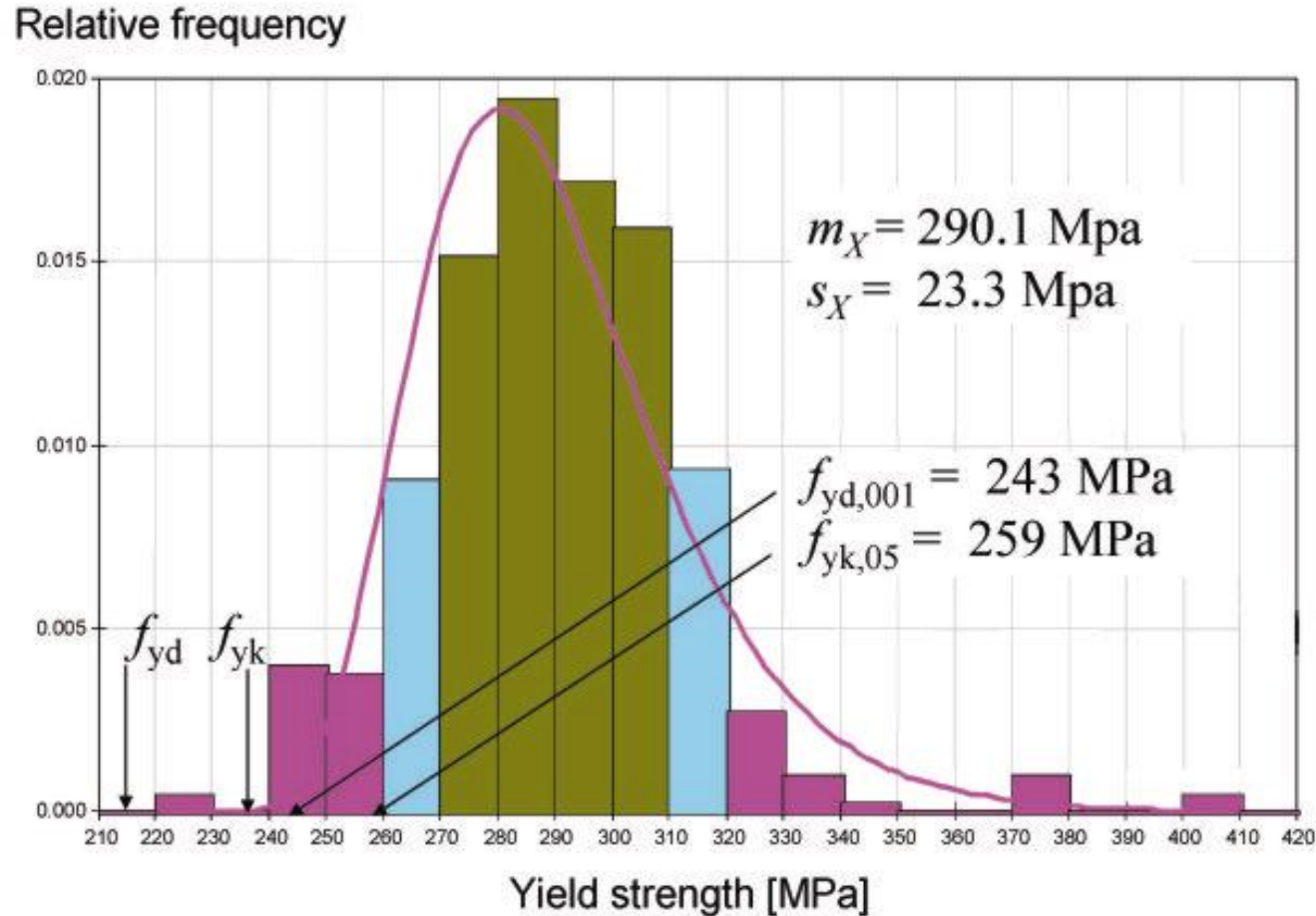
Střední hodnota (mean value) μ :

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

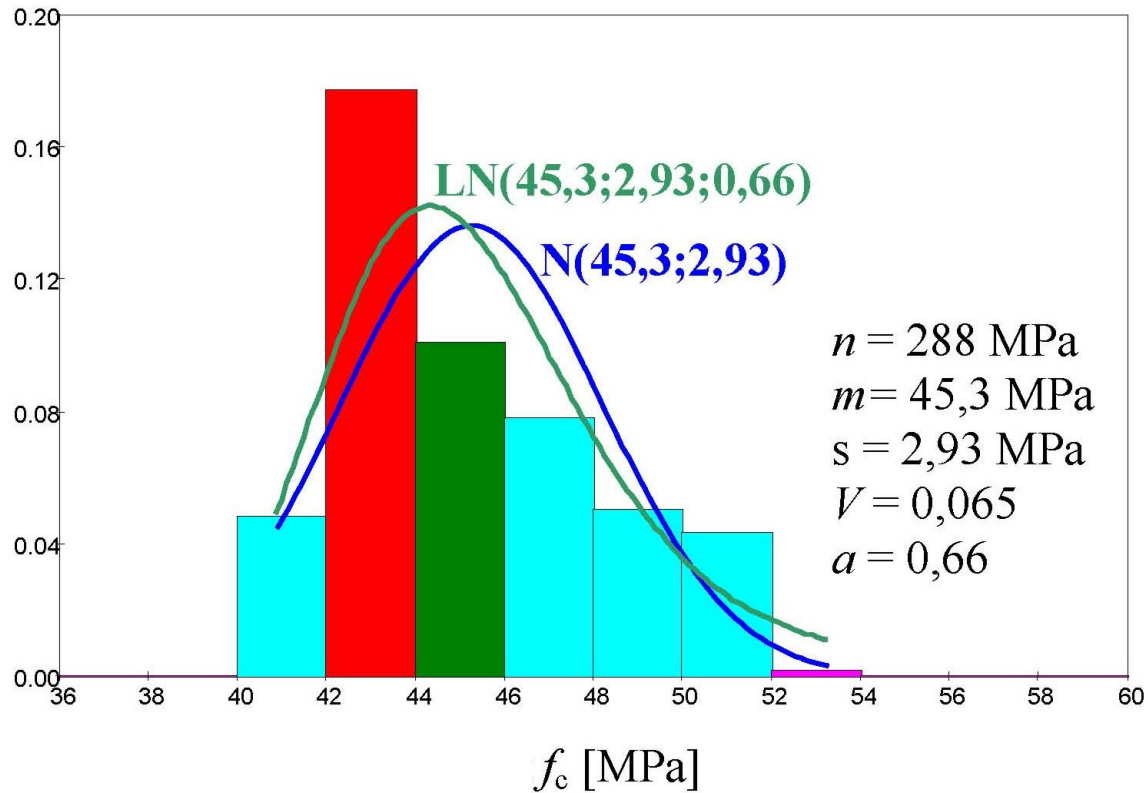
Směrodatná odchylka (standard deviation) σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \mu)^2}$$

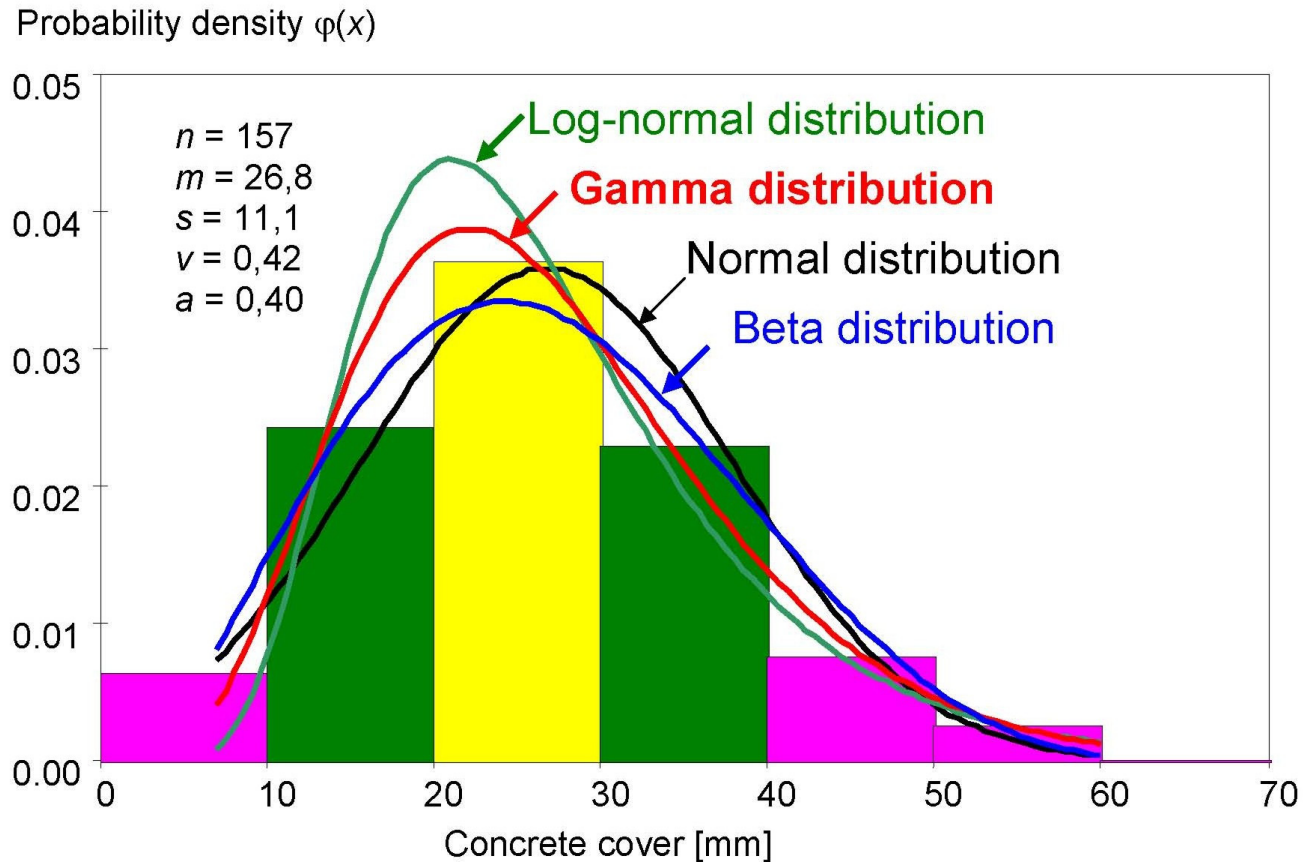
Napětí na mezi kluzu oceli S235



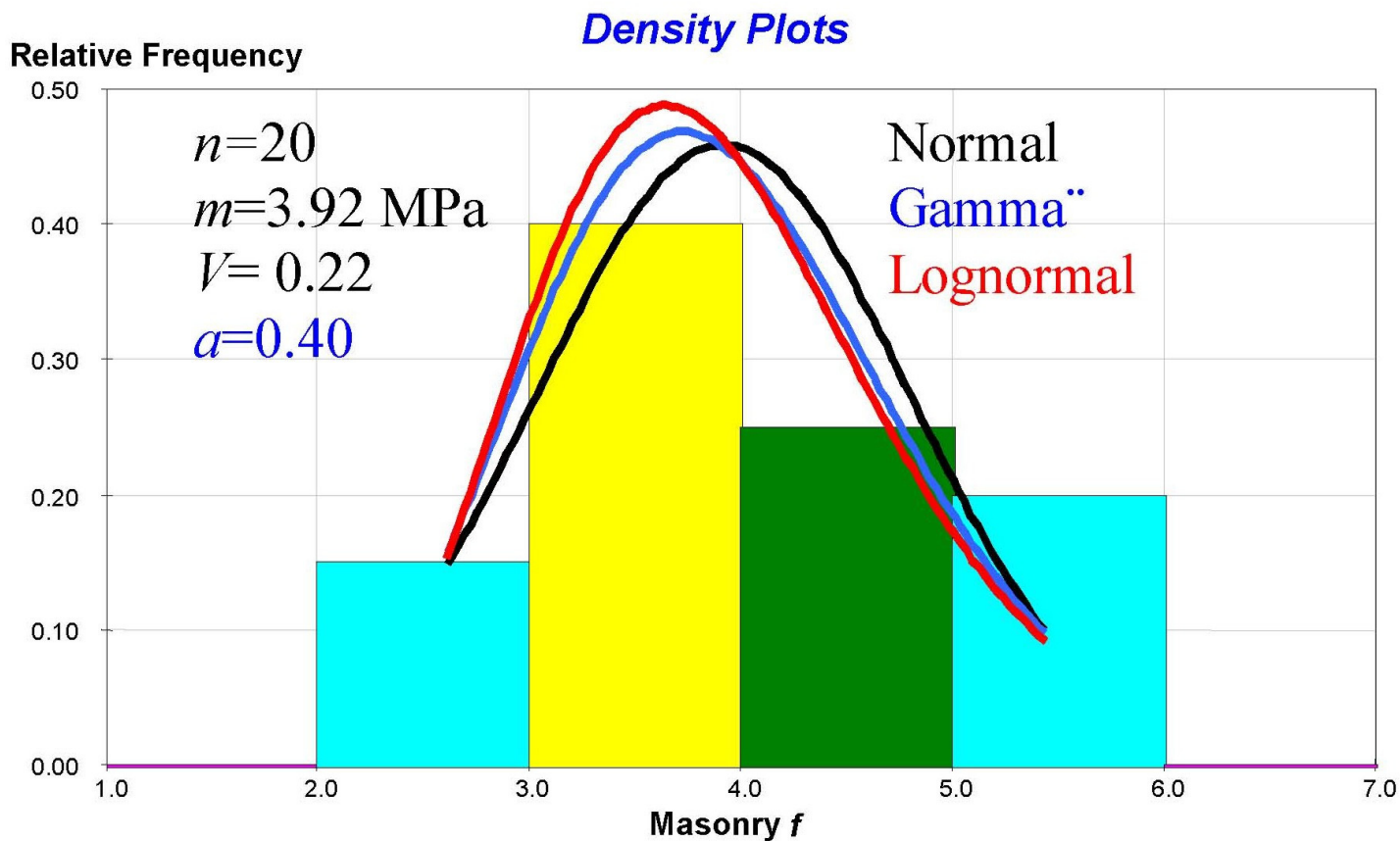
Pevnost betonu v tlaku



Krycí vrstva betonu



Pevnost zdiva v tlaku



Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

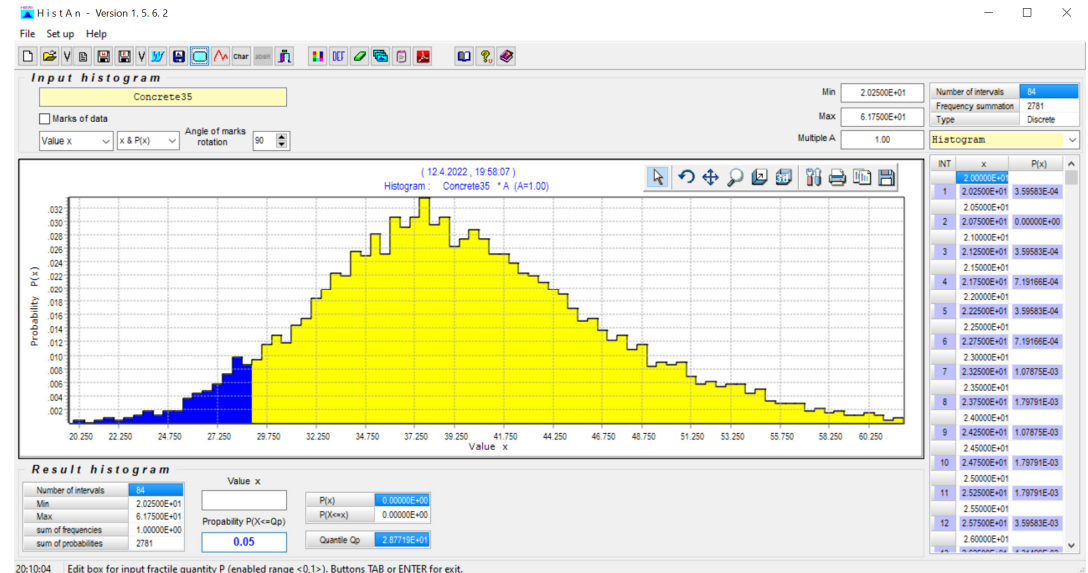
Distribution	Abbreviation	PDF	Parameters
Kappa	KAP	$F(x) = \left\{ 1 - \gamma_2 [1 - \gamma_1 (x - \alpha) / \beta]^{1/\gamma_1} \right\}^{1/\gamma_2}$ $f(x) = \beta^{-1} [1 - \gamma_1 (x - \alpha) / \beta]^{(1/\gamma_1) - 1} \times [F(x)]^{1 - \gamma_2}, \beta > 0$	4
Generalized extreme value type III	GEV	$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \gamma \frac{x - \alpha}{\beta} \right)^{-1/\gamma - 1} \exp \left[- \left(1 + \gamma \frac{x - \alpha}{\beta} \right)^{-1/\gamma} \right]$	3
Generalized Logistic	GLO	$f(x) = \frac{\gamma \exp \left(- \frac{x - \alpha}{\beta} \right)}{\beta \left(1 + \exp \left(- \frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right)^{\gamma + 1}}$	3
Generalized Pareto	GPA	$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma(x - \alpha)}{\beta} \right)^{-1/\gamma - 1}$	3
Lognormal	LN3	$f(x) = \frac{1}{(x - \gamma)\sqrt{2\pi}\beta} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x - \gamma) - \alpha}{\beta} \right)^2 \right]$	3
Pearson Type III	P3	$f(x) = \frac{1}{\beta^\gamma \Gamma(\gamma)} (x - \alpha)^{\gamma - 1} \exp \left(- \frac{x - \alpha}{\beta} \right)$	3
Exponential	E	$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	2
Gumbel	G	$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp \left[\frac{x - \alpha}{\beta} - \exp \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right]$	2
Normal	N	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta^2} \exp \left(- \frac{(x - \alpha)^2}{2\beta^2} \right)$	2
Logistic	L	$f(x) = \frac{\exp \left(- \frac{x - \alpha}{\beta} \right)}{\beta \left(1 + \exp \left(- \frac{x - \alpha}{\beta} \right) \right)^2}$	2
Uniform	U	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a < x < b \\ 0, & x < a \text{ or } x > b \end{cases}$	1

Distribution	Abbreviation	PDF	Parameters
Gamma	G2	$f(x) = \frac{x^{\gamma - 1} \exp \left(- \frac{x}{\beta} \right)}{\Gamma(\gamma) \beta^\gamma}$	2
Generalized Pareto	GP2	$f(x) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma x}{\beta} \right)^{(-1/\gamma - 1)}$	2
Lognormal	LN2	$f(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2} \right)$	2
Weibull	W2	$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma - 1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\beta} \right)^\gamma \right], x \geq 0$	2

Programový nástroj HistAn

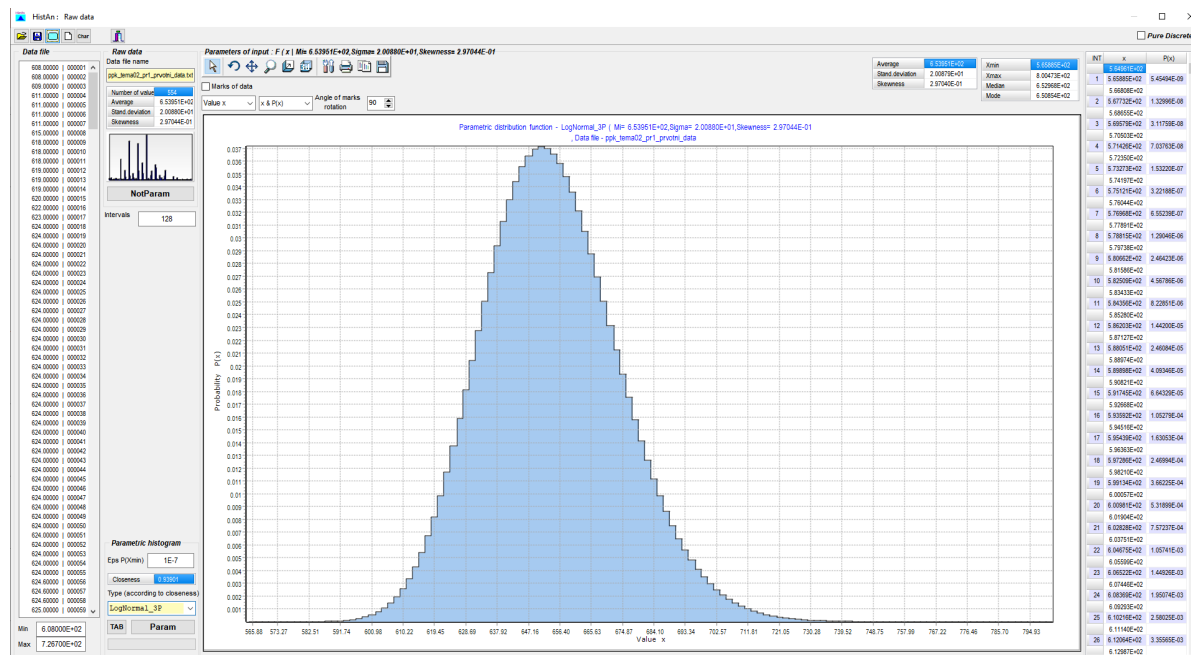
Program umožňuje tvorbu a detailní analýzu histogramů náhodných proměnných:

- **Minimální** a **maximální hodnoty** náhodné proměnné
- **Počet tříd** (intervalů) v histogramu a četnosti v nich definované
- **Jednoduché pravděpodobnostní výpočty** s histogramy (např. stanovení hodnoty p -kvantilu)
- Určení **kombinace** (součtu) několika vstupních **histogramů**
- Vytvoření histogramů s **parametrickým rozdělením** pravděpodobnosti
- Zpracování **naměřených** (prvotních) **dat**



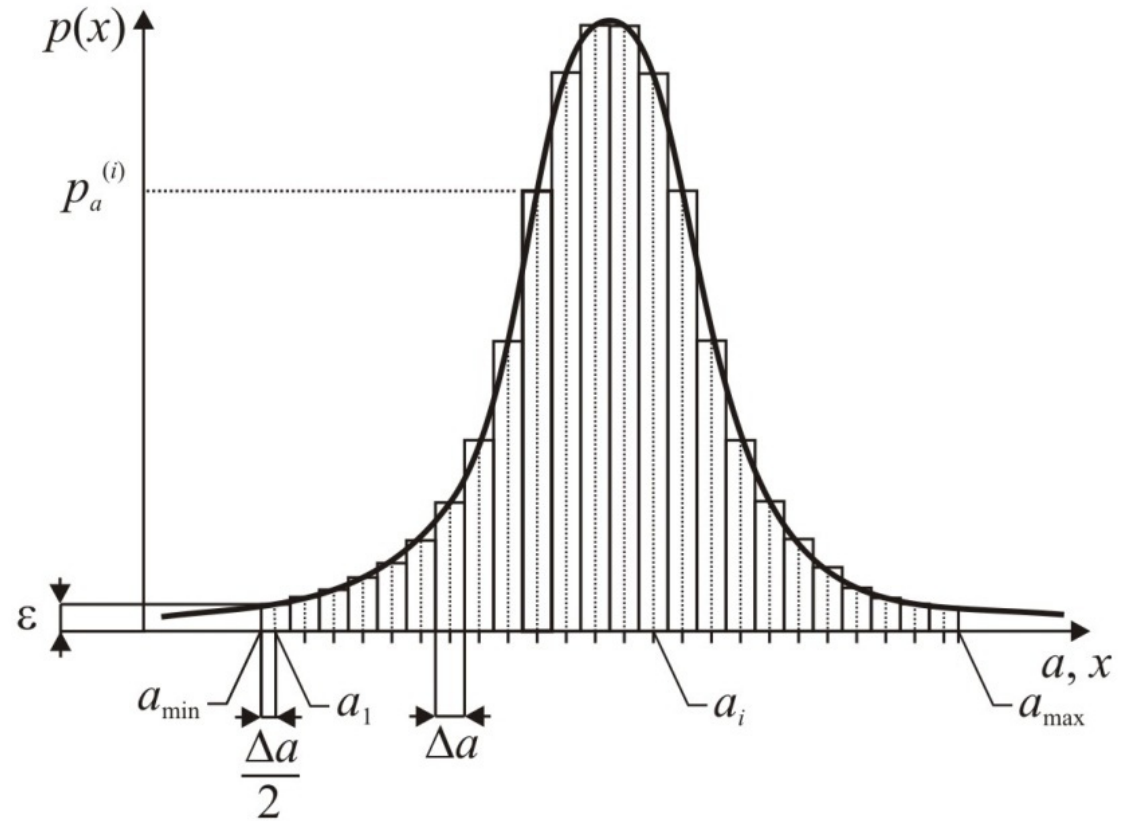
HistAn: Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

- Implementace modulu pro vkládání naměřených dat a pro jejich vyhodnocování.
- Tvorba histogramů s neparametrickým a parametrickým rozdělením (23 typů) s možností volby počtu intervalů.
- Volba vhodného parametrického rozdělení pravděpodobnosti s využitím **koeficientu těsnosti**.



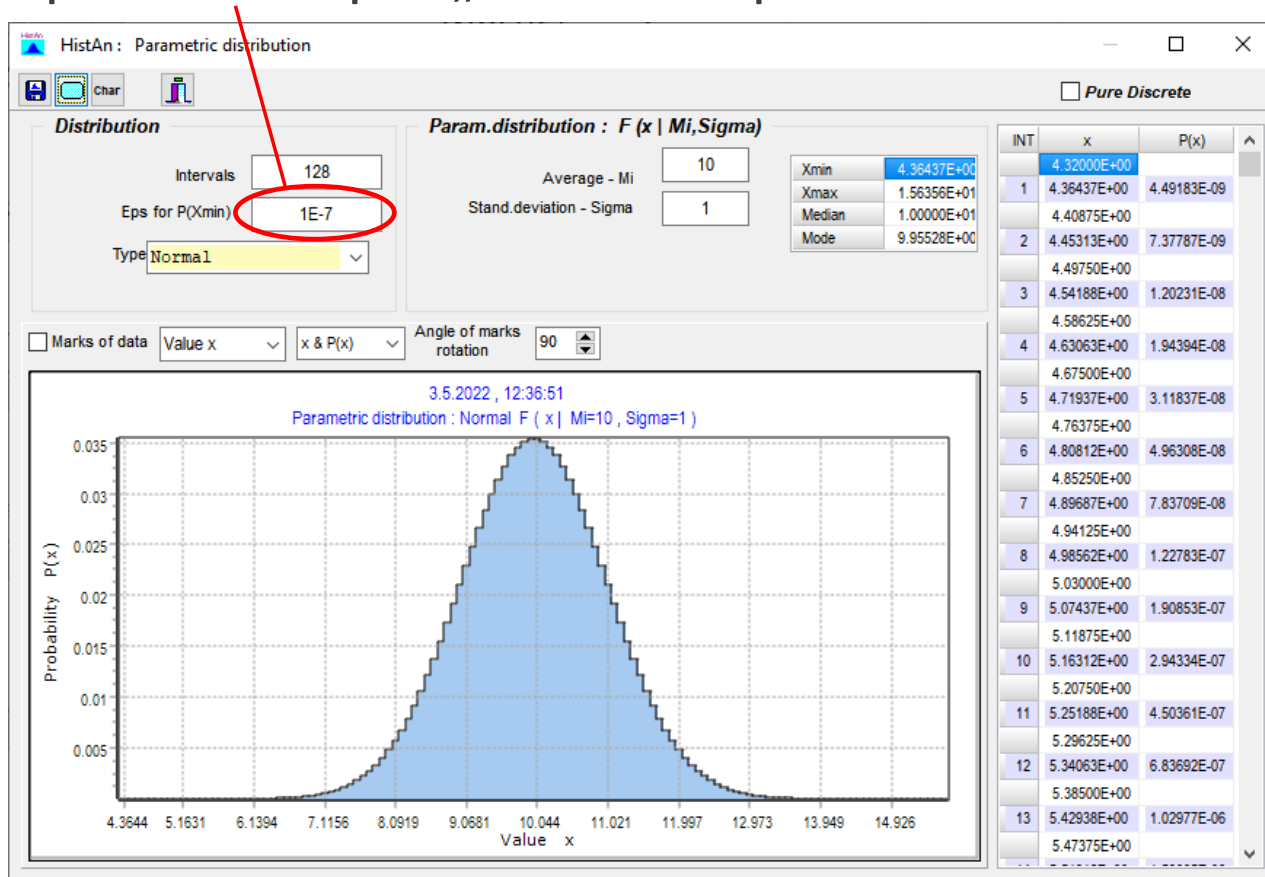
Histogram náhodné proměnné

Histogram spojité náhodné veličiny s diskretní (**discrete**) aproximací omezeného parametrického rozdělení pravděpodobnosti



HistAn: Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

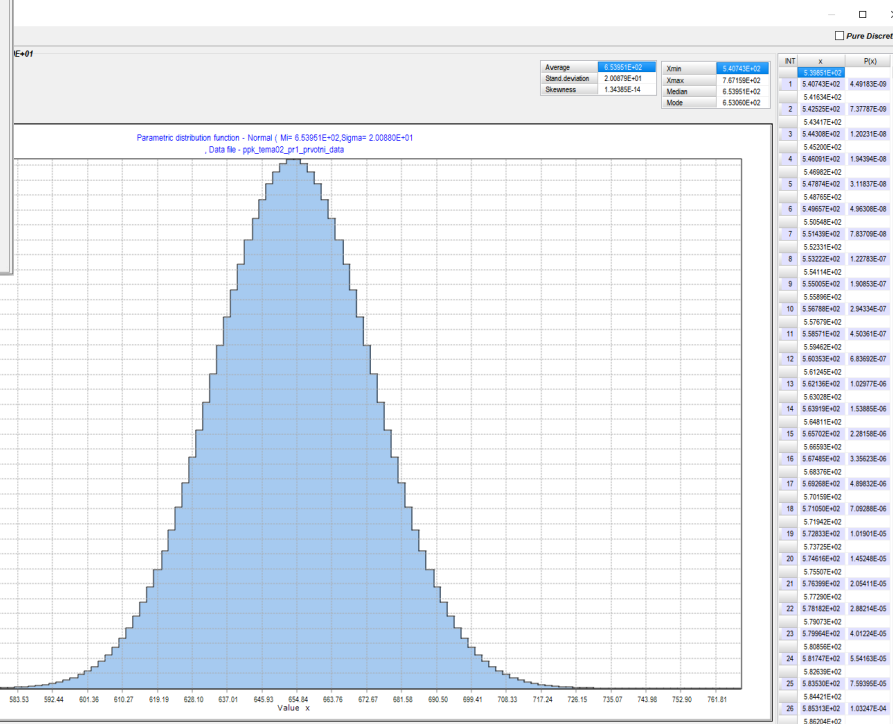
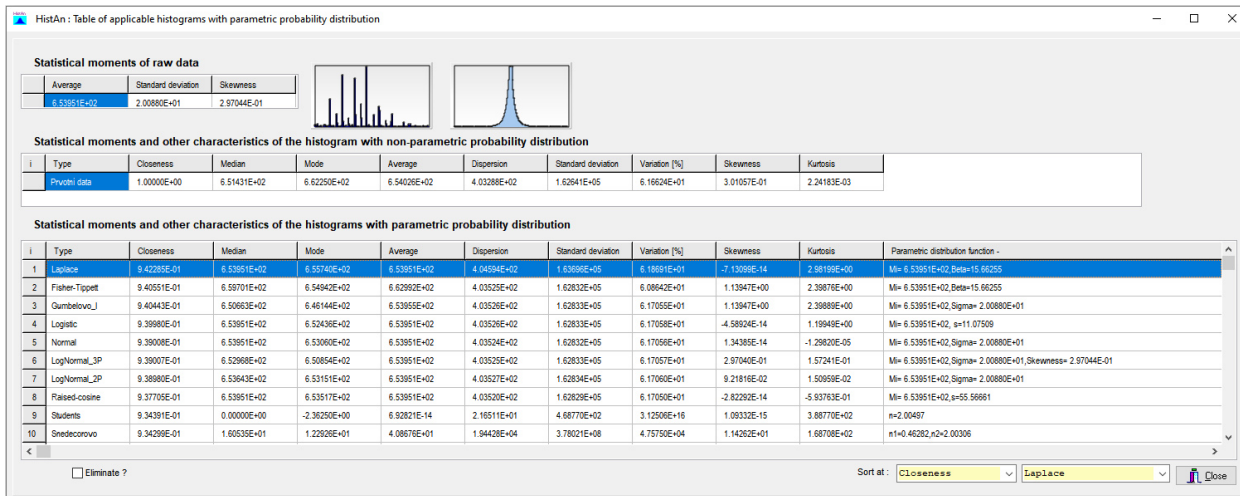
Pravděpodobnost pro „useknutí“ parametrického rozdělení



- Normální
- LogNormální
- Gumbel I a II
- Raised-Cosine
- Cauchy
- Fischer-Tippett
- Laplace
- Logistic
- Weibull
- Rayleigh
- Lévy
- Studentovo
- Beta v nule
- Beta obecné
- Gama
- Snedecorovo
- Pareto
- Uniform
- Triangular
- Exponenciální
- χ^2
- Half-Logistic

HistAn: Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

Odvozené statistické parametry



Výběr vhodného parametrického rozdělení pravděpodobnosti podle koeficientu těsnosti

Koeficient těsnosti

$$\frac{s_Y^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_{y,x}^2 + \frac{2}{n} \cdot \sum_i (y_i - Y_i) \cdot (Y_i - \bar{y})}{s_y^2}$$

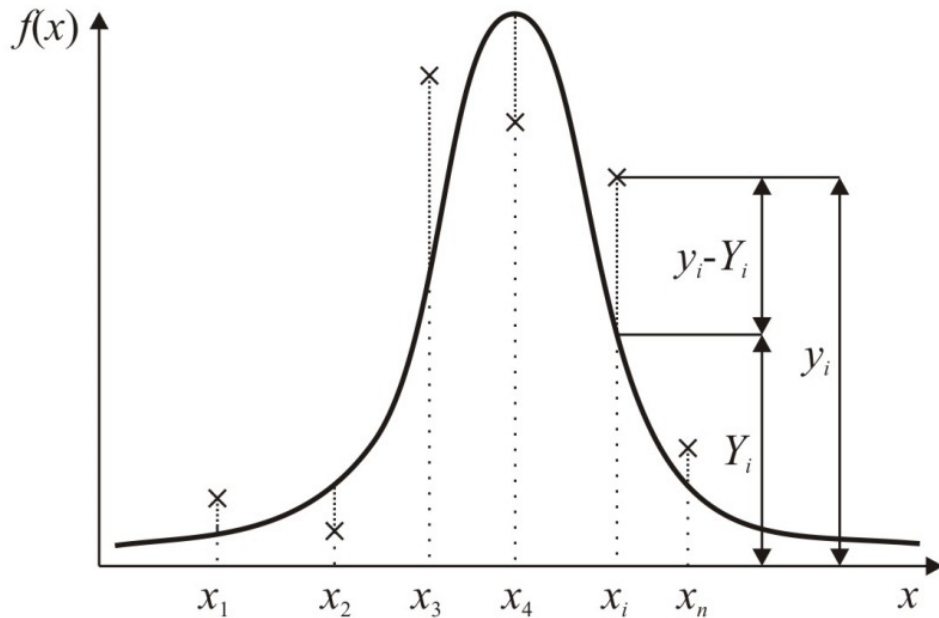
$$\frac{s_Y^2}{s_y^2} \in \langle 0,1 \rangle$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (Y_i - \bar{y})^2$$

$$s_{y,x}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (y_i - Y_i)^2$$

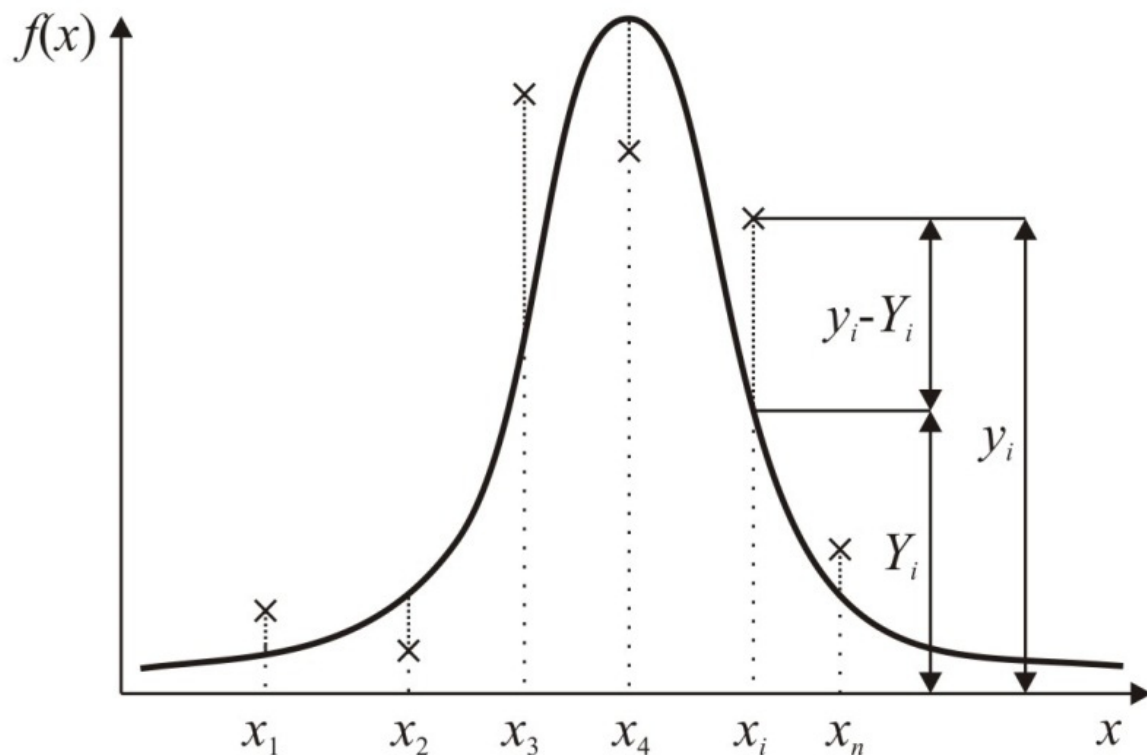
rozptyly
pro n intervalů



Y_i ... hodnota funkce hustoty
pravděpodobnosti parametrického
rozdělení v příslušné hodnotě x_i

\bar{y} ... střední hodnota ze všech y_i

Reziduální (zbytkový) součet čtverců



Rozptyl

$$s_{y,x}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (y_i - Y_i)^2$$

Žádoucí nejmenší hodnota

Y_i ... hodnota funkce hustoty
pravděpodobnosti parametrického
rozdělení v příslušné hodnotě x_i

HistAn: Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

