

Téma 3:

Simulační metoda Monte Carlo

- Zákon velkých čísel
- Generátor (pseudo)náhodných čísel
- Ukázkový příklad
- Úvod do metody SBRA, software AntHill

Pravděpodobnostní metody

Simulační metody

Prostá simulace Monte Carlo,

Stratifikované simulační techniky:

- Latin Hypercube Sampling – LHS,
- Stratified Sampling – SC.

Pokročilé simulační metody:

- Importance Sampling – IS,
- Adaptive Sampling – AS,
- Axis Orthogonal Importance Sampling,
- Directional Sampling – DS,
- Line Sampling – LS,
- Design Point Sampling,
- Subset Simulations,
- Descriptive Sampling,
- Slice Sampling.

Aproximační metody

- First (Second) Order Reliability Method - FORM (SORM),
- Response Surface Method – RSM,
- Perturbační techniky – např. Stochastic Finite Element Method (SFEM),
- Artificial Neural Network – ANN.

Numerické metody

(bez simulací a aproximací)

- Point Estimate Method – PEM,
- Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet – POPV (Direct Optimized Probabilistic Calculation – DOProC).

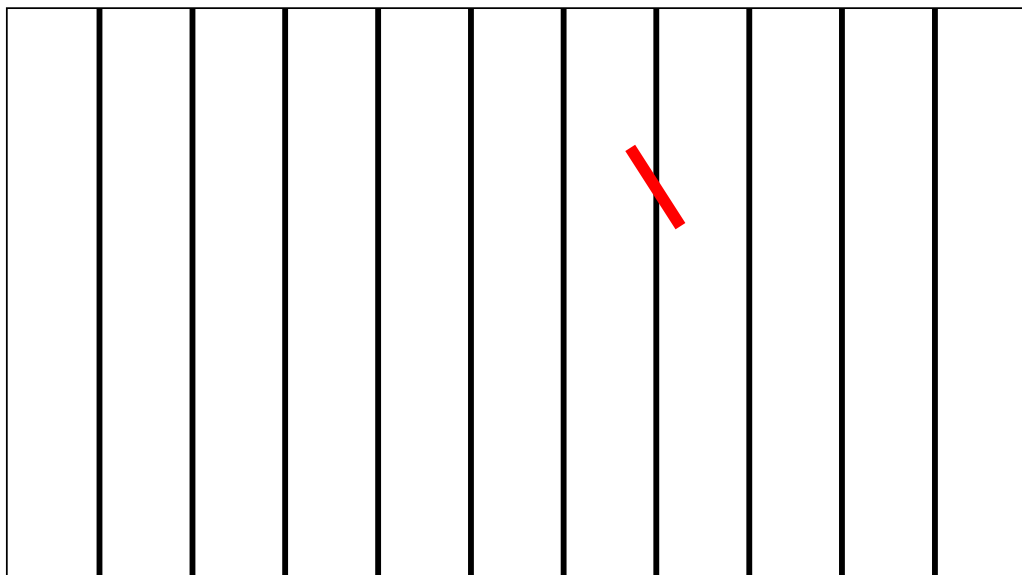
Přehled např. Krejsa & Králik (2015)

Buffonova jehla

Jedním z nejstarších popsaných případů využití metody je problém tzv. **Buffonovy jehly**, nazvaný po francouzském matematikovi **Georges-Louis Leclerc Comte de Buffonovi**, který se roku 1777 pokoušel odhadnout hodnotu Ludolfova čísla π náhodným vrháním jehly na linkovaný papír.



Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon
(1707-1788)



Pravděpodobnost jevu, kdy jehla stejné délky, jako je vzdálenost mezi linkami, po dopadu na papír zůstane ležet na papíře tak, že protíná některou z linek, je rovna:

$$p = \frac{2}{\pi}$$

Bližze vizte např. <https://mste.illinois.edu/activity/buffon/>

Výpočet Ludolfova čísla

Podobně lze stanovit hodnotu Ludolfova čísla π následujícím způsobem:

Obsah čtvrtkružnice:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

Obsah čtverce:

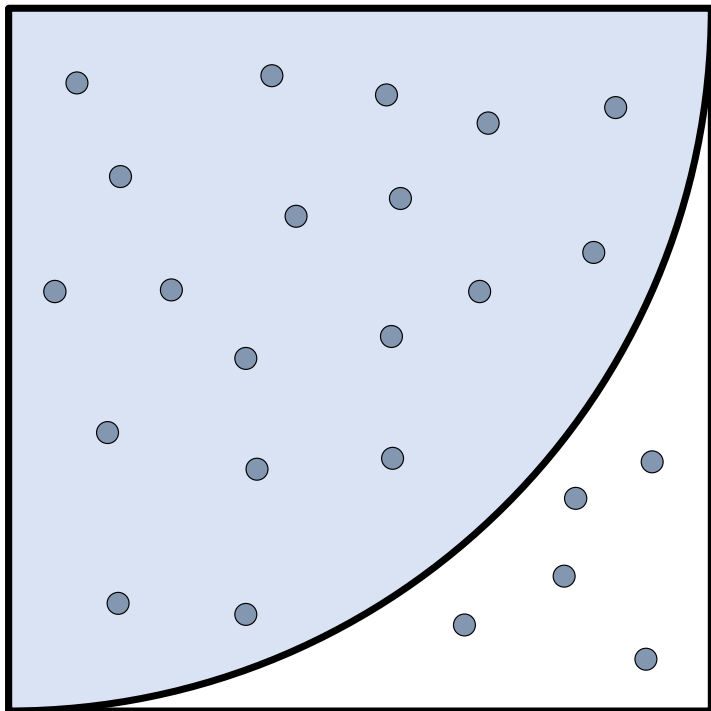
$$S_2 = r^2$$

Poměr obou ploch:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$$

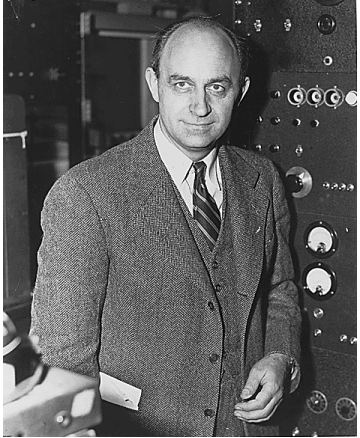
Ludolfovo číslo π
je pak rovno:

$$\pi = 4 \cdot \frac{S_1}{S_2}$$



Základem výpočtu Ludolfova čísla π je čtverec o straně r , do kterého se náhodně hází malý předmět – např. kámen. Výsledný poměr počtu všech hodů a hodů do čtvrtkruhu stanoví hodnotu Ludolfova čísla π pomocí tzv. **simulací**.

První systematické využití metody



Enrico Fermi
(1901-1954)

Pravděpodobně první systematické využití **simulační metody Monte Carlo** s reálnými výsledky je datováno až k roku 1930, kdy Nobelovou cenou oceněný italský fyzik **Enrico Fermi** tento přístup využíval ke generování náhodných čísel k výpočtu vlastností v té době nově objevené částice – neutronu.

Název metody pochází právě od **Stanislawa Ulama**, který ji pojmenoval podle známého kasina v Monaku (Ulamův strýc zde sázel). Metoda se dříve používala pod označením **statistical sampling**.

Náhodnost jevů a opakování jejich výskytu jsou identické k činnostem prováděných v kasinech (ruleta je jednoduchý fyzikální generátor náhodných čísel, podobně jako např. hrací kostka).



Stanislaw Ulam
(1909-1984)

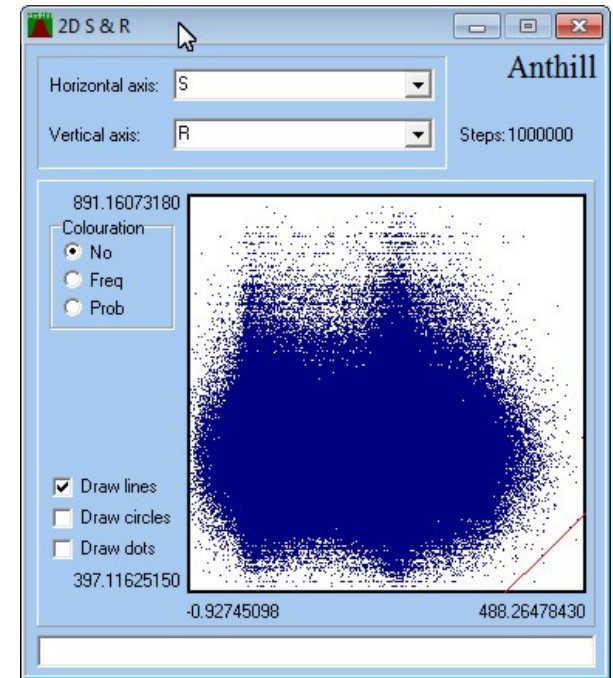
Numerická integrace metodou Monte Carlo

Simulační metoda Monte Carlo je využívána zejména pro výpočet integrálů hustot pravděpodobností spojitých náhodných veličin, zejména vícerozměrných, kde běžné metody nejsou efektivní.

Simulační metoda Monte Carlo se používá zejména pro:

- simulaci náhodných jevů (experimentů),
- numerickou integraci určitých integrálů,
- numerické řešení diferenciálních rovnic.

Z principů **simulační metody Monte Carlo** vychází řada pravděpodobnostních metod, např. **SBRA** (Simulation-Based Reliability Assessment).



Výhody a nevýhody metody Monte Carlo

Simulační metoda Monte Carlo je založena na provádění náhodných experimentů s modelem systému a jejich vyhodnocení. Výsledkem provedení velkého množství experimentů je obvykle pravděpodobnost analyzovaného náhodného jevu.

Výhodou je **jednoduchá implementace**, **nevýhodou** pak relativně **malá efektivita** a **nízká přesnost**:

$$err = \sqrt{\frac{B}{N}}$$

kde N je počet náhodných experimentů (simulací, simulačních kroků, historií, samplů) a B je konstanta, vyjadřující povahu řešeného problému.

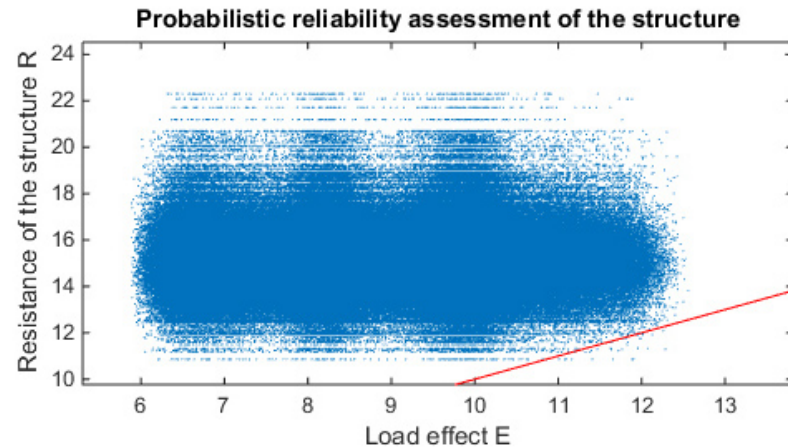
Pro zvýšení přesnosti výsledku o jeden řád je teoreticky nutné zvýšit počet simulací alespoň o dva řády.

Chyba výpočtu v simulační metodě Monte Carlo

Při pravděpodobnostním posouzení závisí **přesnost odhadu** výsledné pravděpodobnosti poruchy P_f nejenom na celkovém počtu simulací N , ale také na řádu určované pravděpodobnosti poruchy P_f .

Variační koeficient pravděpodobnosti poruchy v_{P_f} lze pro malé hodnoty výsledné pravděpodobnosti definovat ve tvaru:

$$v_{P_f} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot P_f}}$$



$$P_f = \frac{N_f}{N} \leq P_d$$

Chyba výpočtu v simulační metodě Monte Carlo

Např.: Pokud se bude odhad pravděpodobnosti poruchy P_f pohybovat v řádu 10^{-4} a výpočet byl proveden s počtem simulačních kroků $N = 10^4$, variační koeficient pravděpodobnosti poruchy se bude rovnat:

$$v_{P_f} = \frac{1}{\sqrt{10^4 \cdot 10^{-4}}} = 1$$

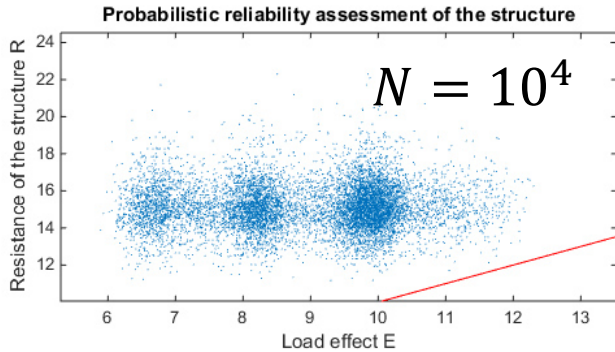
Odhad chyby výsledné pravděpodobnosti poruchy P_f je tedy 100%.

Zvýšením počtu simulací $N = 10^6$ pak variační koeficient pravděpodobnosti poruchy dosahuje příznivější hodnoty:

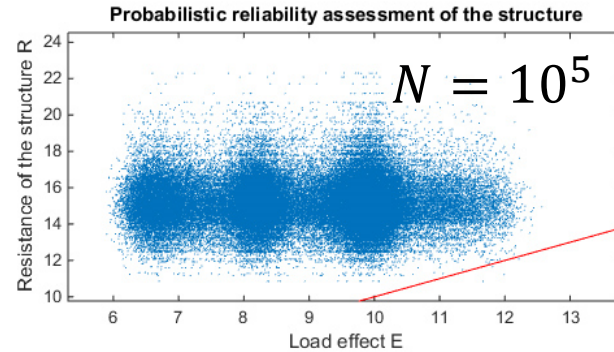
$$v_{p_f} = \frac{1}{\sqrt{10^6 \cdot 10^{-4}}} = 0,1$$

a výsledek by se oproti přesnému řešení měl lišit nejvýše o 10%.

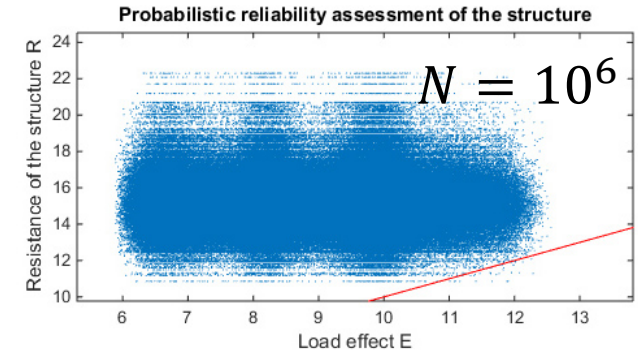
Chyba výpočtu v simulační metodě Monte Carlo



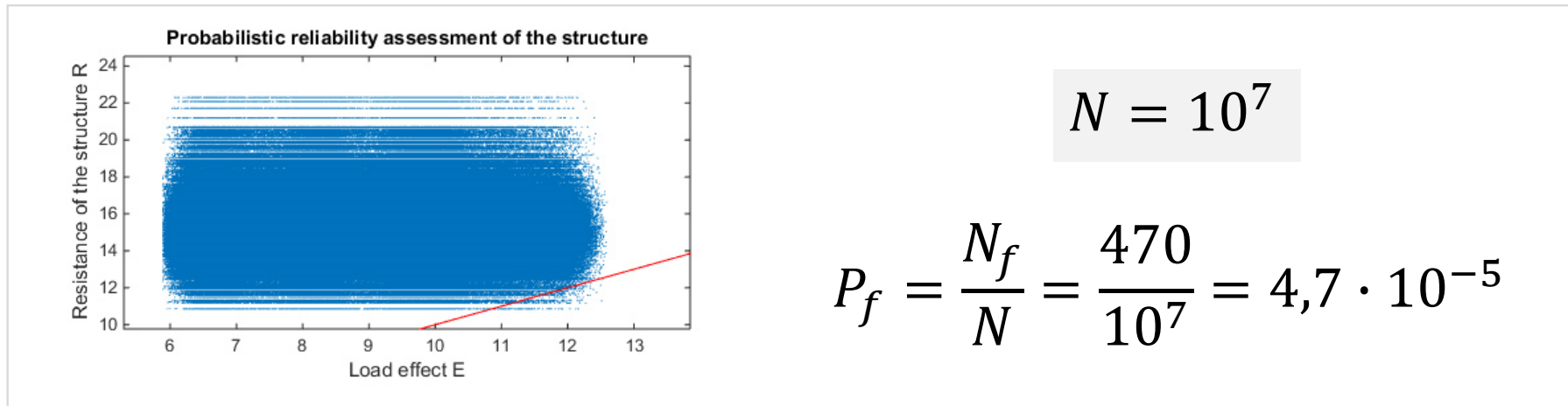
$$P_f = \frac{N_f}{N} = \frac{0}{10^4} = 0$$



$$P_f = \frac{N_f}{N} = \frac{4}{10^5} = 4 \cdot 10^{-5}$$



$$P_f = \frac{N_f}{N} = \frac{57}{10^6} = 5,7 \cdot 10^{-5}$$



$$P_f = \frac{N_f}{N} = \frac{470}{10^7} = 4,7 \cdot 10^{-5}$$

Zákon velkých čísel

Při velkém počtu nezávislých pokusů je možné téměř jistě očekávat, že relativní četnost se bude blížit teoretické hodnotě pravděpodobnosti.

Lze popsat s pomocí střední hodnoty náhodné veličiny:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_n)$$

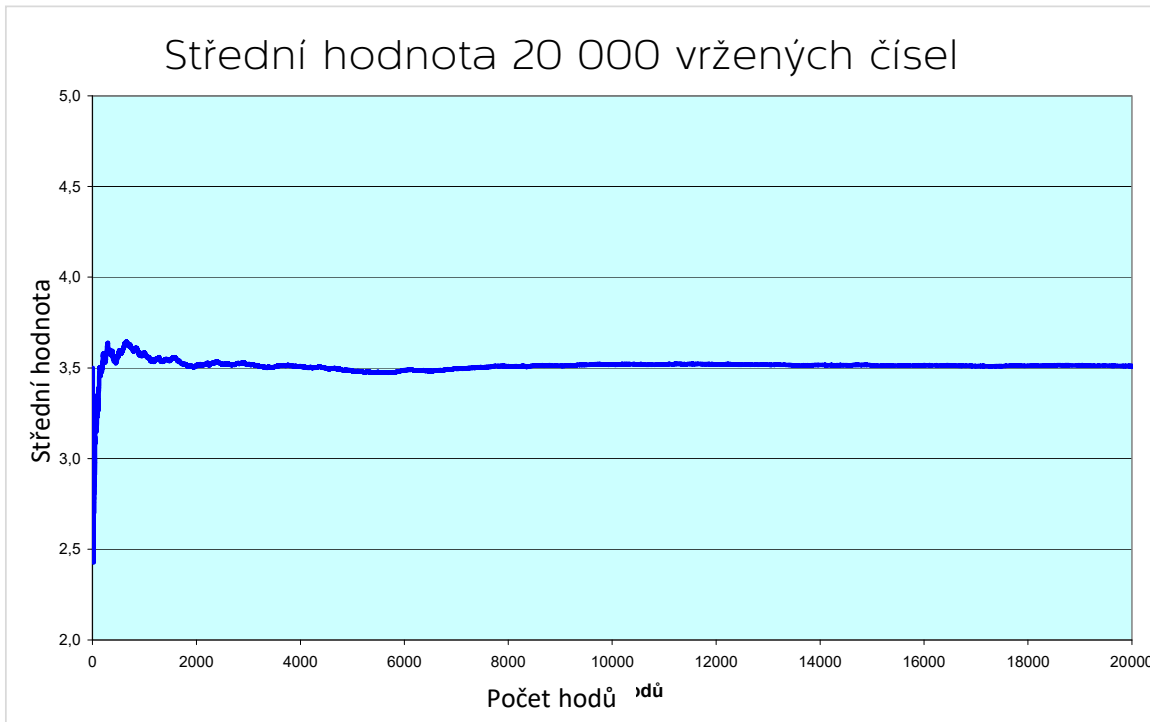
kde X_1, X_2, \dots, X_n je nekonečná posloupnost vzájemně nezávislých náhodných čísel s konečnou střední hodnotou $\mu < \infty$.

Se zvyšujícím se počtem simulací $N \rightarrow \infty$ bude střední hodnota vygenerované posloupnosti konvergovat ke střední hodnotě $\bar{X}_n \rightarrow \mu$, což lze demonstrovat na jednoduchém příkladu s hrací kostkou.

Zákon velkých čísel

V případě hrací kostky o šesti stranách je aritmetický průměr součtu čísel na jednotlivých stranách roven:

$$\mu = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$



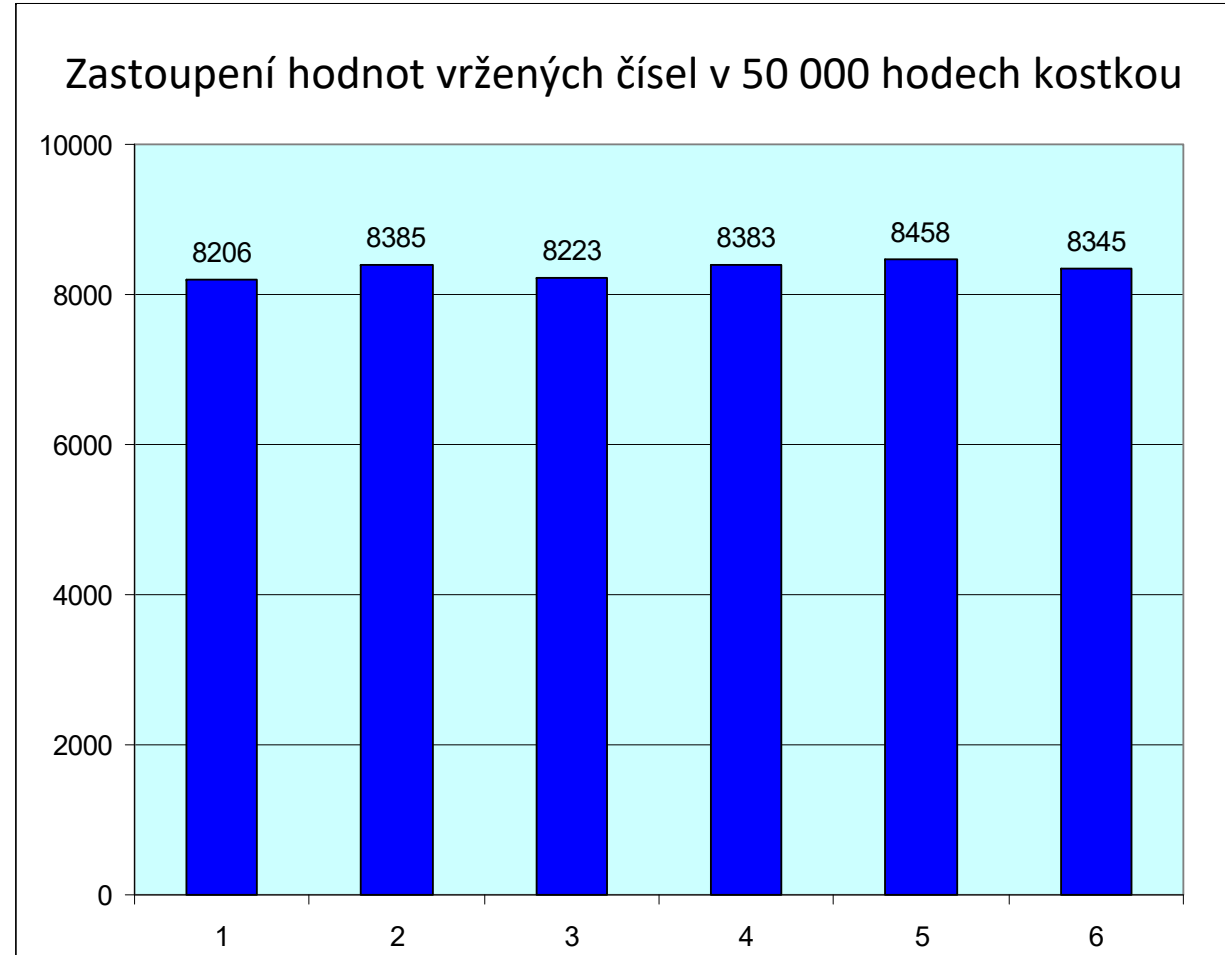
Vývoj vypočtené střední hodnoty 20 000 vržených čísel.



Zákon velkých čísel



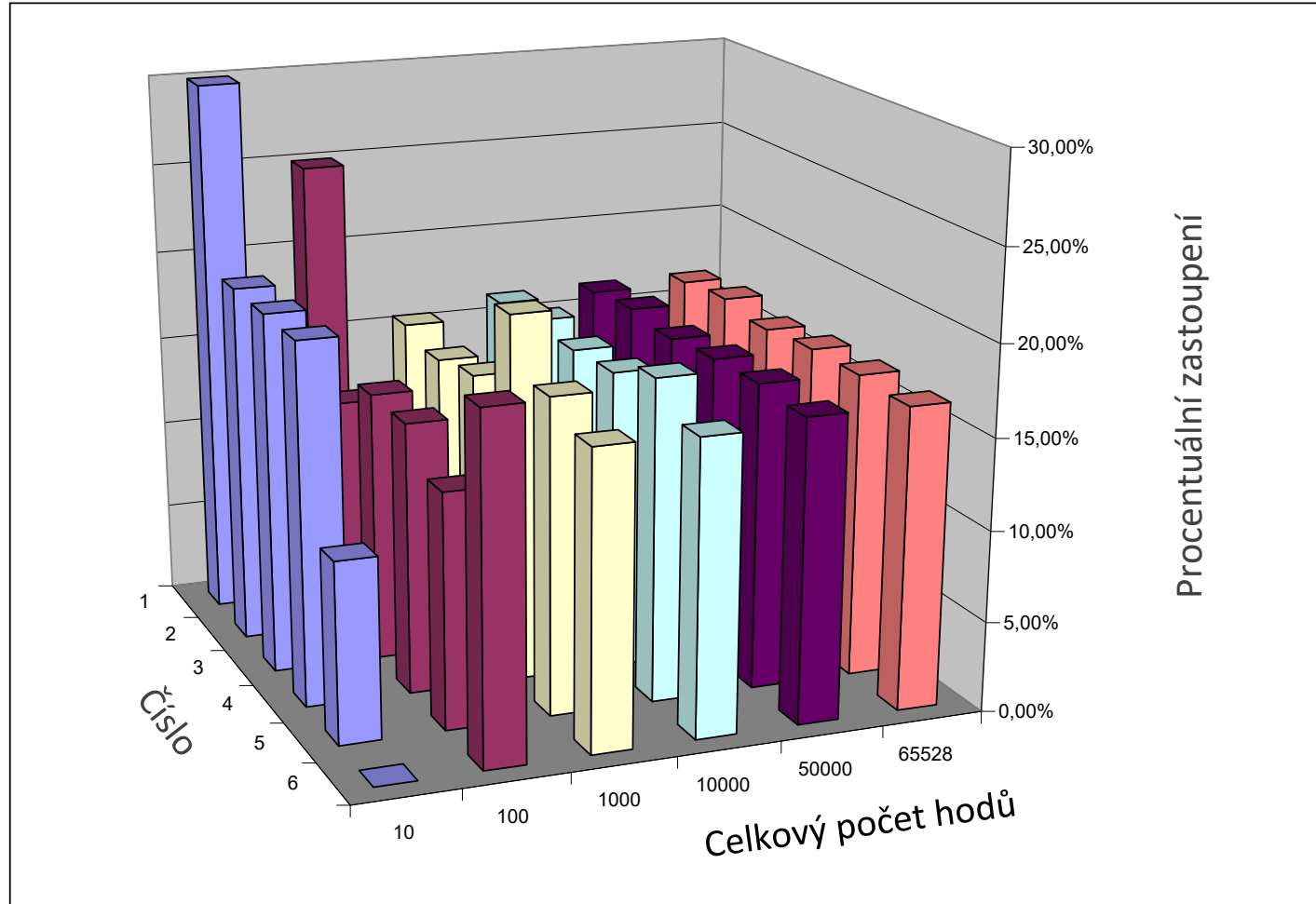
Zastoupení hodnot vržených čísel
v 50 000 hodech kostkou



Zákon velkých čísel

Procentuální zastoupení hodnot vržených čísel

Celkový počet 65 528 hodů je omezen
kapacitními možnostmi tabulkového
procesoru Excel



Generátory (Pseudo)náhodných čísel

Fyzikální generátory náhodných čísel



Kongruenční
generátory
pseudonáhodných čísel

$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \bmod M$$



Kongruenční generátory pseudonáhodných čísel



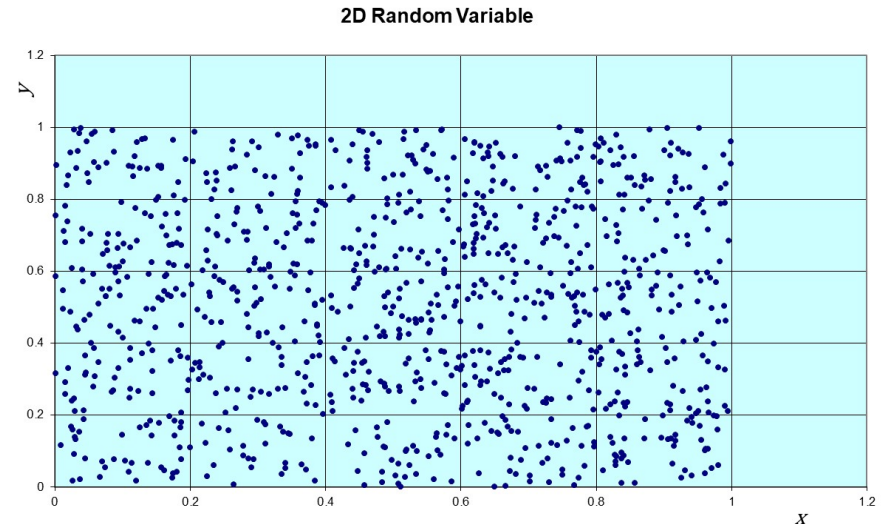
Nejpoužívanější **generátory náhodných čísel**, poprvé zavedené americkým matematikem Lehmerem v roce 1948. Slouží pro generování posloupností náhodných veličin s **rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti**.

Derrick Henry Lehmer
(1905-1991)

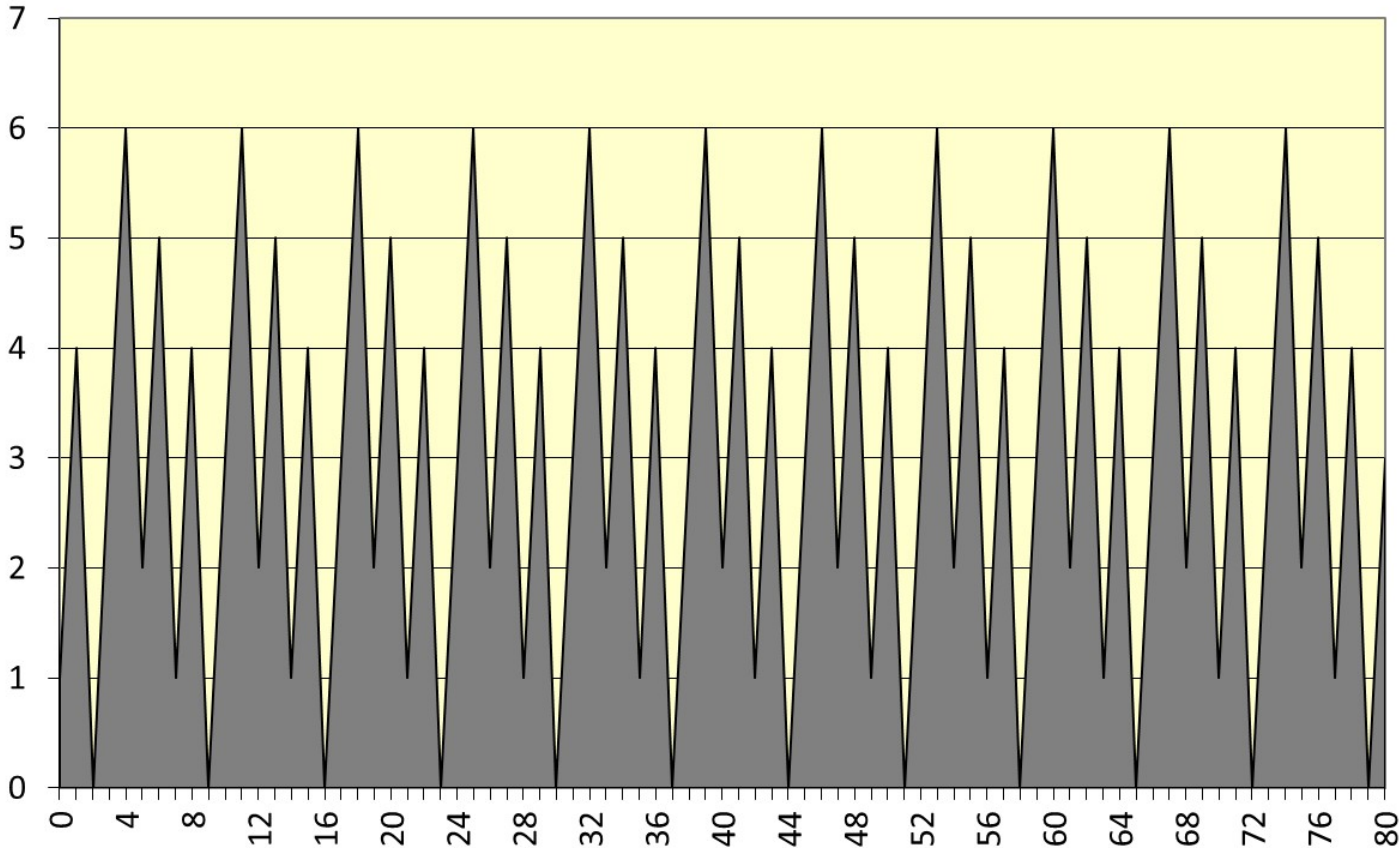
Generování pseudonáhodných čísel
s pomocí rekurentního vztahu:

$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \bmod M$$

kde konstanty A , C a M určují statistickou kvalitu generátoru.



Vliv vstupních konstant na vygenerovaná čísla

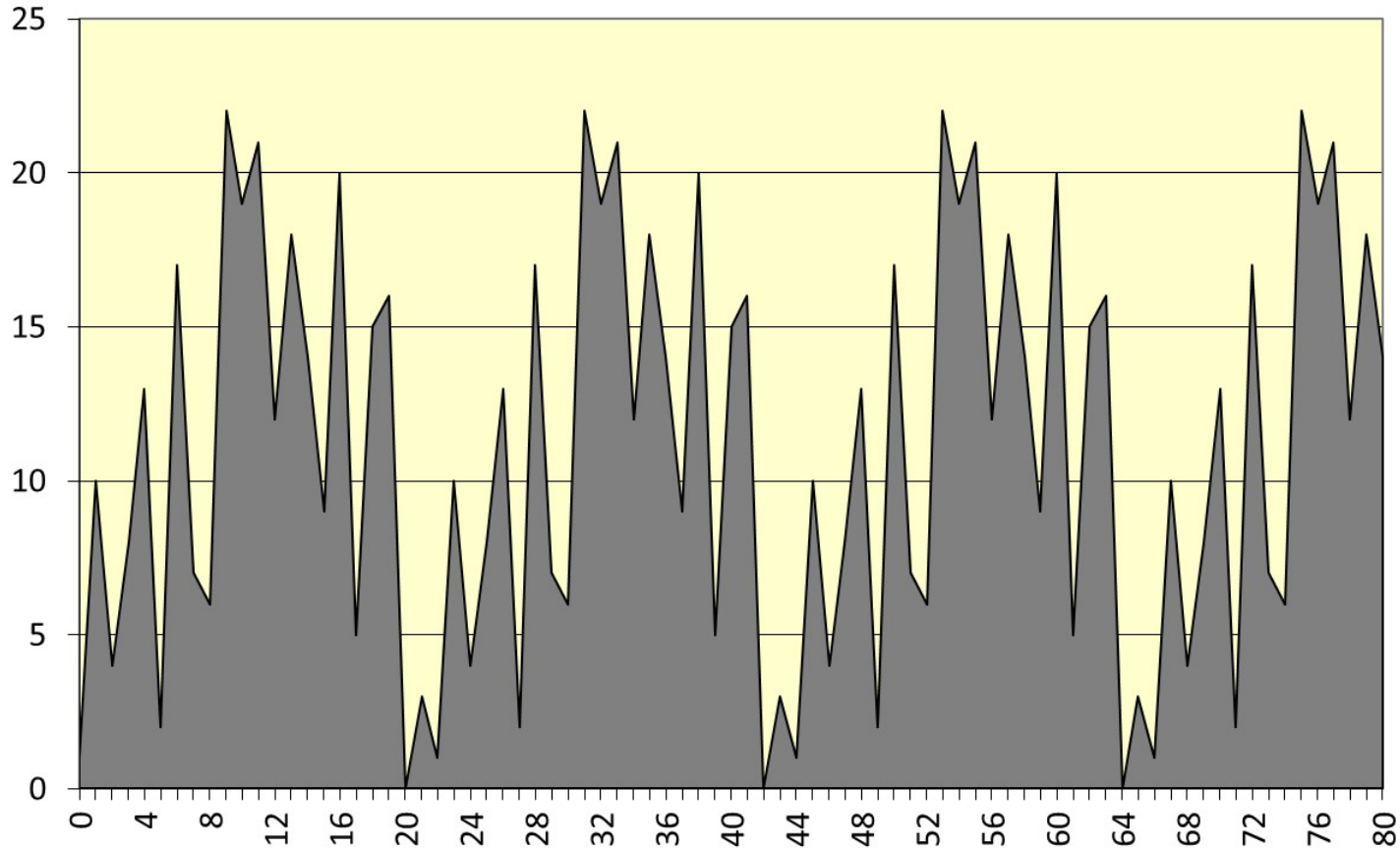


$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \bmod M$$

Vstupní údaje

U_0	1
A	1
C	3
M	7

Vliv vstupních konstant na vygenerovaná čísla

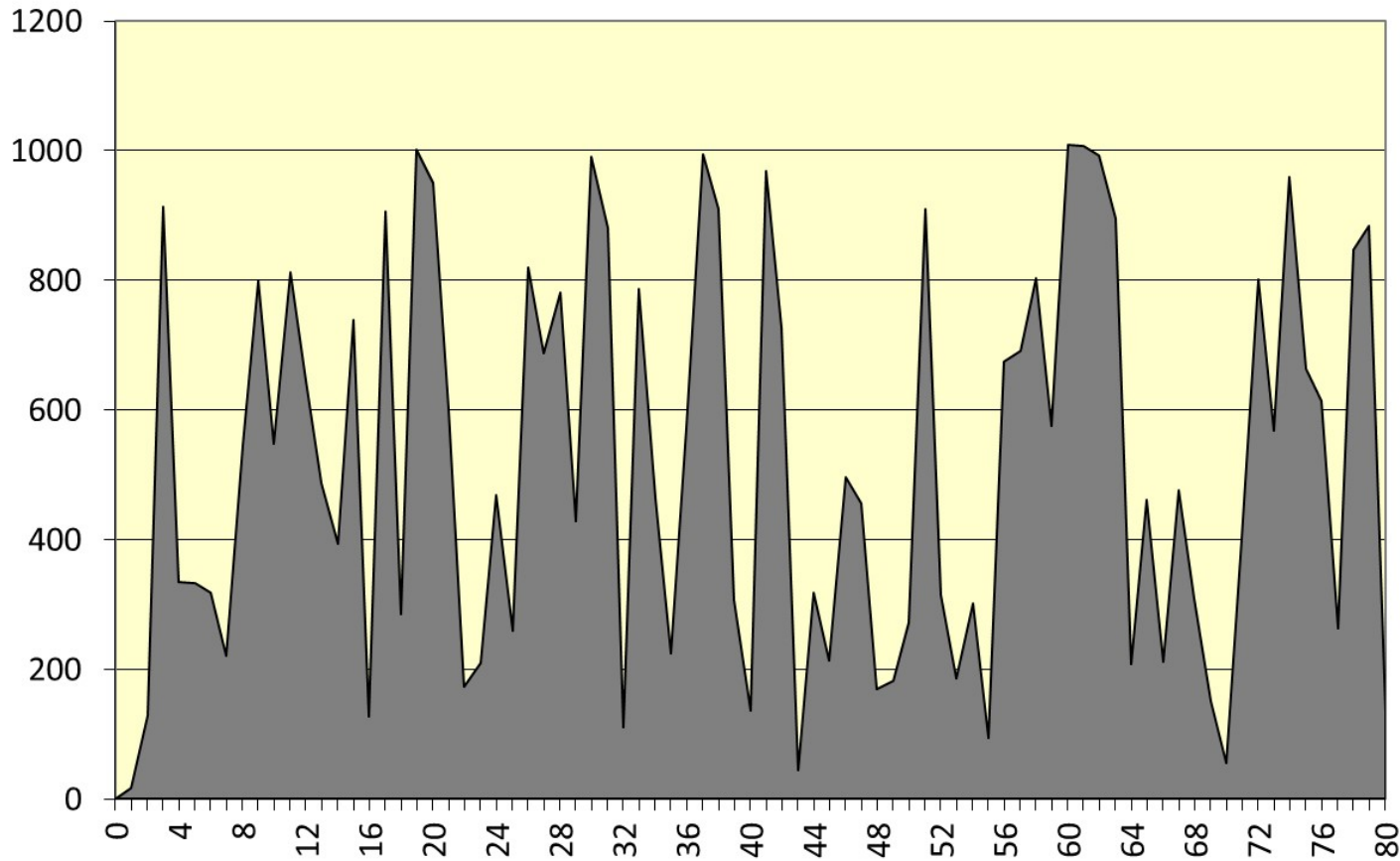


$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \bmod M$$

Vstupní údaje

U_0	1
A	7
C	3
M	23

Vliv vstupních konstant na vygenerovaná čísla

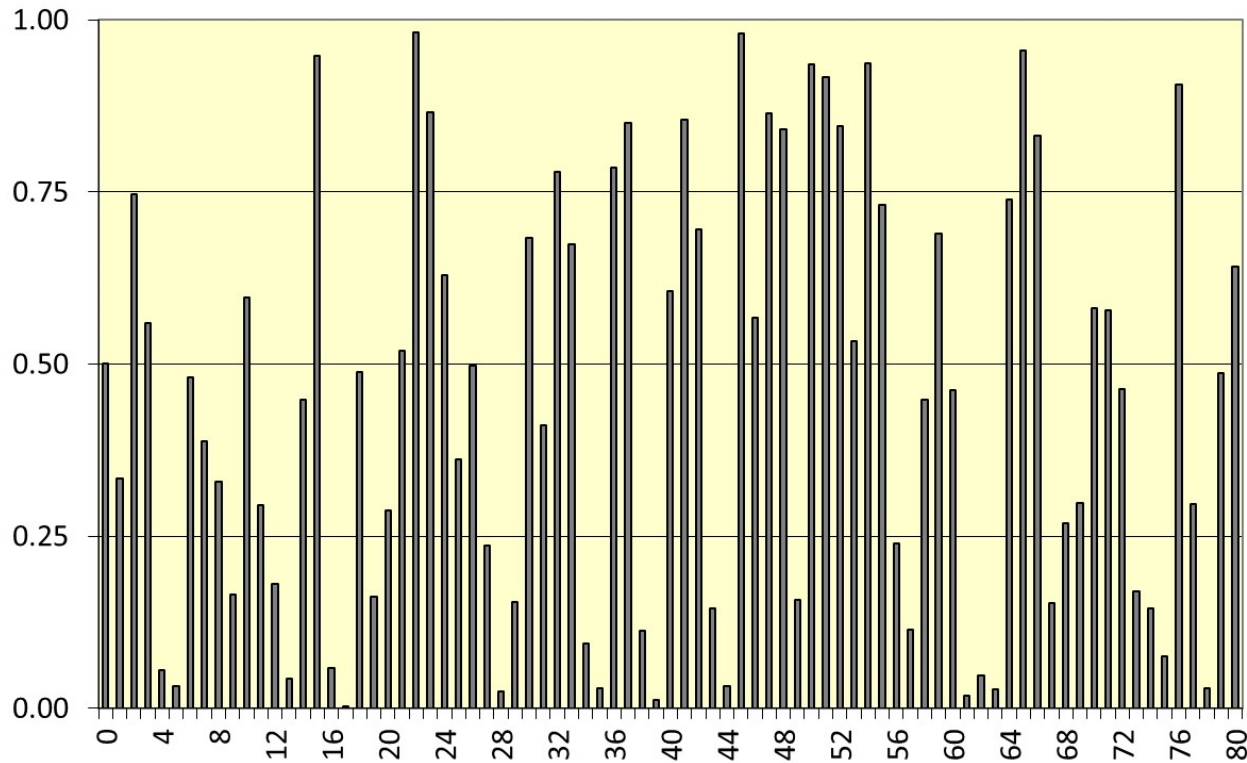


$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \bmod M$$

Vstupní údaje

U_0	1
A	7
C	10
M	1011

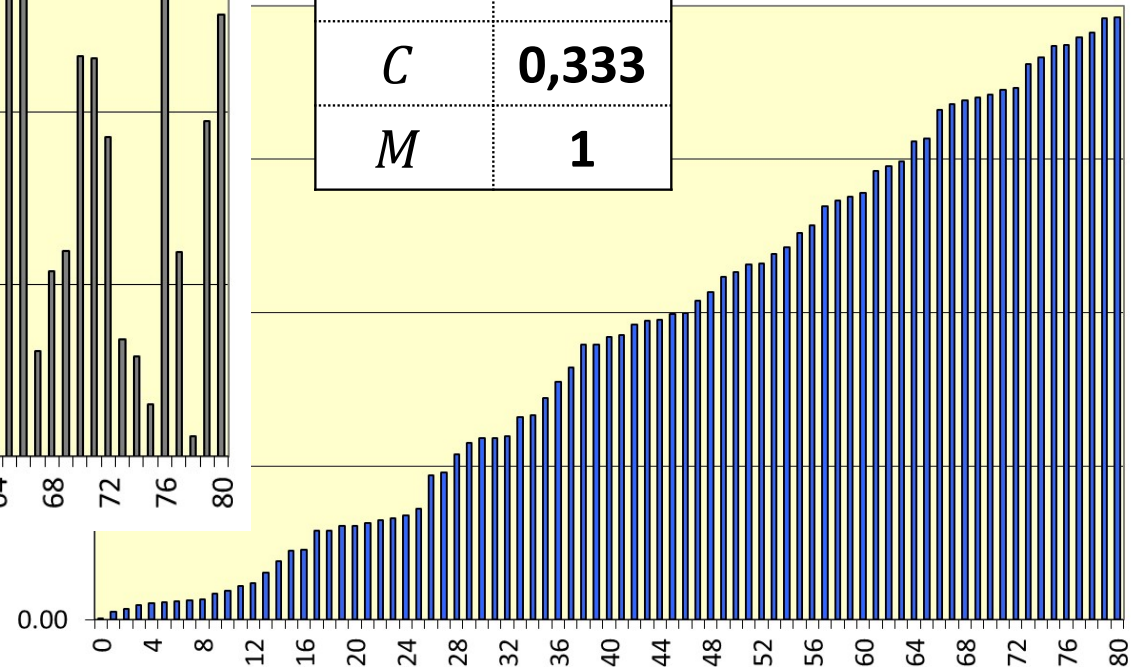
Vliv vstupních konstant na vygenerovaná čísla



Vstupní údaje

U_0	0,5
A	758
C	0,333
M	1

Setříděno



$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \bmod M$$

Numerická integrace metodou Monte Carlo

Simulační metoda Monte Carlo se nejčastěji využívá k numerickému řešení vícerozměrných integrálů:

$$I = \int_{x_d}^{x_h} \int_{y_d}^{y_h} f(x, y, \dots) dx dy \dots = \int_V f(x, y, \dots) dx dy \dots$$

Numerické integrování s využitím metody Monte Carlo spočívá ve stanovení hodnoty funkce f v N náhodných bodech, ležících v integrované oblasti V .

Výsledný integrál pak lze definovat:

$$I(f; N) \approx V \cdot \langle f \rangle = \frac{V}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f_i$$

kde $\langle f \rangle$ představuje střední hodnotu funkce f , vypočtenou v N náhodných bodech.

Numerická integrace metodou Monte Carlo

Odchylku od střední hodnoty funkce f vyjadřuje **směrodatná odchylka**:

$$\sigma(f; N) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle f \rangle - f_i)^2}{N}}$$

Podobně lze stanovit i odchylku od střední hodnoty výsledného integrálu I :

$$\sigma(I; N) = \frac{V}{N} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (\langle f \rangle - f_i)^2}$$

což lze považovat za **ukazatel nepřesnosti** výpočtu.



Numerická integrace metodou Monte Carlo

Algoritmus výpočtu integrálu **simulační metodou Monte Carlo** lze zefektivnit. Integrační oblast V se může uzavřít do oblasti se známým objemem V^* , ve které lze snadno generovat náhodné body. Zavedená funkce \tilde{f} pak nabývá hodnot:

$$\tilde{f} = \begin{cases} 0 & x \notin V \\ f(x) & x \in V \end{cases}$$

Po vygenerování N náhodných bodů, ležících v oblasti V^* , se pak bude přibližná hodnota výsledného integrálu rovnat:

$$I \approx \frac{V^*}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{f}(x_i)$$

Jako názorná ukázka výpočetního postupu numerického integrování **simulační metodou Monte Carlo** poslouží následující příklad výpočtu objemu polokoule.

Příklad 1: Výpočet objemu polokoule

Integrovanou funkcí je implicitní rovnice polokoule: $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

Oblast V je omezena kružnicí o poloměru r , oblast V^* je pak čtverec o délce strany $2 \cdot r$, v němž je kružnice vepsaná.

Funkce \tilde{f} pak nabývá tvar

$$\tilde{f} = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > r^2 \\ f(x, y) & x^2 + y^2 \leq r^2 \end{cases}$$

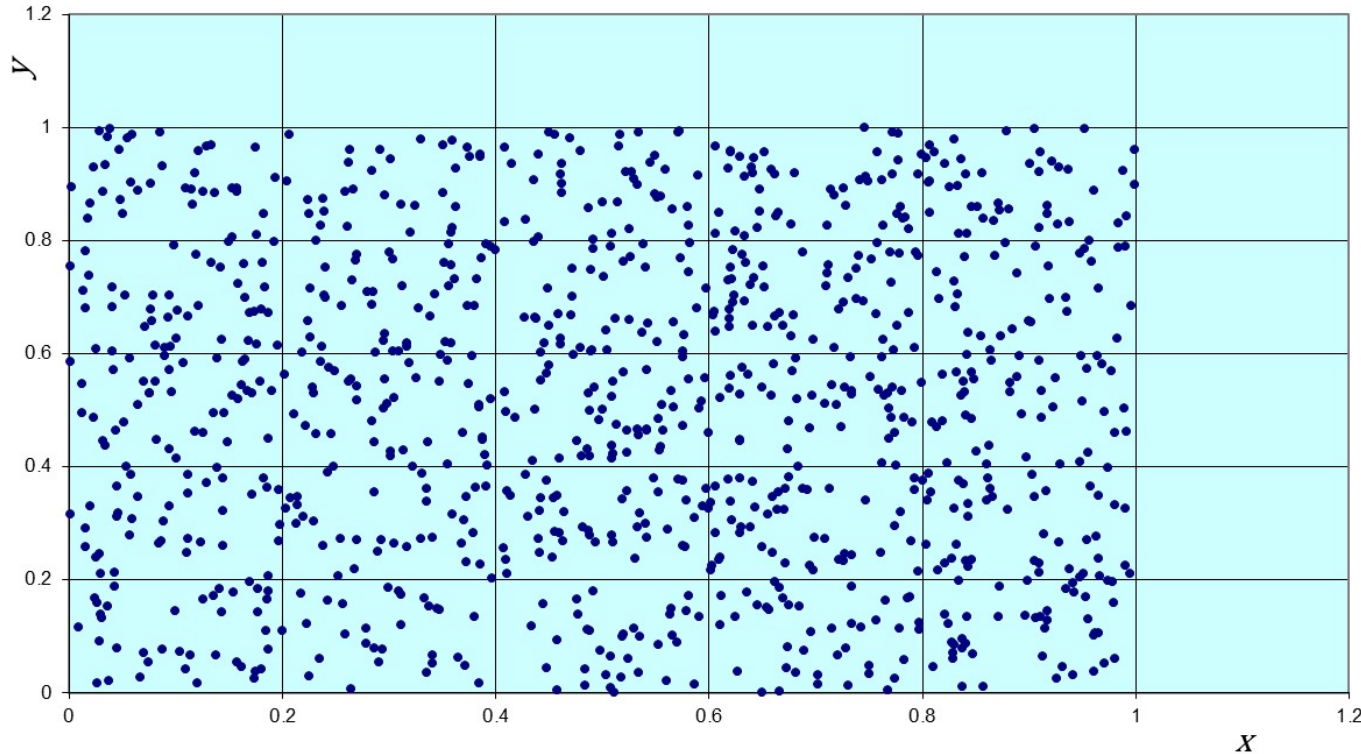
a směrodatná odchylka vypočteného odhadu integrálu se bude rovnat:

$$\sigma(I, N) = \frac{V^*}{N} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (\langle \tilde{f} \rangle - \tilde{f}_i)^2}$$

Ukázkový výpočet byl proveden pro 1 000 vygenerovaných pseudonáhodných bodů, poloměr polokoule r se rovná 1 m.

Vygenerované dvojice pseudonáhodných čísel

2D Random Variable



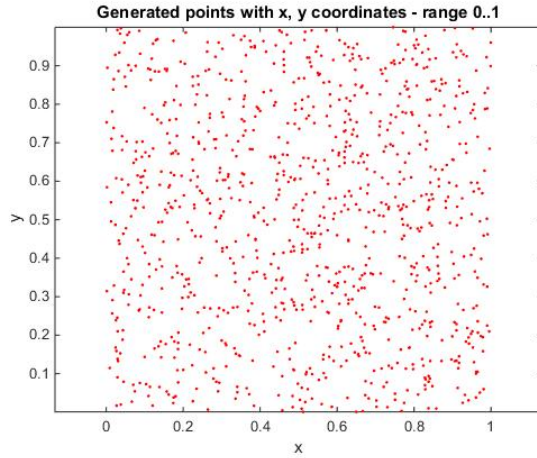
2D graf **náhodně vygenerovaných bodů** – tisíc vygenerovaných pseudonáhodných dvojic čísel pro výpočet objemu polokoule.

Vstupní hodnoty

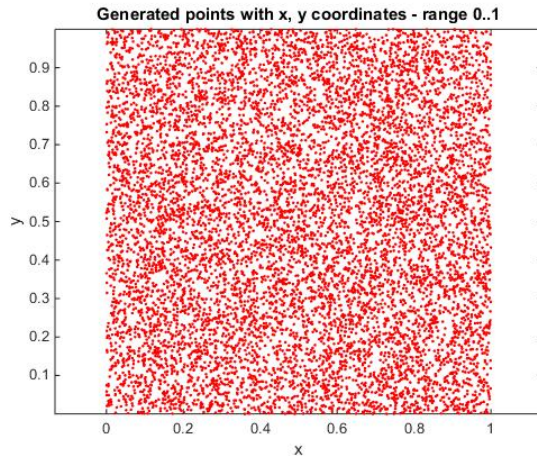
x_0	0,5	y_0	0,5
A	758	A	239
C	0,333	C	0,666
M	1	M	1

Vygenerované dvojice pseudonáhodných čísel

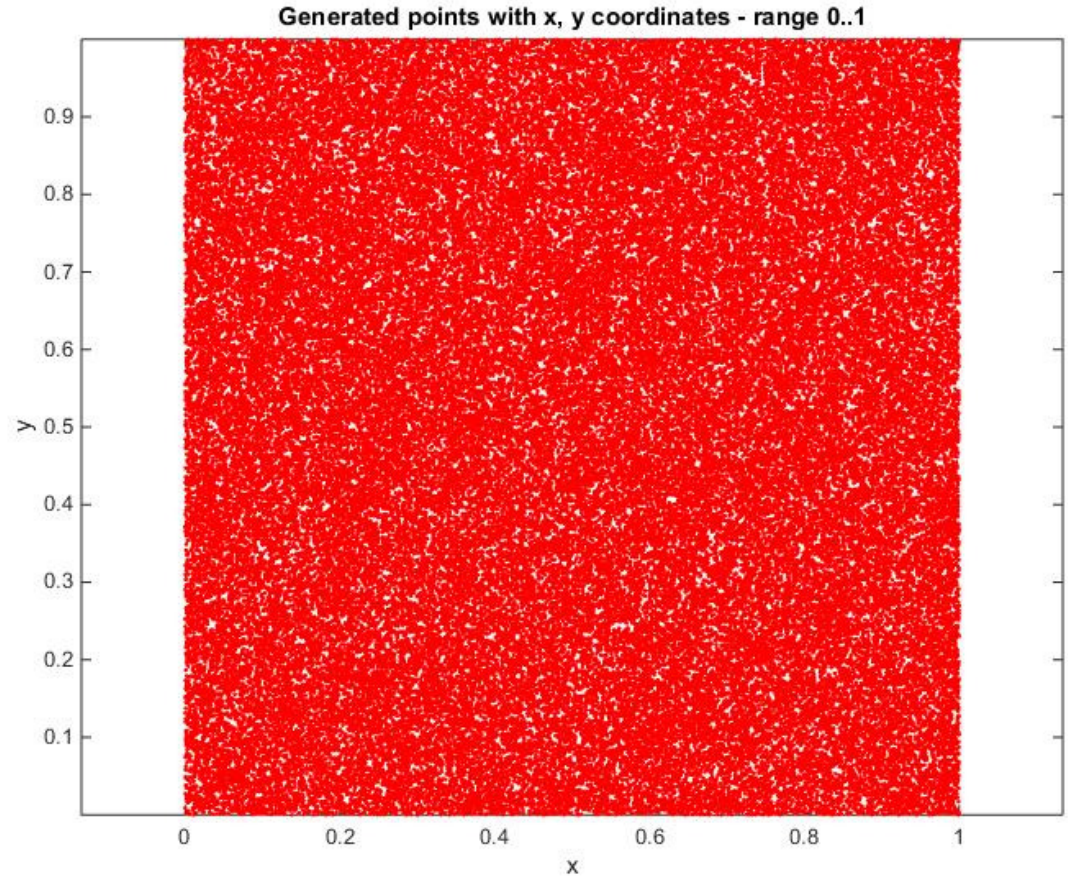
$N = 1\ 000$



$N = 10\ 000$



$N = 100\ 000$



Graf hodnot f v 1000 vygenerovaných bodech

Výsledná hodnota odhadu integrálu:

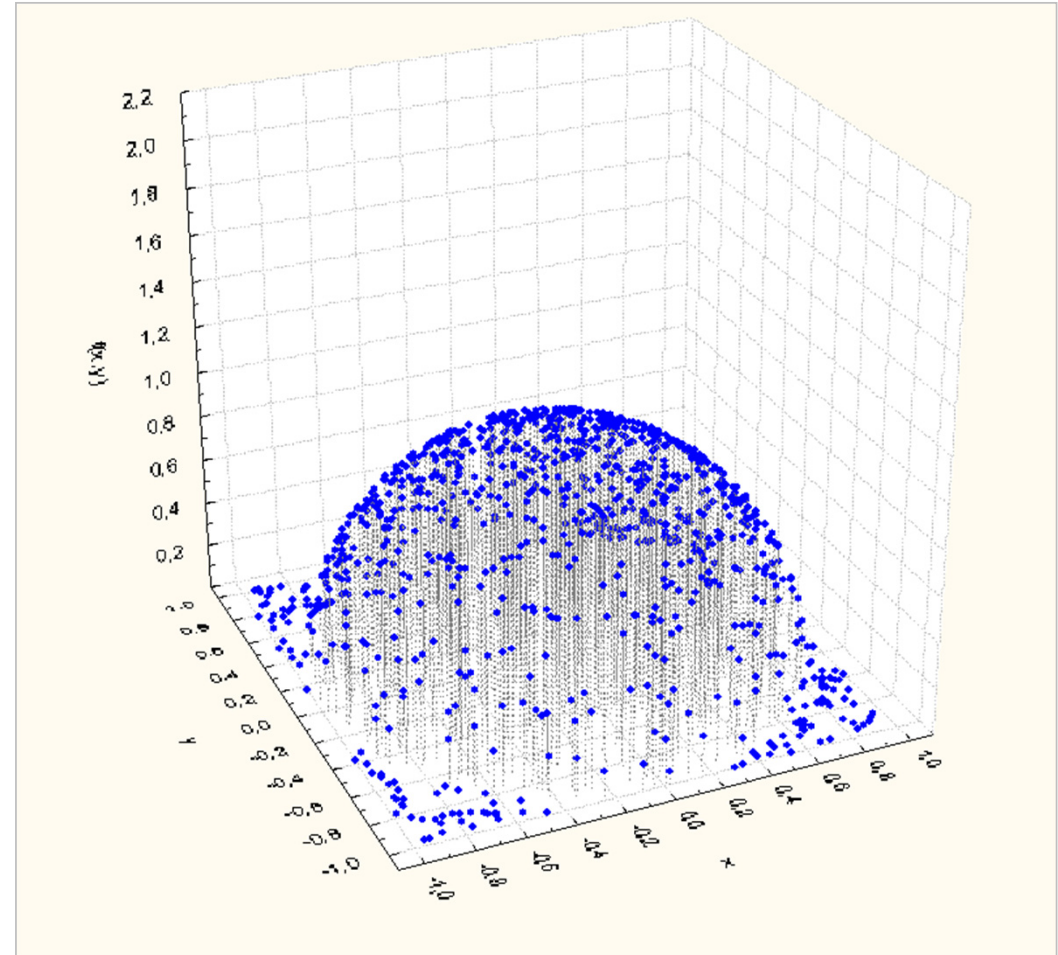
$$I \approx \frac{V^*}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{f}(x) \approx 2,1771 \text{ m}^3$$

Přesná hodnota:

$$\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 2,0944 \text{ m}^3$$

Směrodatná odchylka odhadu integrálu:

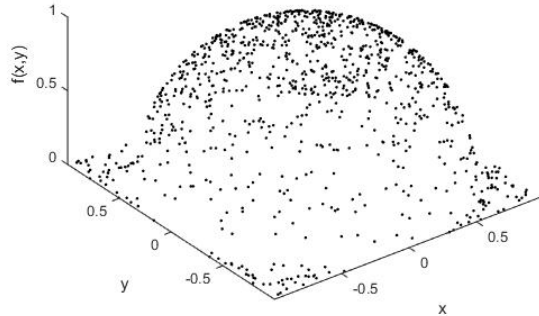
$$\sigma(I, N) \approx 0,0435 \text{ m}^3$$



Vygenerované dvojice pseudonáhodných čísel

Generated points with x, y coordinates and value of f(x,y)

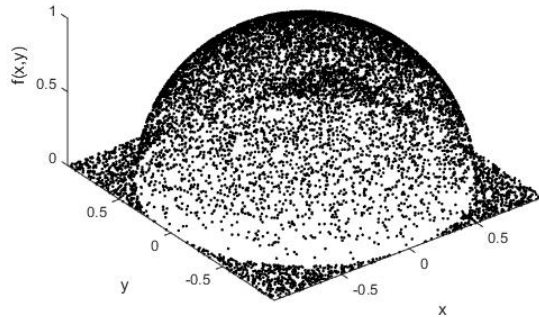
$N = 1\,000$



$I = 2,1771\text{ m}^3$
 $\sigma = 0,0435\text{ m}^3$

Generated points with x, y coordinates and value of f(x,y)

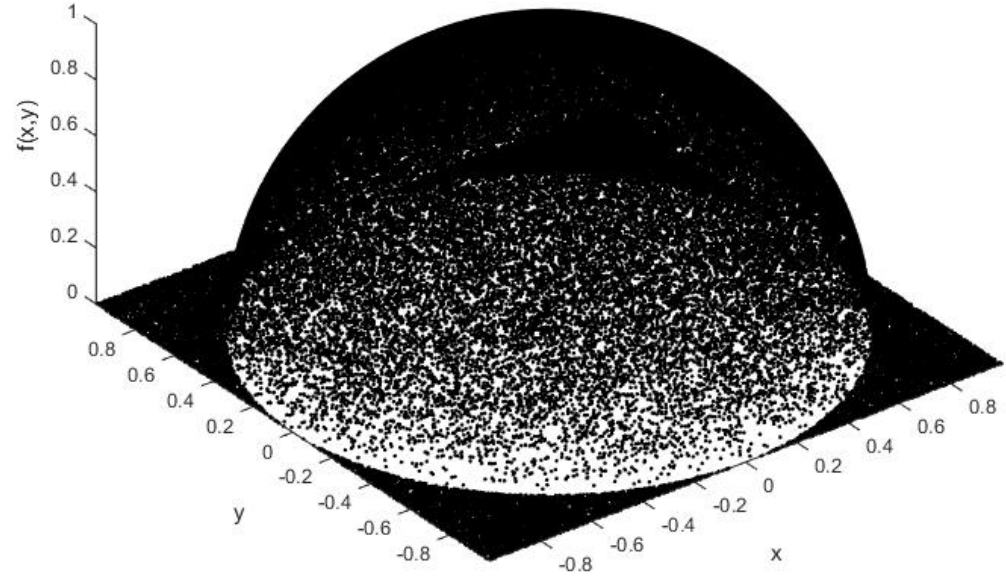
$N = 10\,000$



$I = 2,1092\text{ m}^3$
 $\sigma = 0,0137\text{ m}^3$

Generated points with x, y coordinates and value of f(x,y)

$N = 100\,000$

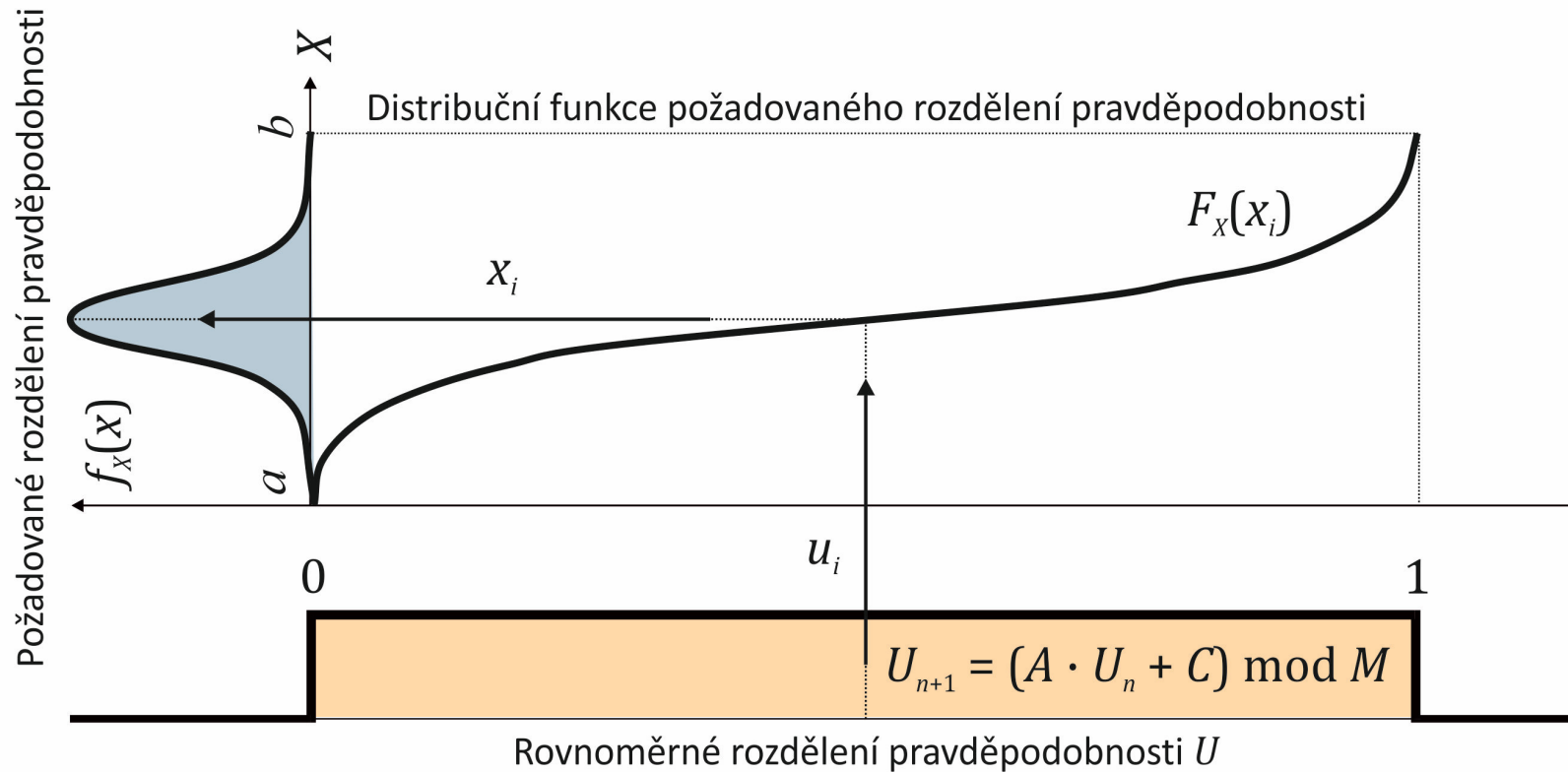


$I = 2,0999\text{ m}^3$

$\sigma = 0,0043\text{ m}^3$

Princip metody SBRA

Generování rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti a následná transformace



Posouzení spolehlivosti metodou SBRA

- Vstupní náhodné proměnné jsou vyjádřeny **useknutými histogramy** s neparametrickým rozdělením pravděpodobnosti.
- Analýza funkce spolehlivosti **simulační metodou Monte Carlo**.
- **Spolehlivost** je vyjádřena jako $P_f < P_d$, kde P_f je **pravděpodobnost poruchy** a P_d je její **návrhová hodnota**:

$$P_f = \frac{\sum}{\sum} \leq P_d$$

Např.: Marek a kol., CRC Press, 1995.

