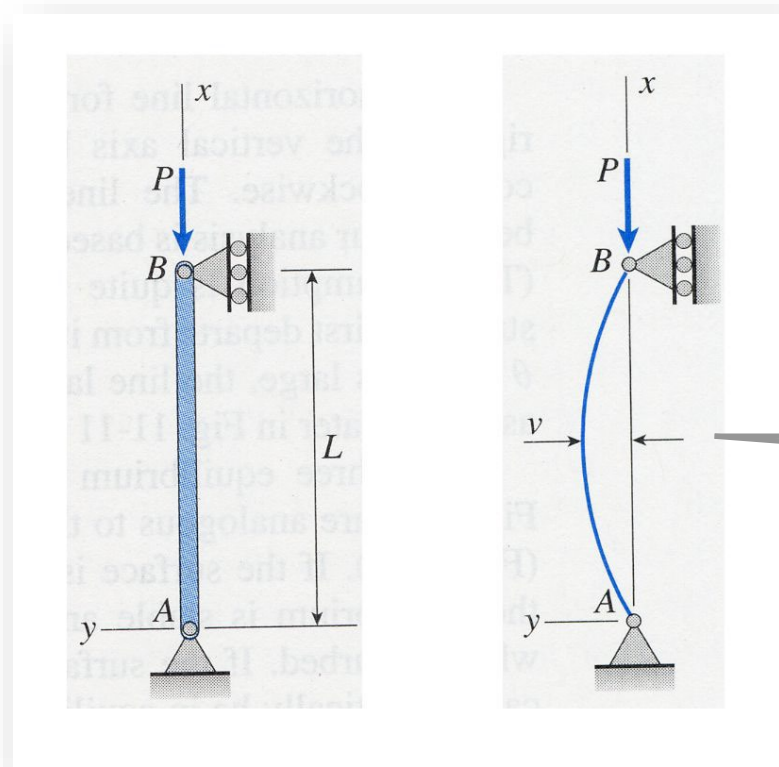


Téma 12: Stabilita štíhlých tlačných prutů, vzpěrný tlak

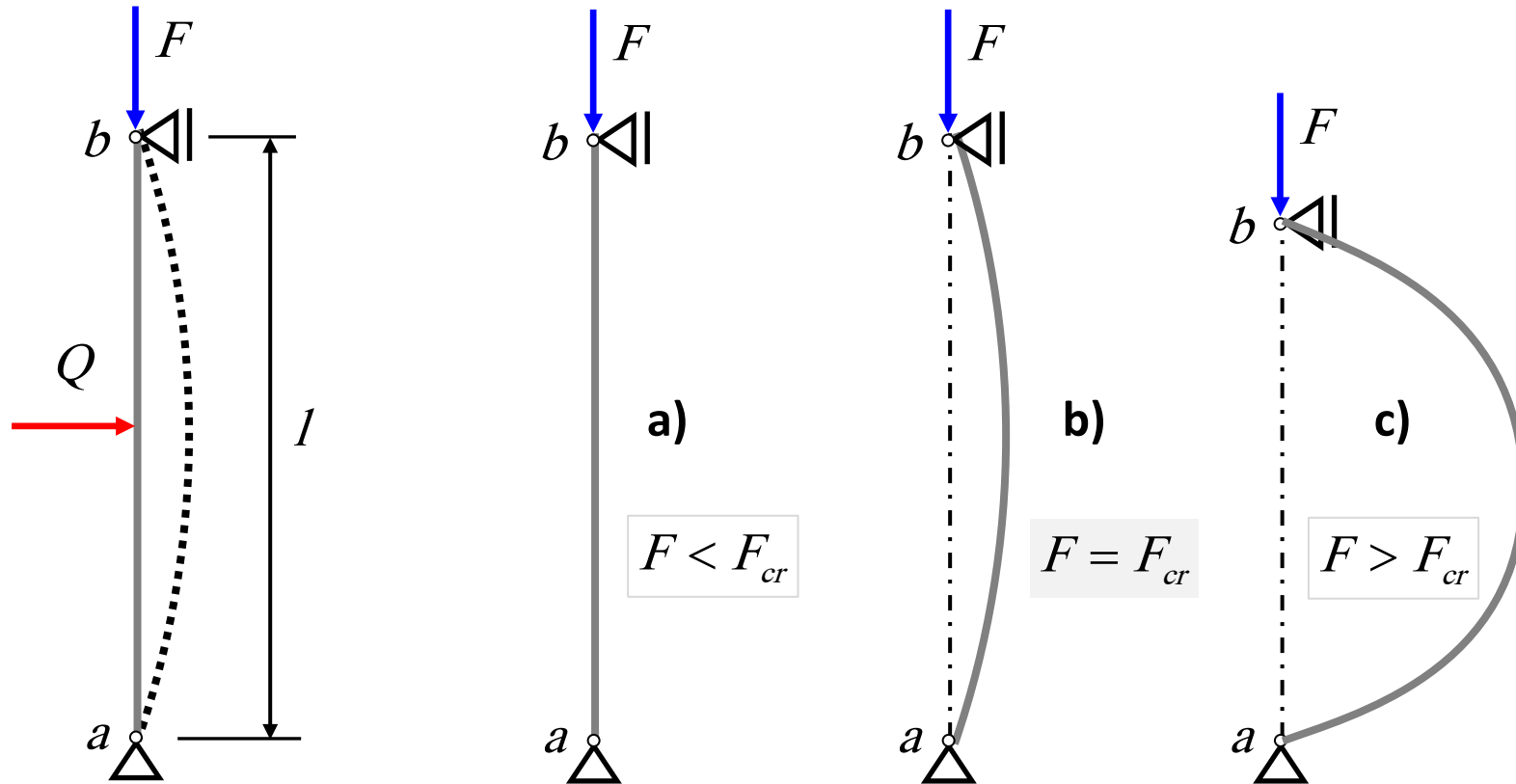
- Eulerovo řešení stability štíhlého tlačného prutu, kritické břemeno a kritické napětí.
- Ztráta stability štíhlých tlačných prutů v pružno-plastickém oboru
- Posouzení ocelových konstrukcí na vzpěr

Stabilita

Stabilita - schopnost zachovat nebo obnovit původní rovnovážný stav soustavy bez samovolného narůstání deformací.



Stabilní, indiferentní, nestabilní stav



- a) **Stabilní stav** - prut se navrátí do své původní polohy
- b) **Indiferentní** (mezilehlý případ – čistě teoretický) **stav** - prut zůstane vychýlen, ale deformace již nerostou
- c) **Nestabilní stav** - samovolný nárůst deformací

Vzpěrná pevnost, vzpěrný tlak

Štíhlé nosné prvky namáhané tlakem – mohou vybočit ze svého původně přímého tvaru. Při zvyšování zatížení se prut stává nestabilním, dochází u něj k deformaci v příčném směru a následkem je jeho zborcení. Tento jev se nazývá **vzpěr**.

Odolnost proti tomuto vybočení – **vzpěrná pevnost**, namáhání **vzpěrným tlakem**.

- Jedná se materiálovými vlastnostmi
 - geometrickými charakteristikami
 - zatížením
 - počáteční napjatostí
- o velmi složitý jev, který je ovlivněn:

Nejjednodušší model – ideálně pružný, přímý prut, centricky zatížený tlakovou silou. Ztráta stability nastane při dosažení **kritické hodnoty tlakové síly**.

Eulerovo řešení stability štíhlého tlačného prutu



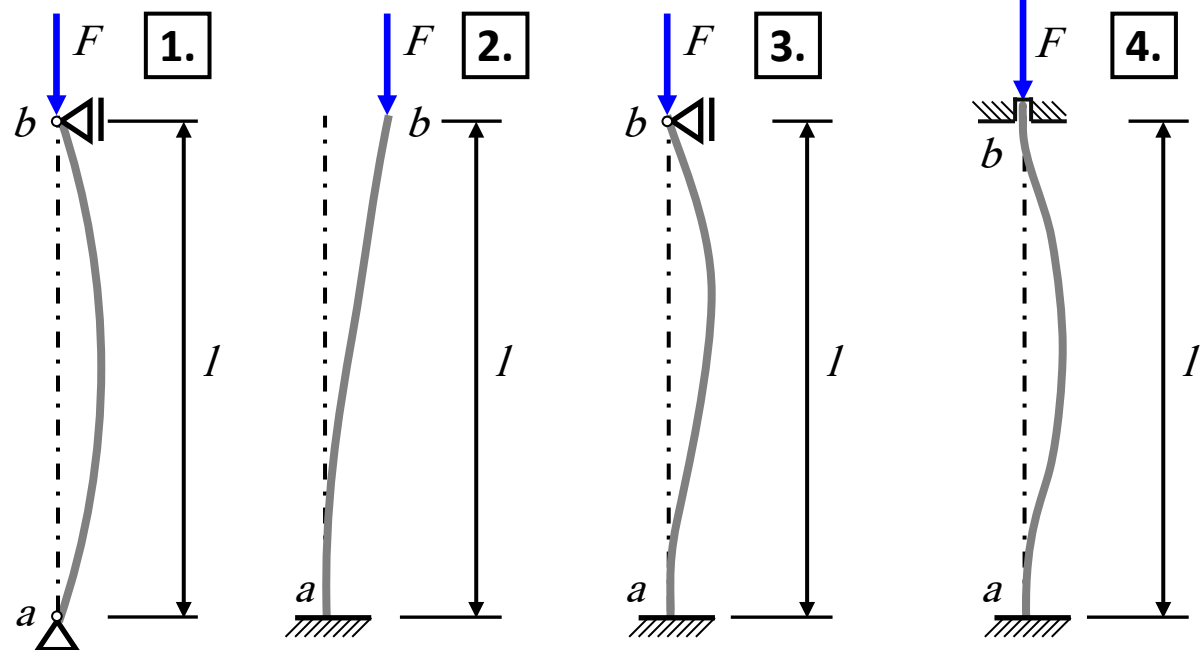
Leonhard Euler
(1707 - 1783)

Předpoklady řešení

- ideálně pružný materiál
- prut je přímý
- tlaková síla působí v ose prutu
- deformace jsou řádově menší než délka prutu (teorie malých deformací)
- statické účinky se vyšetřují na zdeformovaném prutu (teorie II. řádu)

Základní Eulerovy případy prutů namáhaných vzpěrným tlakem:

1. prostě uložený prut
2. jednostranně vetknutý prut
3. prut s vetknutým a prostě uloženým koncem
4. oboustranně vetknutý prut



1. Prut oboustranně kloubově uložený

$$M = -E \cdot I \cdot w'' \rightarrow w'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \text{Diferenciální rovnice II. řádu}$$

$$M_{(x)} = F \cdot w_{(x)} \rightarrow w'' = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w \quad \text{Substituce} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$w'' = -\alpha^2 \cdot w \rightarrow w'' + \alpha^2 \cdot w = 0$$

Obecné řešení:

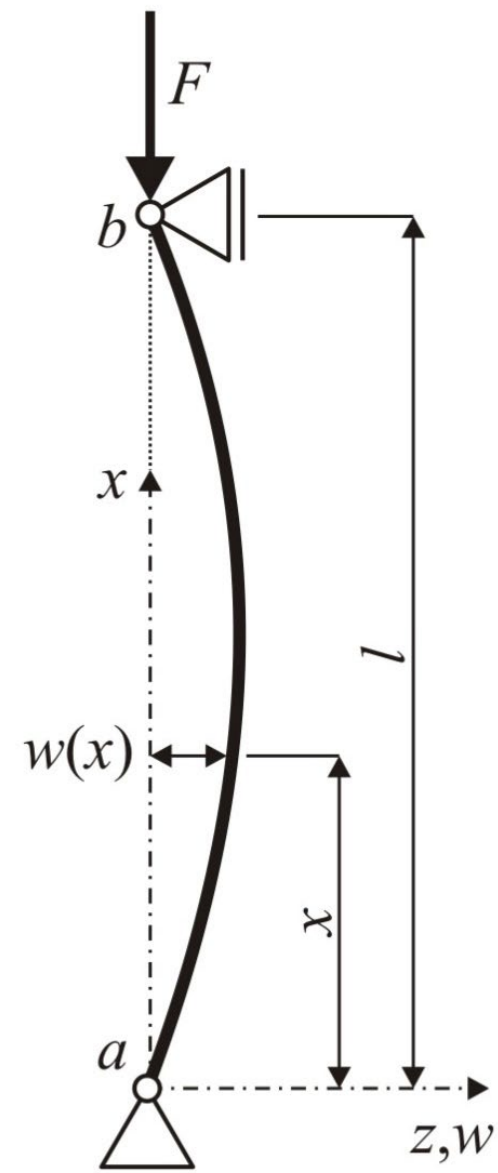
$$w'' + \alpha^2 \cdot w = 0 \rightarrow w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$

Důkaz: $w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$

$$w'' = -\alpha^2 \cdot c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$

$$w'' + \alpha^2 \cdot w = 0$$

$$-\alpha^2 \cdot c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \alpha^2 \cdot [c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)] = 0$$



1. Prut oboustranně kloubově uložený

Obecné řešení:

$$w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$

Okrajové podmínky:

$$w_{(x=0)} = 0$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

0 0 1

$$w_{(x=l)} = 0$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) = 0$$

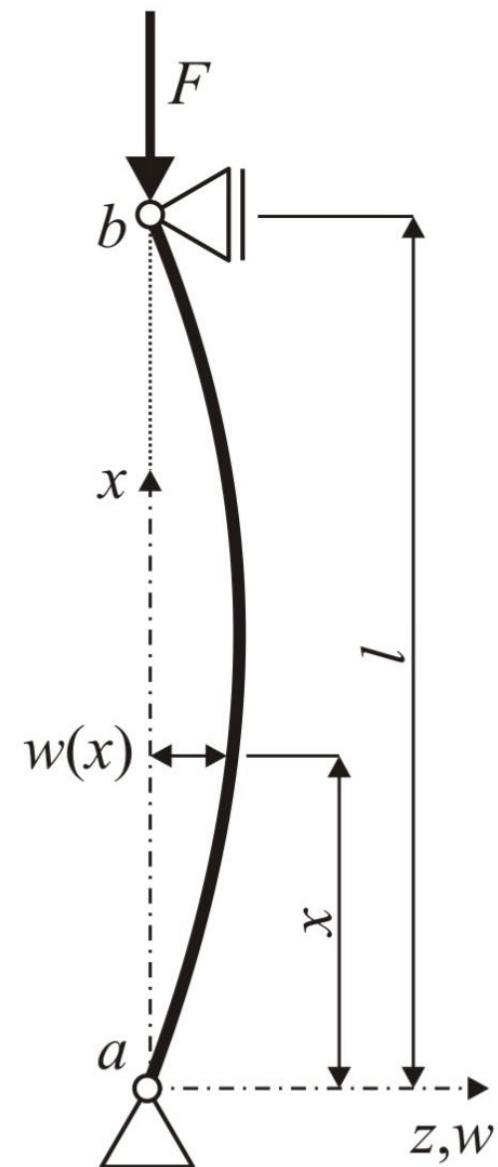
Řešení:

a) $c_1 = 0$

... nulová příčná deformace – **stabilní** případ

b) $\sin(\alpha \cdot l) = 0$... **stabilitní** řešení

Stabilitní podmínka: $\sin(\alpha \cdot l) = 0$



1. Prut oboustranně kloubově uložený

Stabilitní podmínka:

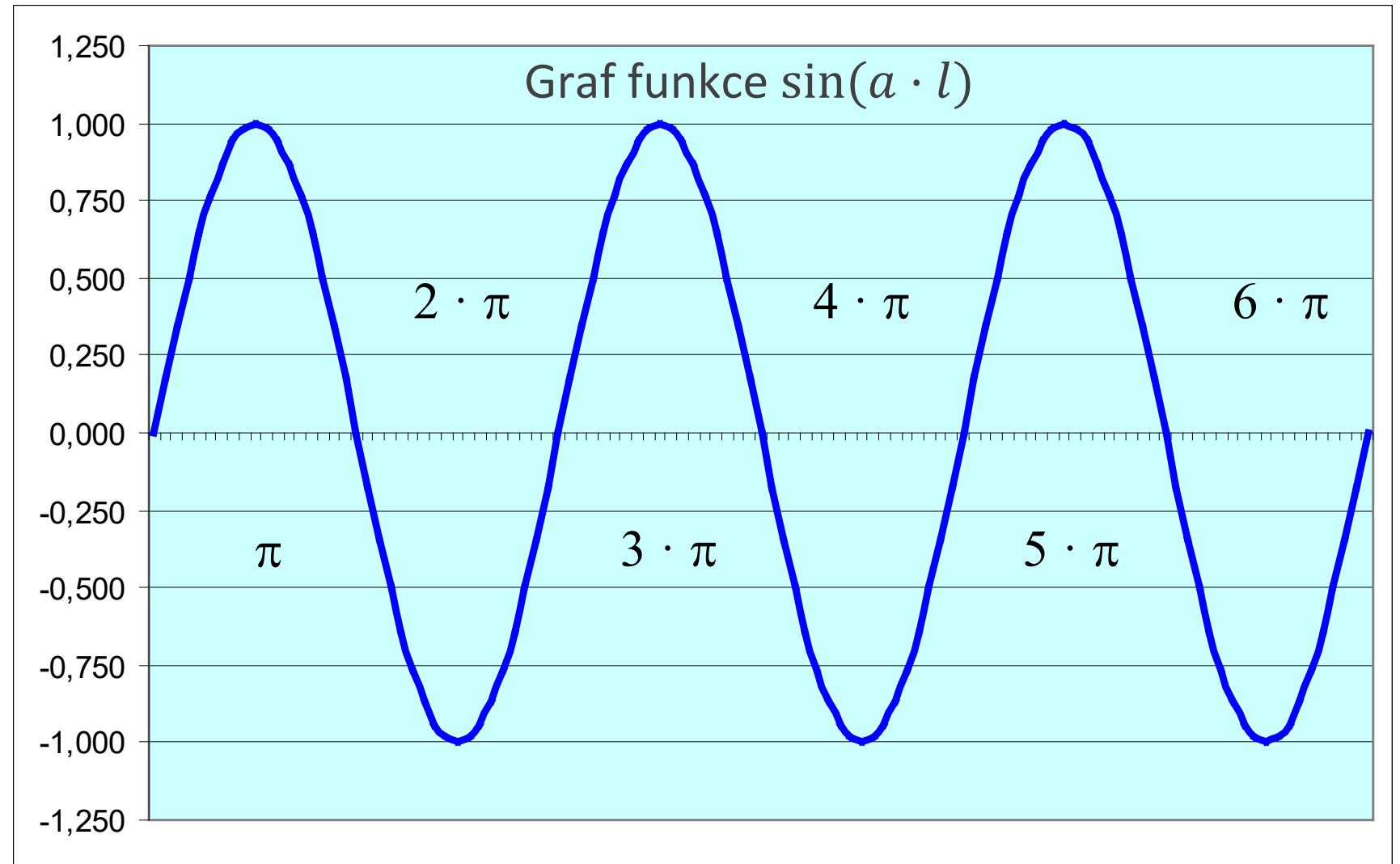
$$\sin(\alpha \cdot l) = 0$$

Řešení:

$$\alpha \cdot l = k \cdot \pi$$

$$\alpha = \frac{k \cdot \pi}{l}$$

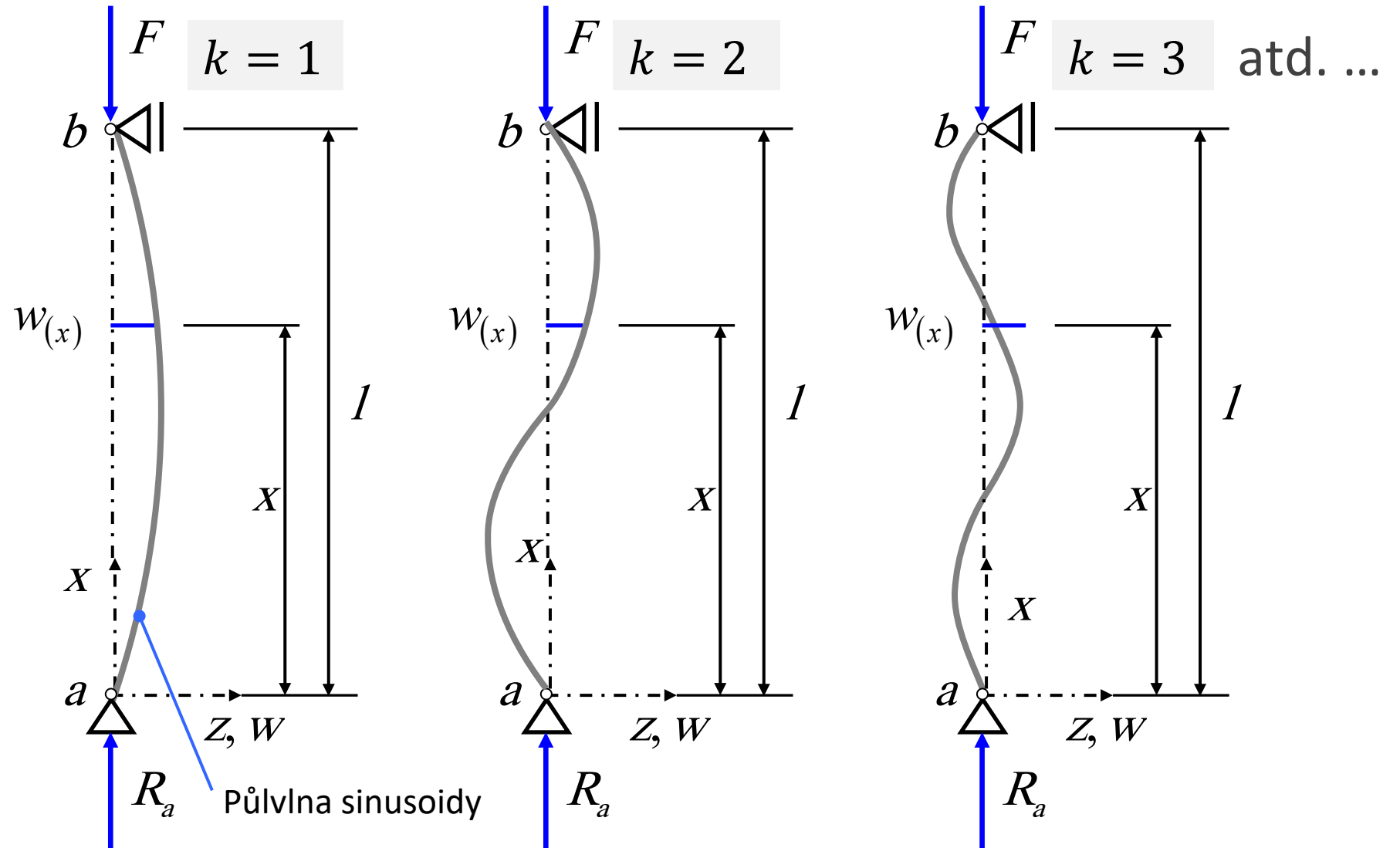
Platné pro $k = 1, 2, 3, \dots$



1. Prut oboustranně kloubově uložený

Praktický význam
má řešení pouze
pro $k = 1 \rightarrow$

$$\alpha = \frac{\pi}{l}$$



1. Prut oboustranně kloubově uložený

Výsledek řešení stabilitní podmínky:

$$\alpha = \frac{\pi}{l}$$

Substituce:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

Po úpravě:

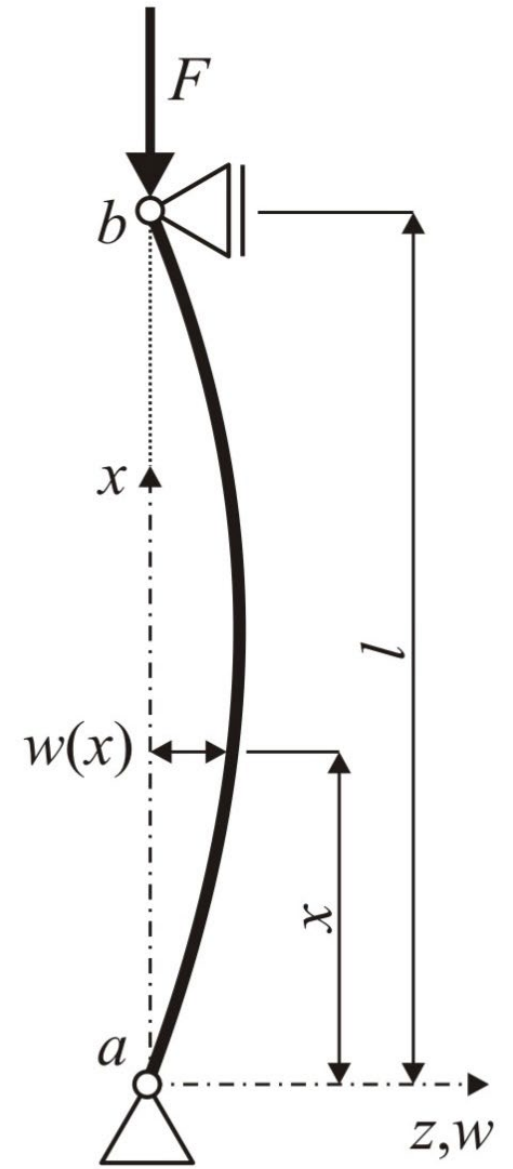
$$F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

**Eulerova
kritická síla**

Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u oboustranně kloubově uloženého prutu **ztráta stability**.

Poznámky k řešení:

- Integrační konstanta C_1 je neurčena, řešení odpovídá indiferentnímu stavu
- Prut vybočí ve směru menší tuhosti - I_{\min}



2. Jednostranně vetknutý prut

$$M = -E \cdot I \cdot w'' \rightarrow w'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \text{Diferenciální rovnice II. řádu}$$

$$M_{(x)} = -F \cdot (\delta - w_{(x)}) \rightarrow w'' = \frac{F}{E \cdot I} \cdot (\delta - w) \quad \text{Substituce} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$w'' = \alpha^2 \cdot (\delta - w) \rightarrow w'' + \alpha^2 \cdot w = \alpha^2 \cdot \delta$$

Obecné řešení:

3 neznámé

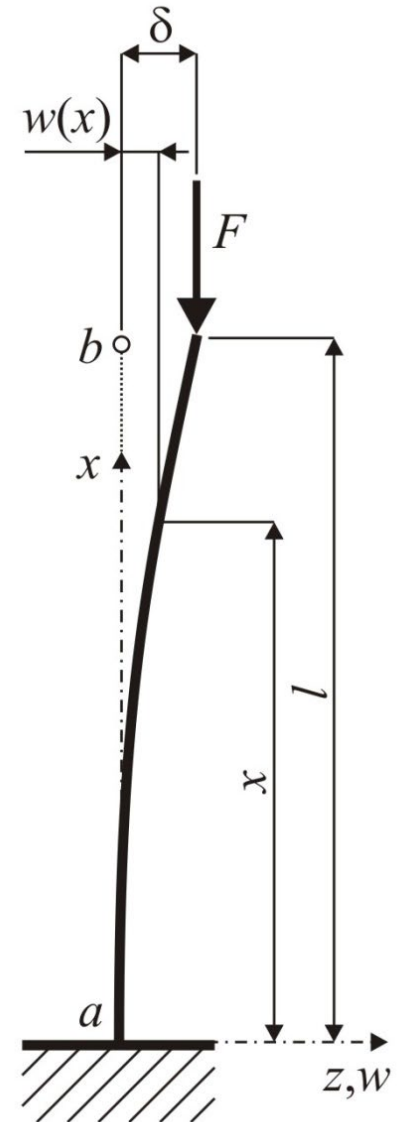
$$w'' + \alpha^2 \cdot w = \alpha^2 \cdot \delta \rightarrow w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta$$

Důkaz: $w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$

$$w'' = -\alpha^2 \cdot c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$

$$w'' + \alpha^2 \cdot w = \alpha^2 \cdot \delta$$

$$-\alpha^2 \cdot c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \alpha^2 \cdot [c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta] = \alpha^2 \cdot \delta$$



2. Jednostranně vetknutý prut

Obecné řešení:

$$w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta$$

$$w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

Okrajové podmínky:

$$w_{(x=0)} = 0$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + \delta = 0 \rightarrow c_2 = -\delta$$

$$w'_{(x=0)} = 0$$

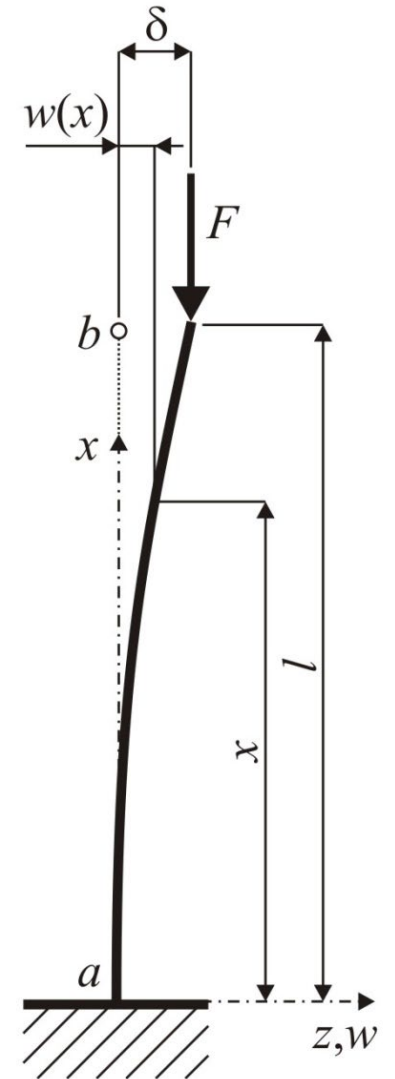
$$\alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$w_{(x=l)} = \delta$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) + \delta = \delta \rightarrow$$

$$c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) = 0$$

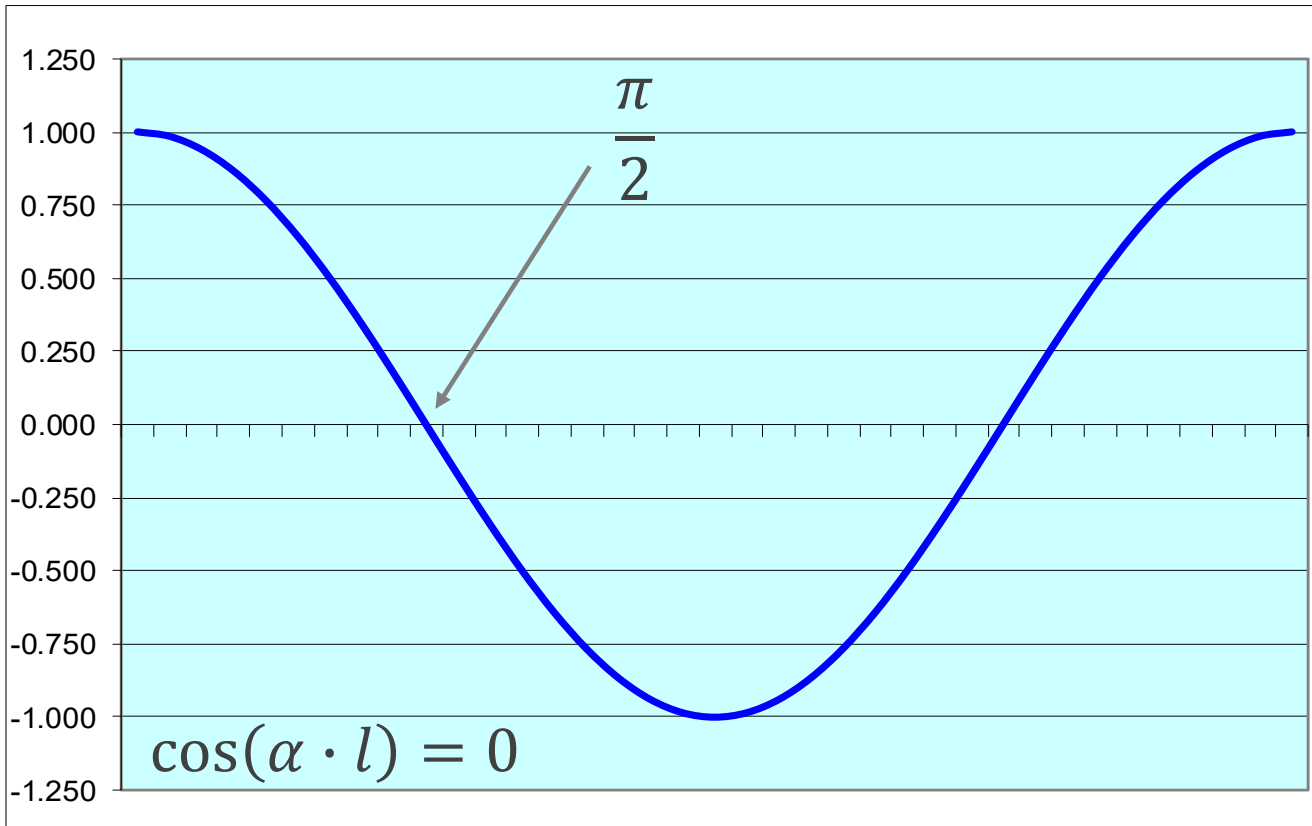
Stabilitní podmínka: $\cos(\alpha \cdot l) = 0$



2. Jednostranně vetknutý prut

Stabilitní podmínka: $\cos(\alpha \cdot l) = 0$

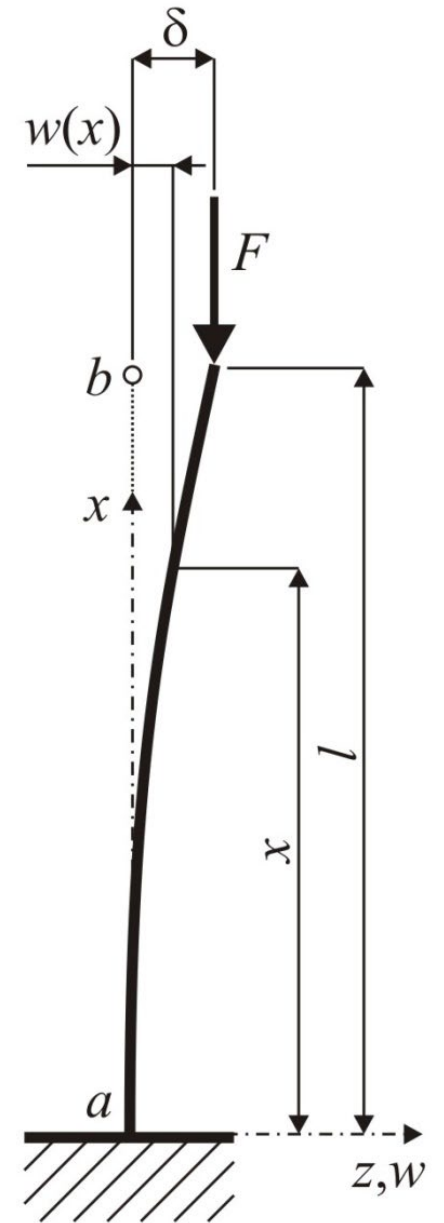
Řešení: $\alpha \cdot l = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ pro $k = 0, 1, 2, 3, \dots$



Praktický význam pouze pro nejnižší kořen:

$$\alpha \cdot l = \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2 \cdot l}$$



2. Jednostranně vetknutý prut

Výsledek řešení stabilitní podmínky:

$$\alpha = \frac{\pi}{2 \cdot l}$$

Substituce:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \frac{\pi^2}{4 \cdot l^2}$$

Po úpravě:

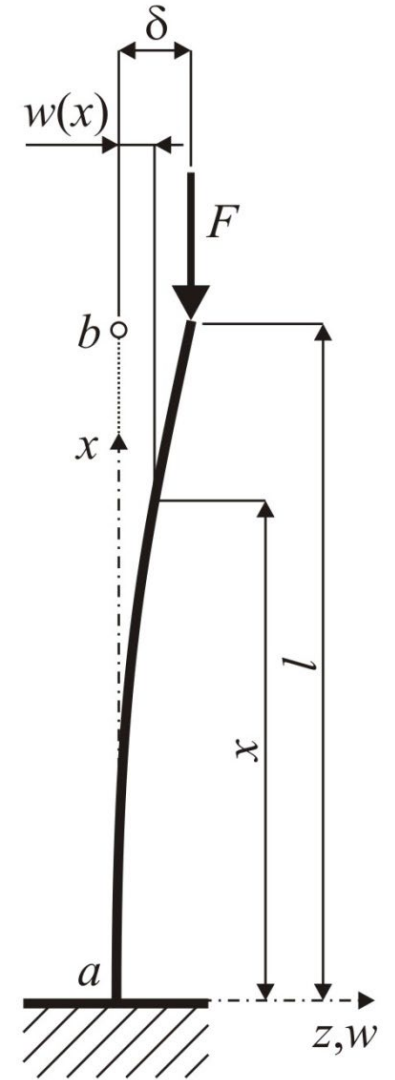
$$F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{4 \cdot l^2}$$

**Eulerova
kritická síla**

Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u jednostranně vetknutého prutu **ztráta stability**.

Poznámky k řešení:

- Integrační konstanta C_2 je neurčena, řešení odpovídá indiferentnímu stavu
- Prut vybočí ve směru menší tuhosti - I_{\min}
- Kritická síla je vzhledem k oboustranně kloubově podepřenému prutu čtvrtinová



3. Prut s vetknutým a prostě uloženým koncem

$$M = -E \cdot I \cdot w'' \rightarrow w'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

Diferenciální rovnice II. řádu
 H ... staticky neurčitá veličina

$$M_{(x)} = F \cdot w_{(x)} + H \cdot (l - x) \rightarrow w'' = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w - \frac{H}{E \cdot I} \cdot (l - x)$$

Substitute $\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \rightarrow w'' + \alpha^2 \cdot w = -\alpha^2 \cdot \frac{H}{F} \cdot (l - x)$

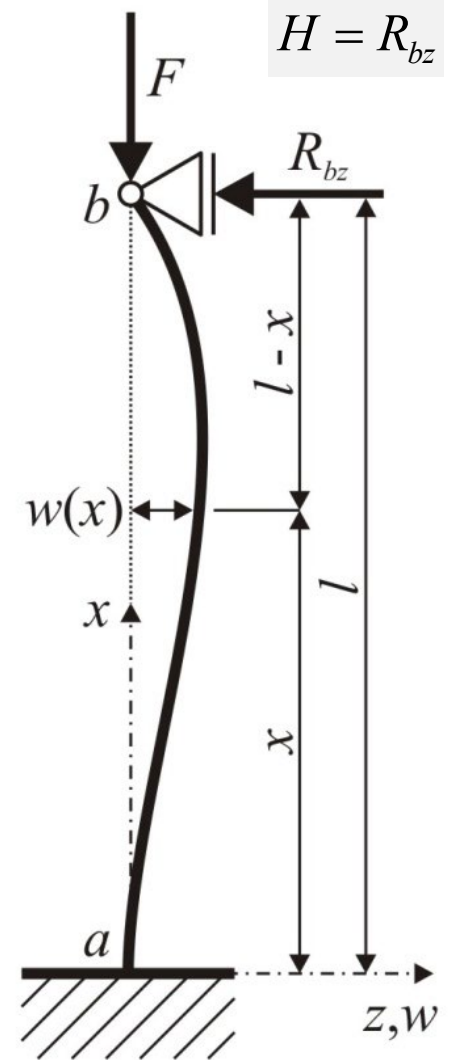
3 neznámé

Obecné řešení:

$$w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \frac{H}{F} \cdot (l - x)$$

$$w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + \frac{H}{F}$$

$$w'' = -\alpha^2 \cdot c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$



3. Prut s vetknutým a prostě uloženým koncem

Obecné řešení:

$$w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \frac{H}{F} \cdot (l - x)$$

$$w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + \frac{H}{F}$$

Okrajové podmínky:

$$w_{(x=0)} = 0$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) - \frac{H}{F} \cdot (l - 0) = 0 \rightarrow c_2 = \frac{H}{F} \cdot l$$

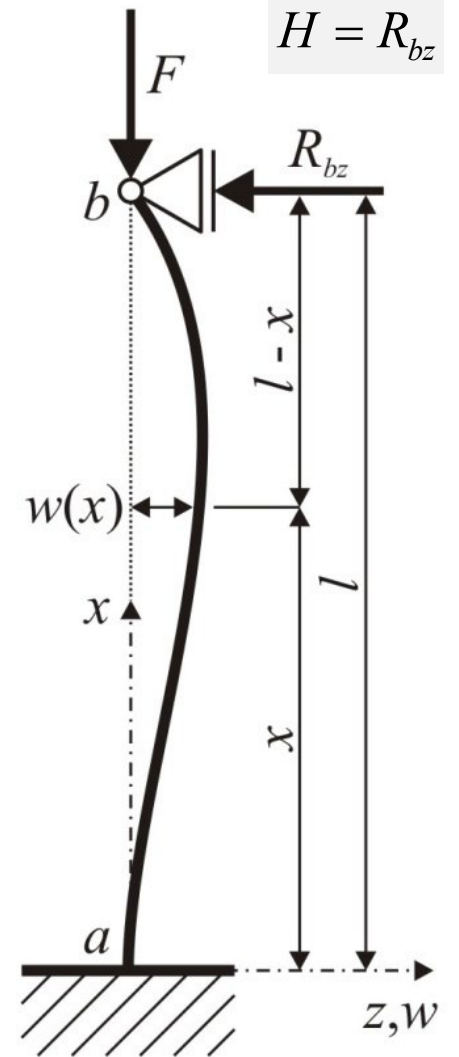
$$w'_{(x=0)} = 0$$

$$\alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + \frac{H}{F} = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{H}{\alpha \cdot F}$$

$$w_{(x=l)} = 0$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) = 0 \rightarrow$$
$$-\frac{H}{\alpha \cdot F} \cdot \sin(\alpha \cdot l) + \frac{H}{F} \cdot l \cdot \cos(\alpha \cdot l) = 0 \rightarrow \frac{\sin(\alpha \cdot l)}{\cos(\alpha \cdot l)} = \alpha \cdot l$$

Stabilitní podmínka: $\tan(\alpha \cdot l) = \alpha \cdot l$



3. Prut s vetknutým a prostě uloženým koncem

Stabilitní podmínka:

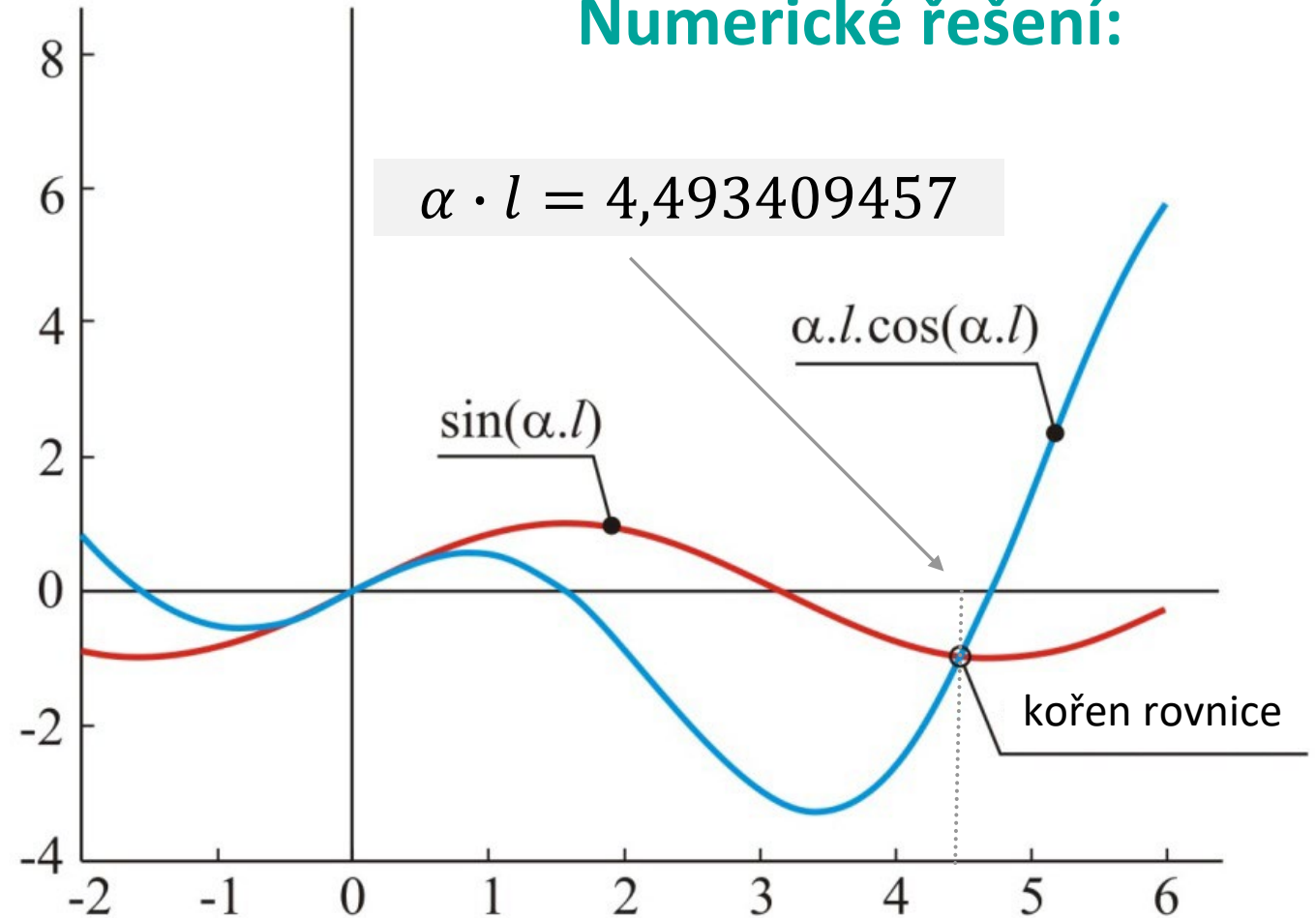
$$\tan(\alpha \cdot l) = \alpha \cdot l$$

Úprava rovnice:

$$\frac{\sin(\alpha \cdot l)}{\cos(\alpha \cdot l)} = \alpha \cdot l$$

$$\alpha \cdot l \cdot \cos(\alpha \cdot l) - \sin(\alpha \cdot l) = 0$$

Numerické řešení:



3. Prut s vetknutým a prostě uloženým koncem

Výsledek řešení stabilitní podmínky:

$$\tan(\alpha \cdot l) = (\alpha \cdot l)$$

Řešení:

$$\alpha \cdot l \cong 4,493409457$$

Substituce:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \frac{(4,4934 \dots)^2}{l^2}$$

Po úpravě:

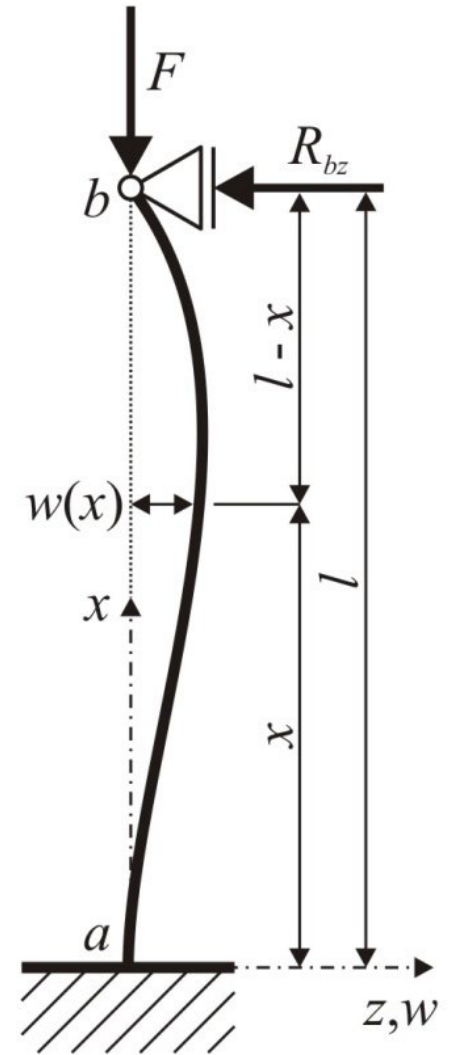
$$F = F_{cr} = (4,4934 \dots)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

**Eulerova
kritická síla**

Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u prutu s vetknutým a prostě uloženým koncem **ztráta stability**.

Poznámky k řešení:

- Prut vybočí ve směru menší tuhosti - I_{\min}



4. Oboustranně vetknutý prut

$$M = -E \cdot I \cdot w'' \rightarrow w'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \text{Diferenciální rovnice II. řádu}$$

$$M_{(x)} = F \cdot w_{(x)} - M_{by} \rightarrow w'' = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w + \frac{M_{by}}{E \cdot I} \quad \text{Substituce} \quad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$w'' + \alpha^2 \cdot w = \alpha^2 \cdot \frac{M_{by}}{F}$$

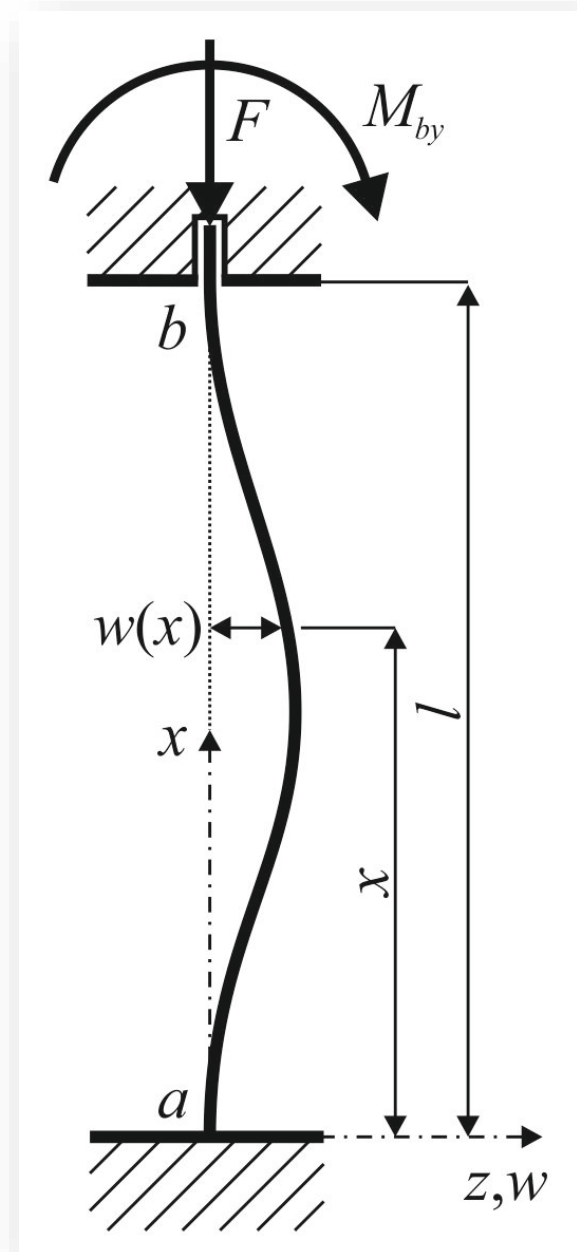
Obecné řešení:

3 neznámé

$$w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{M_{by}}{F}$$

$$w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

$$w'' = -\alpha^2 \cdot c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$$



4. Oboustranně vetknutý prut

Obecné řešení:

$$w = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{M_{by}}{F}$$

$$w' = \alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

Okrajové podmínky:

$$w_{(x=0)} = 0$$

$$c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + \frac{M_{by}}{F} = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{M_{by}}{F}$$

$$w'_{(x=0)} = 0$$

$$\alpha \cdot c_1 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$w_{(x=l)} = 0$$

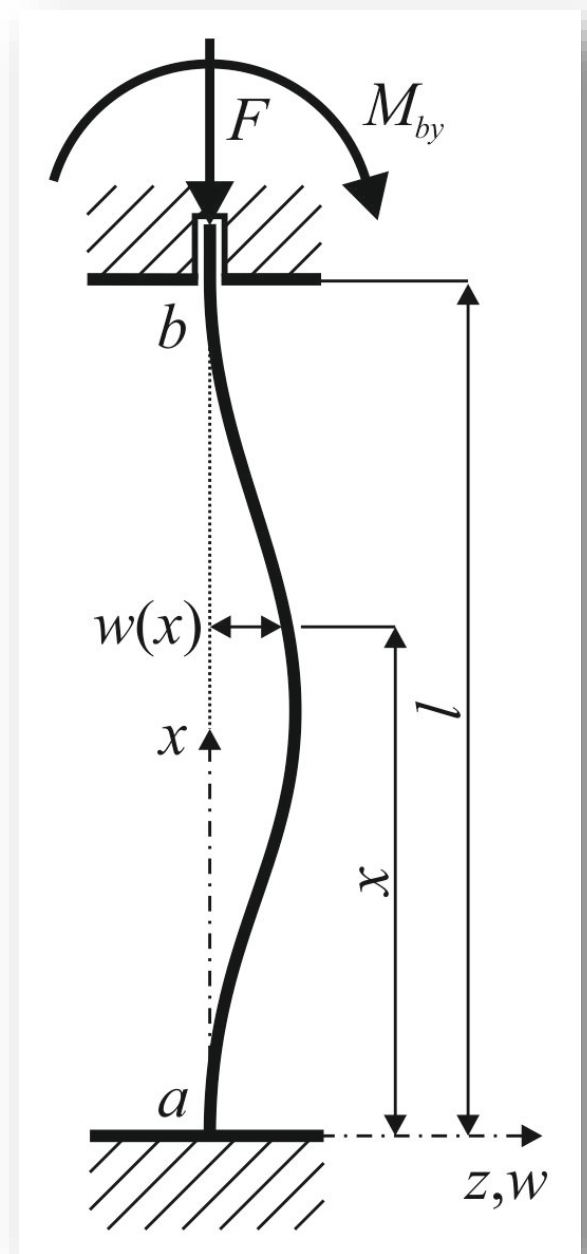
$$0 \cdot \sin(\alpha \cdot l) - \frac{M_{by}}{F} \cdot \cos(\alpha \cdot l) + \frac{M_{by}}{F} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{M_{by}}{F} \cdot (1 - \cos(\alpha \cdot l)) = 0 \rightarrow$$

Stabilitní podmínka: $\cos(\alpha \cdot l) = 1$

$$w'_{(x=l)} = 0$$

$$\alpha \cdot 0 \cdot \cos(\alpha \cdot l) + \alpha \cdot \frac{M_{by}}{F} \cdot \sin(\alpha \cdot l) = 0 \rightarrow \sin(\alpha \cdot l) = 0$$



4. Oboustranně vetknutý prut

Stabilitní podmínka: $\cos(\alpha \cdot l) = 1$

Výsledek řešení stabilitní podmínky:

$$\alpha \cdot l = 2 \cdot \pi$$

Substitute:
$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \frac{(2 \cdot \pi)^2}{l^2}$$

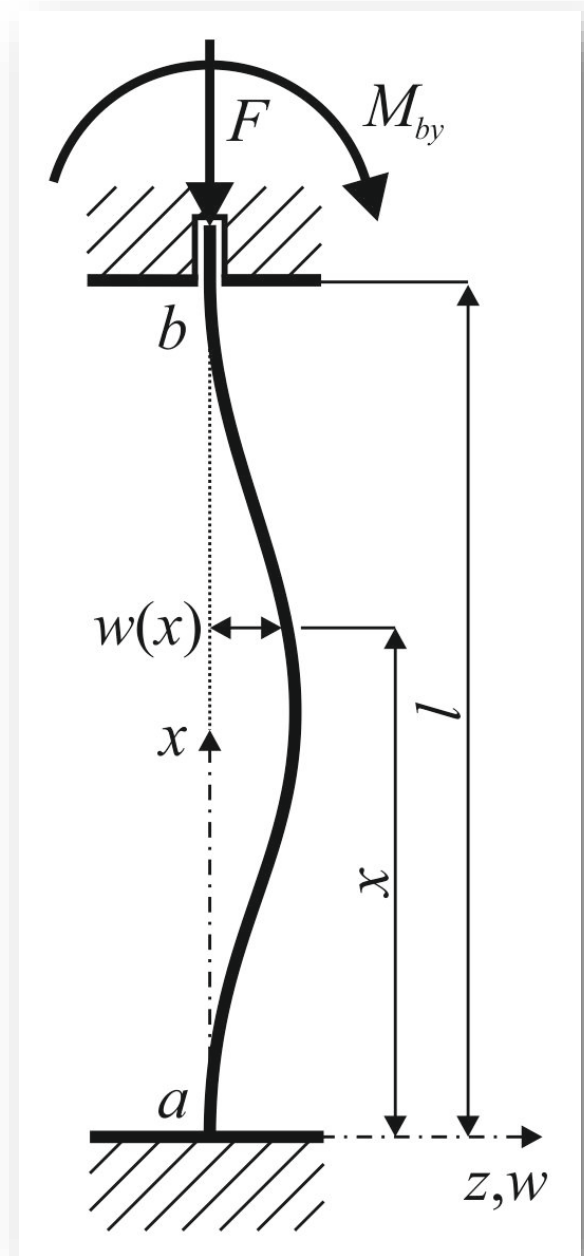
Po úpravě:
$$F = F_{cr} = (2 \cdot \pi)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

**Eulerova
kritická síla**

Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u oboustranně vetknutého prutu **ztráta stability**.

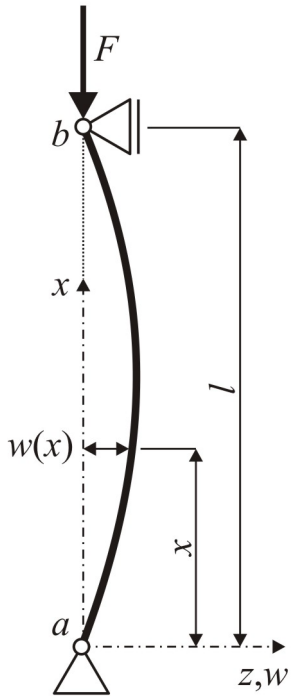
Poznámky k řešení:

- Prut vybočí ve směru menší tuhosti - I_{\min}
- Kritická síla je vzhledem k oboustranně kloubově podepřenému prutu čtyřnásobná



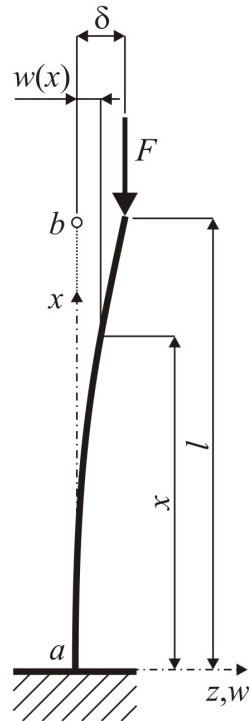
Shrnutí Eulerova řešení stability štíhlého tlačného prutu

1.



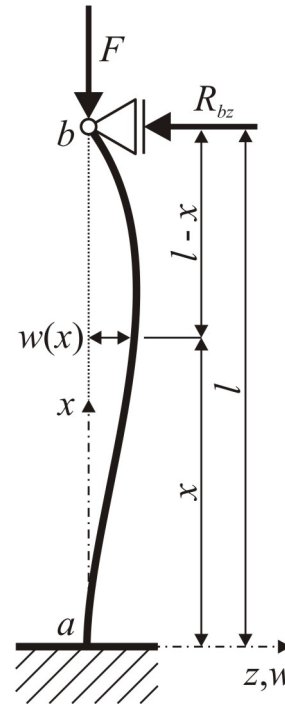
$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

2.



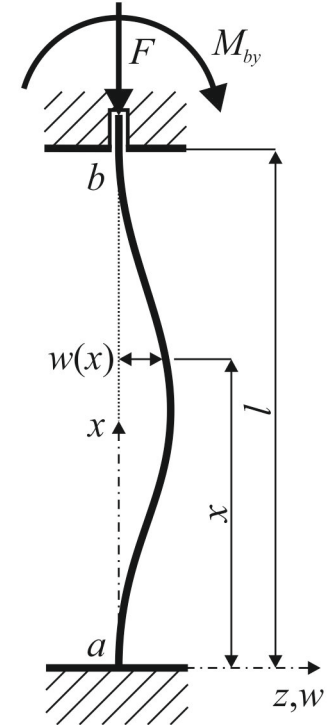
$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{4 \cdot l^2}$$

3.



$$F_{cr} = (4,4934)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

4.



$$F_{cr} = (2 \cdot \pi)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

Lze sjednotit do tvaru:

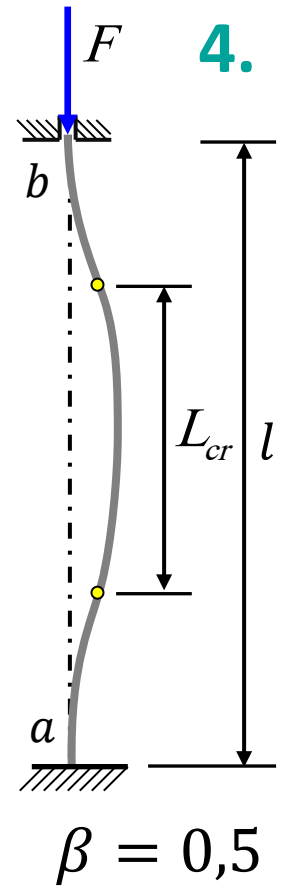
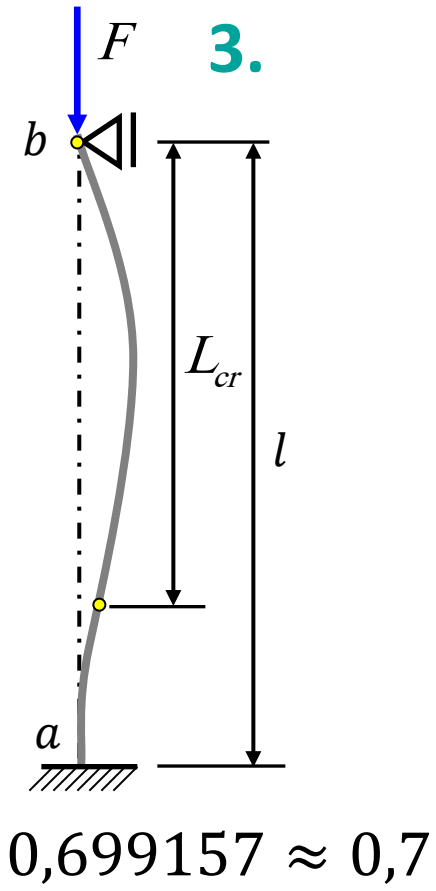
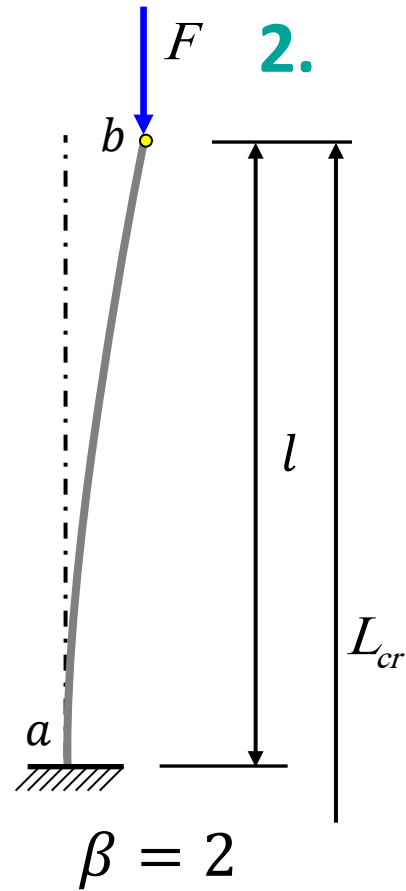
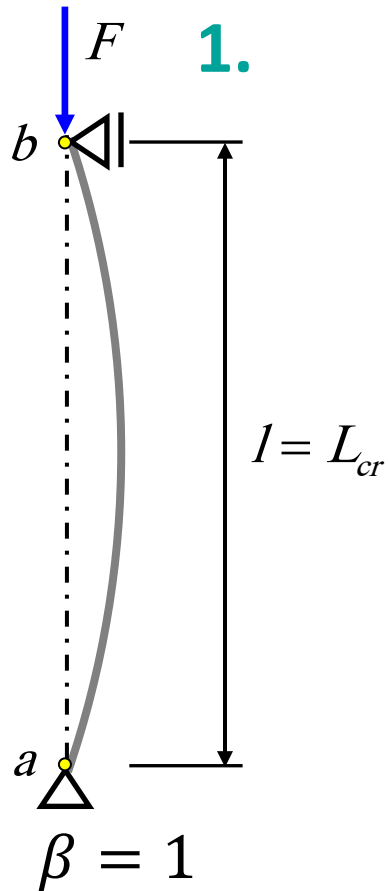
$$L_{cr} = \beta \cdot l$$

$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

L_{cr} ... **vzpěrná délka**

β ... **součinitel vzpěrné délky**

Shrnutí Eulerova řešení stability štíhlého tlačného prutu



$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

$L_{cr} = \beta \cdot l$... **vzpěrná délka**

je rovna délce sinusové půlvlny ohybové čáry po vybočení – vzdálenost inflexních bodů.

Sloupy vstupního traktu, Tesco, Ostrava-Třebovice



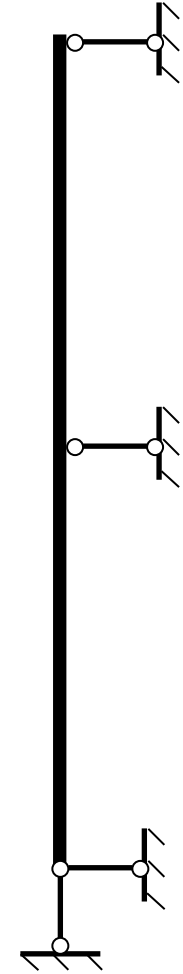
Sloupy vstupního traktu, Tesco, Ostrava-Třebovice



Sloup nároží, Aula VŠB-TU Ostrava



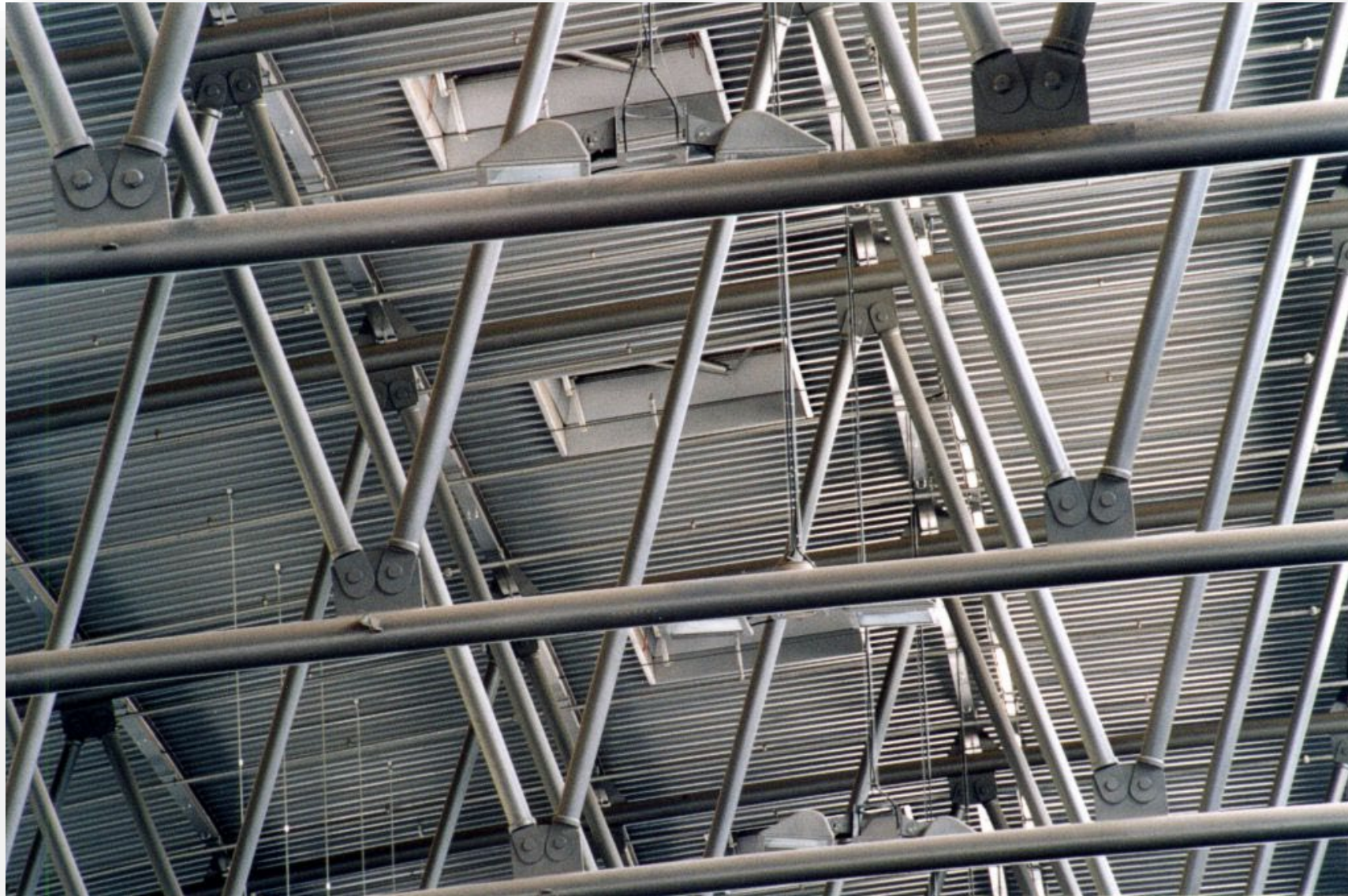
Sloup nároží, Aula VŠB-TU Ostrava



Pavilon V, výstaviště, Brno



Pavilon V, výstaviště, Brno



Kritické napětí, Eulerova hyperbola

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}$$

$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

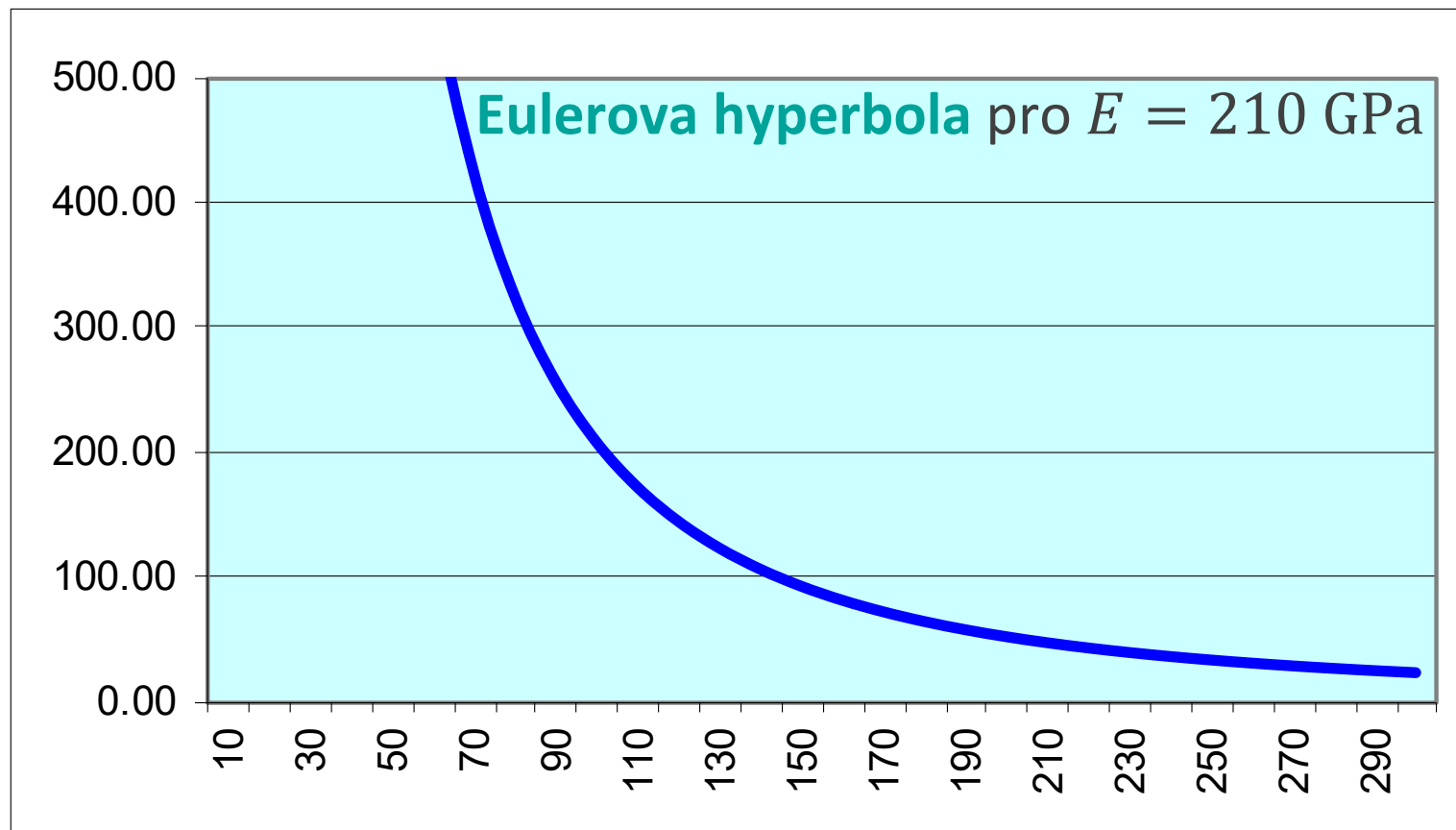
$$\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{A \cdot L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot i^2}{L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2}$$

Poloměr setrvačnosti:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Štíhlost prutu:

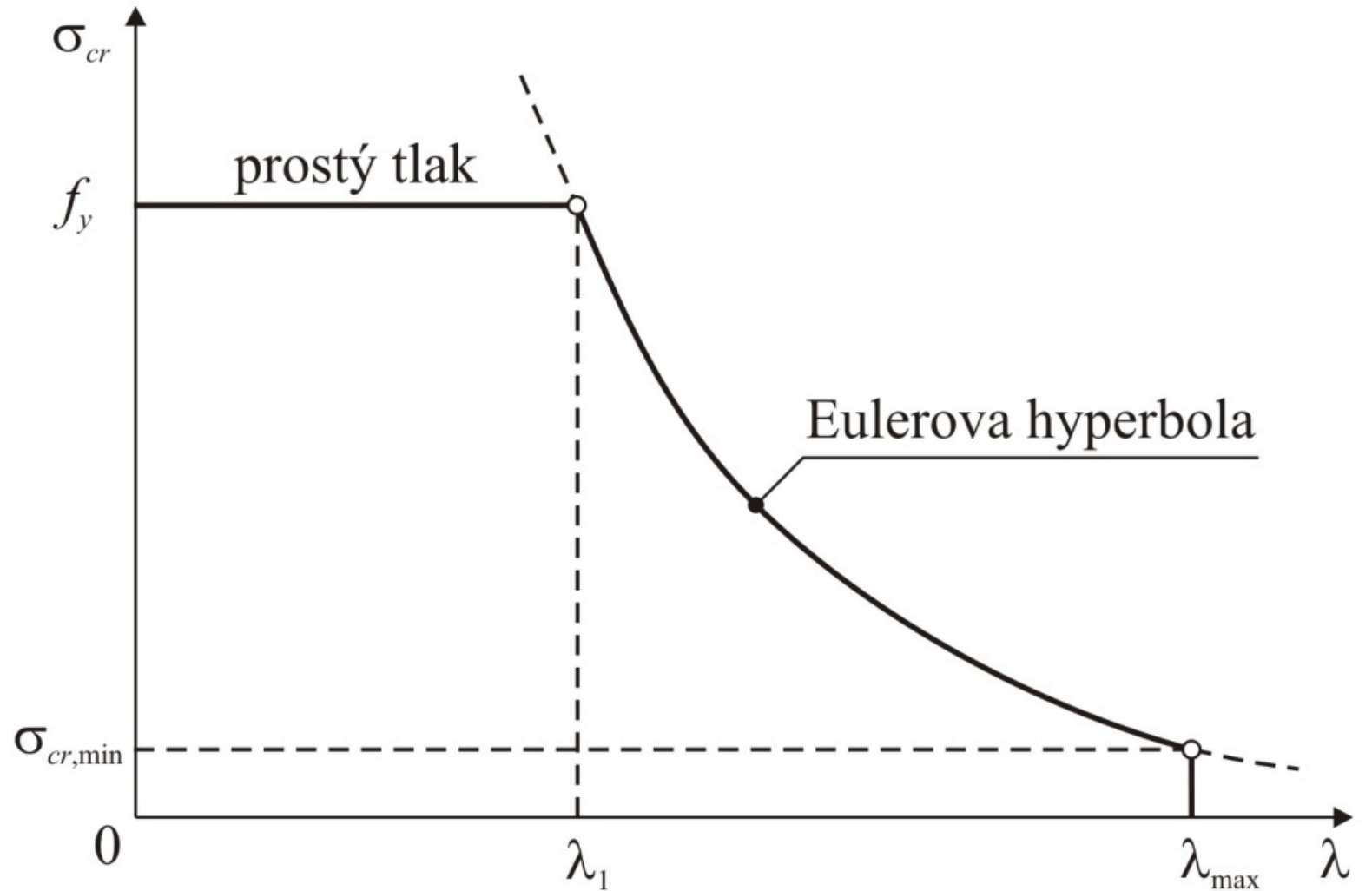
$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$$



Eulerova hyperbola v pružném oboru

Pro $\sigma_{cr} > f_y$ rozhoduje únosnost v **prostém tlaku**

$$\lambda_{\max} \approx 290$$



Reálné chování nosného prvku v tlaku

Chování tlačného prutu v pružnoplastickém oboru:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = f_y \rightarrow \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

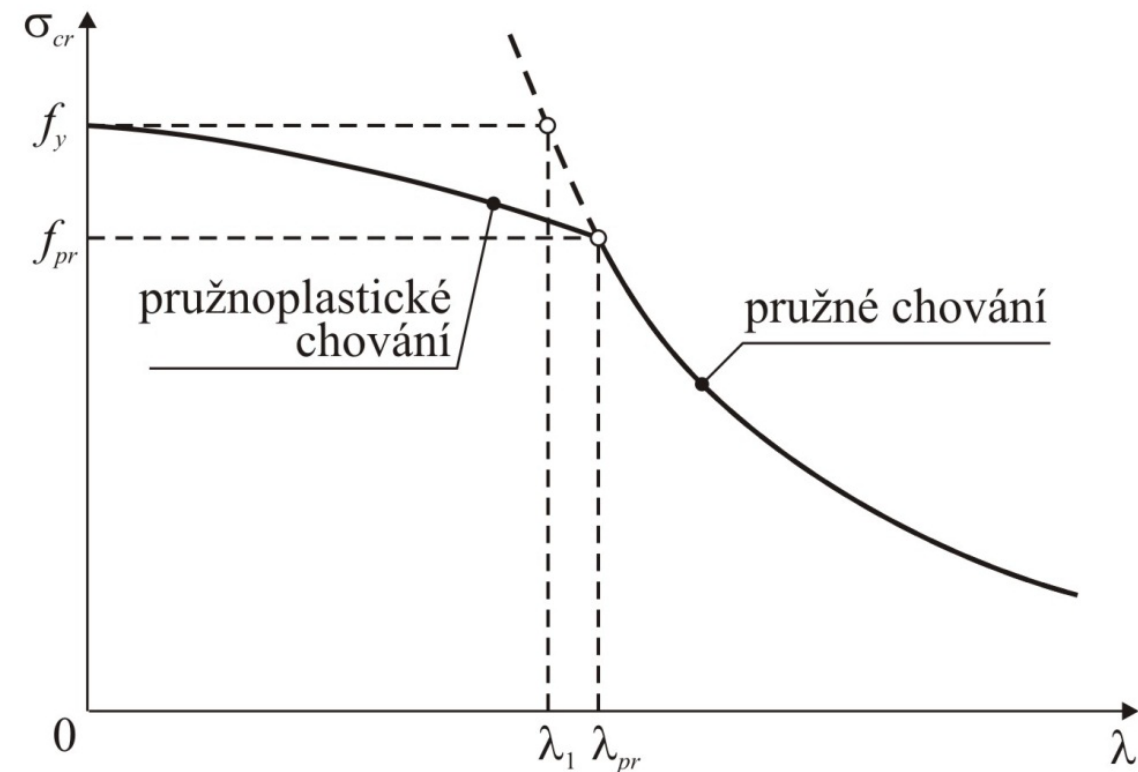
$$\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = f_{pr} \rightarrow \lambda_{pr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_{pr}}}$$

Pro $f_y = 235$ MPa a $E = 210$ GPa:

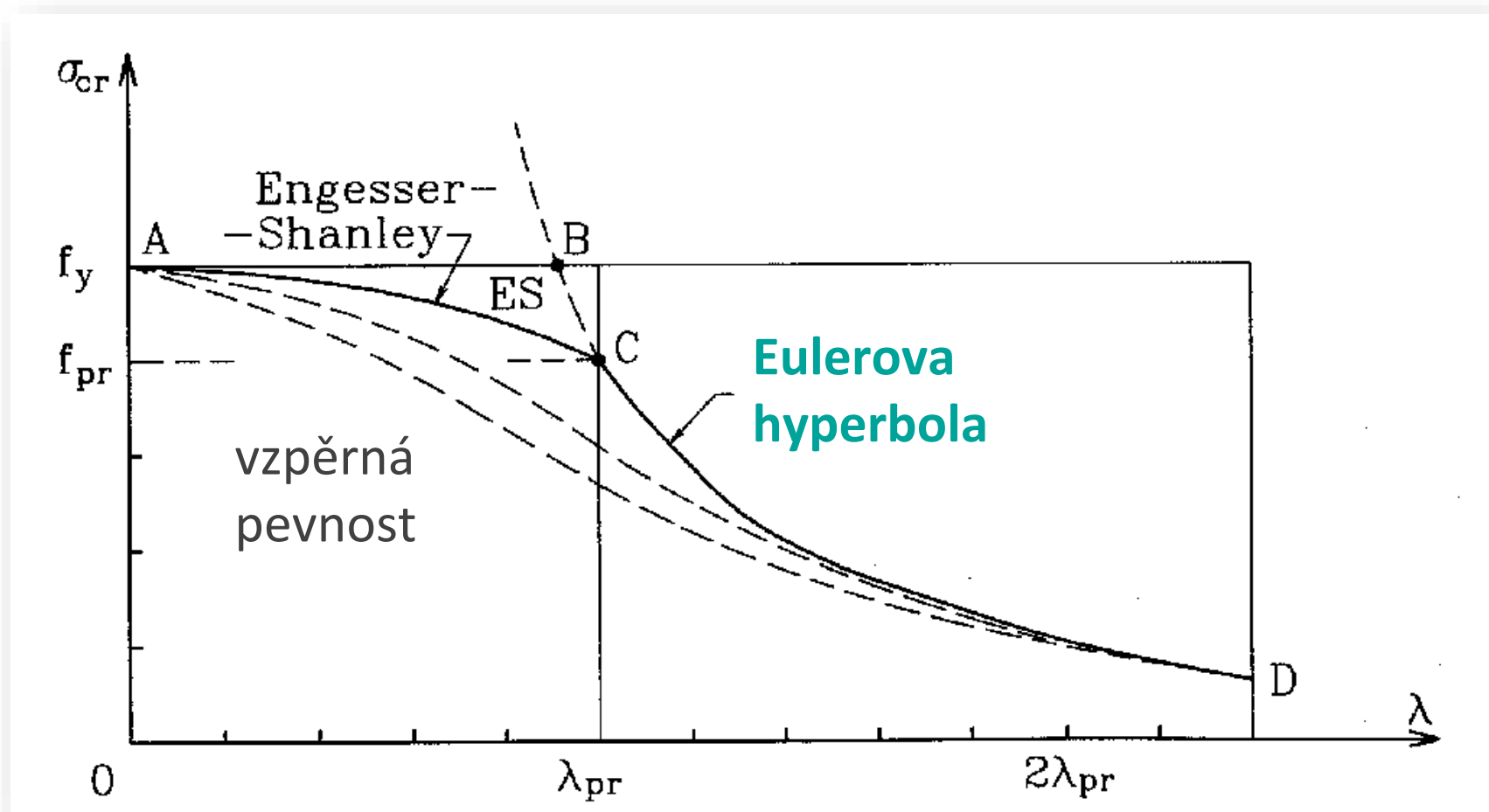
$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{210\,000}{235}} \cong 93,91$$

Pro $f_{pr} = 190$ MPa a $E = 210$ GPa:

$$\lambda_{pr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210\,000}{190}} \cong 104,44$$



Reálné chování nosného prvku v tlaku



$$\lambda_{pr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_{pr}}}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{f_y}{1 + \left(\frac{f_y}{f_{pr}} - 1\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_{pr}}\right)^2}$$

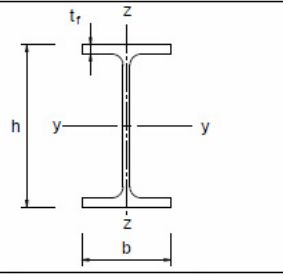
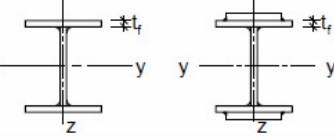
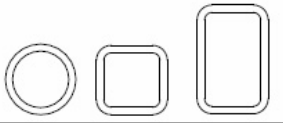
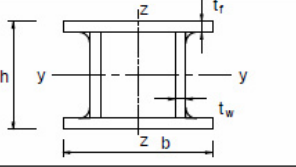
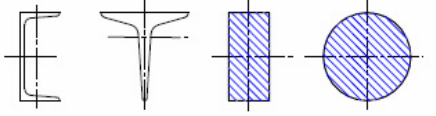
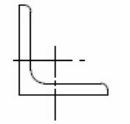
Úsečka \overline{AB} ... prostý tlak

Křivka \overline{BD} ... Eulerova hyperbola pro vzpěr

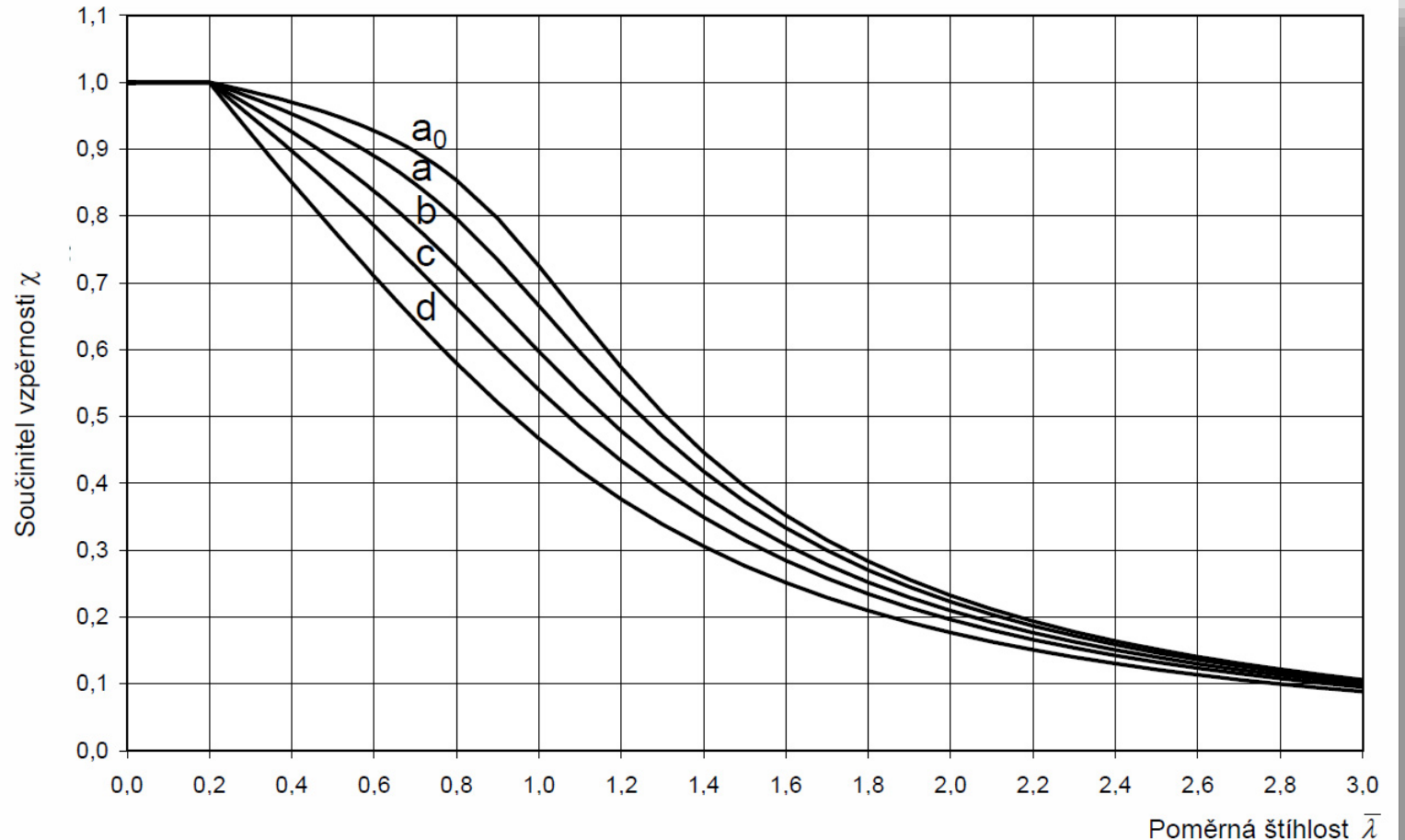
Křivka \overline{AC} ... kritické napětí Engesser-Shanley

f_{pr} ... napětí na mezi úměrnosti

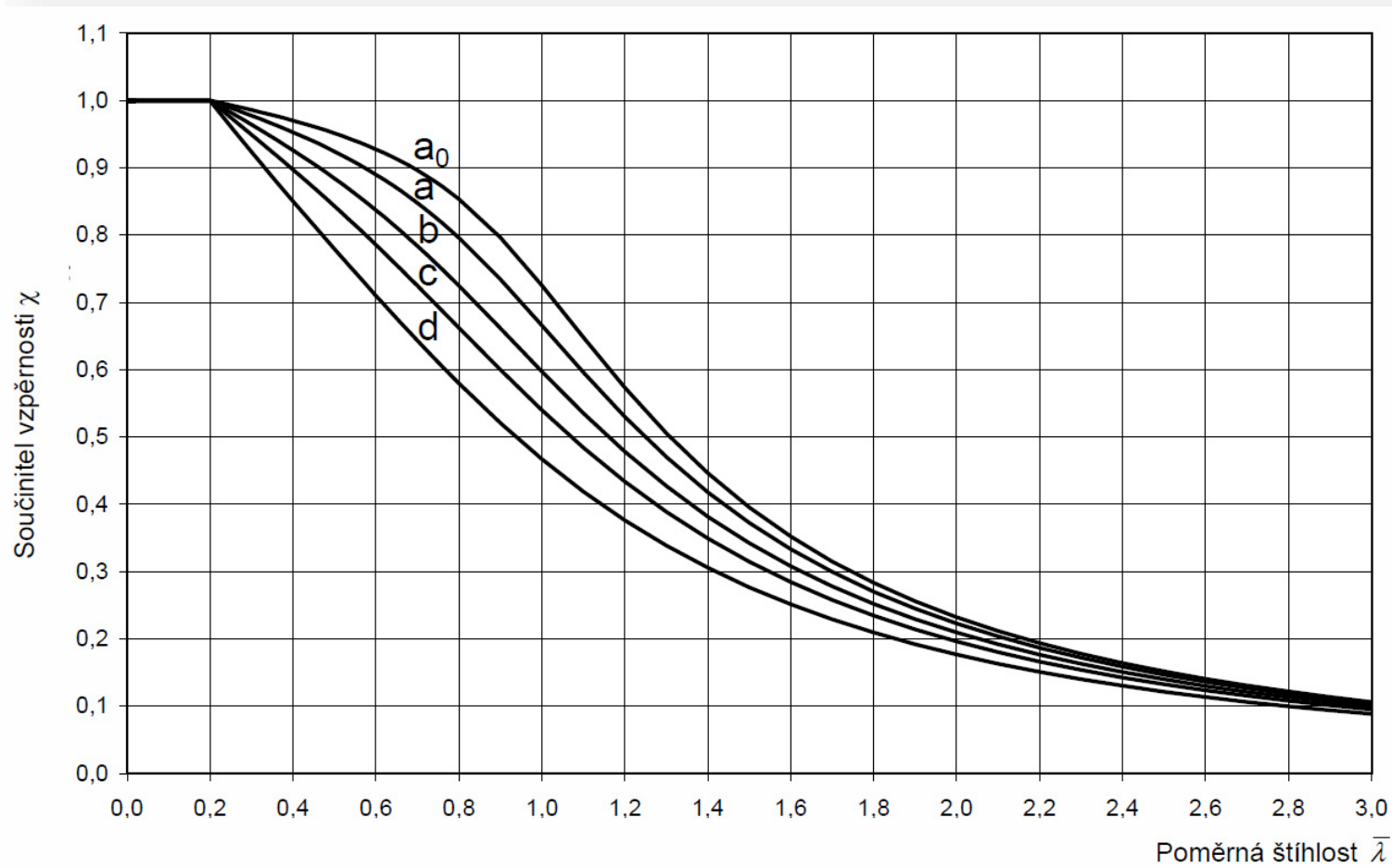
Posouzení ocelových prutů na vzpěr

Průřez	Meze	Vybočení kolmo k ose	Křivka vzpěrné pevnosti	
			S235 S275 S355 S420	S460
 Válcované průřezy	$h/b > 1,2$	y-y z-z	$t_f \leq 40$ mm	a a ₀
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$ mm	b a
	$h/b \leq 1,2$	y-y z-z	$t_f \leq 100$ mm	b a
			$t_f > 100$ mm	c a
 Svařované průřezy	$t_f \leq 40$ mm	y-y z-z	b c	b c
			$t_f > 40$ mm	c d
 Duté průřezy	válcované za tepla	všechny	a	a ₀
	tvarované za studena	všechny	c	c
 Svařované duté průřezy	všechny průřezy kromě níže uvedených výjimek	všechny	b	b
	tlusté svary: $a > 0,5 t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	všechny	c	c
 U, T a ploché průřezy		všechny	c	c
 Úhelníky		všechny	b	b

Křivky vzpěrné pevnosti závisí na tvaru průřezu, způsobu výroby, typu materiálu a směru vybočení.



Posouzení ocelových prutů na vzpěr



$$N_{Ed} \leq N_{Rd} = \chi \cdot A \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_M}$$

$\chi \leq 1$... součinitel vzpěrnosti

$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$... poměrná štíhlost

$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Pro $f_y = 235$ MPa a $E = 210$ GPa:

$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{210\,000}{235}} \cong 93,91$$

Posouzení ocelových prutů na vzpěr

Součinitel vzpěrnosti podle ČSN EN 1993:

$\bar{\lambda}$	Křivka vzpěrné pevnosti				$\bar{\lambda}$	Křivka vzpěrné pevnosti				$\bar{\lambda}$	Křivka vzpěrné pevnosti			
	a	b	c	d		a	b	c	d		a	b	c	d
	χ					χ					χ			
0,20	1,000	1,000	1,000	1,000										
0,21	0,998	0,996	0,995	0,992	0,56	0,905	0,857	0,809	0,738	0,91	0,727	0,655	0,594	0,515
0,22	0,996	0,993	0,990	0,984	0,57	0,901	0,852	0,803	0,731	0,92	0,721	0,648	0,588	0,510
0,23	0,993	0,989	0,985	0,977	0,58	0,897	0,847	0,797	0,724	0,93	0,714	0,642	0,582	0,504
0,24	0,991	0,986	0,980	0,969	0,59	0,894	0,842	0,791	0,717	0,94	0,707	0,635	0,576	0,499
0,25	0,989	0,982	0,975	0,961	0,60	0,890	0,837	0,785	0,710	0,95	0,700	0,629	0,569	0,493
0,26	0,987	0,979	0,969	0,954	0,61	0,886	0,832	0,779	0,703	0,96	0,693	0,623	0,563	0,488
0,27	0,984	0,975	0,964	0,946	0,62	0,882	0,827	0,773	0,696	0,97	0,686	0,616	0,558	0,483
0,28	0,982	0,971	0,959	0,938	0,63	0,878	0,822	0,767	0,690	0,98	0,680	0,610	0,552	0,477
0,29	0,980	0,968	0,954	0,931	0,64	0,874	0,816	0,761	0,683	0,99	0,673	0,603	0,546	0,472
0,30	0,977	0,964	0,949	0,923	0,65	0,870	0,811	0,755	0,676	1,00	0,666	0,597	0,540	0,467
0,31	0,975	0,960	0,944	0,916	0,66	0,866	0,806	0,749	0,670	1,01	0,659	0,591	0,534	0,462
0,32	0,973	0,957	0,939	0,909	0,67	0,861	0,800	0,743	0,663	1,02	0,652	0,584	0,528	0,457
0,33	0,970	0,953	0,934	0,901	0,68	0,857	0,795	0,737	0,656	1,03	0,645	0,578	0,523	0,452
0,34	0,968	0,949	0,929	0,894	0,69	0,852	0,789	0,731	0,650	1,04	0,638	0,572	0,517	0,447
0,35	0,966	0,945	0,922	0,887	0,70	0,848	0,784	0,725	0,643	1,05	0,631	0,566	0,511	0,442
0,36	0,963	0,942	0,918	0,879	0,71	0,843	0,778	0,718	0,637	1,06	0,624	0,559	0,506	0,438
0,37	0,961	0,938	0,913	0,872	0,72	0,838	0,772	0,712	0,630	1,07	0,617	0,553	0,500	0,433
0,38	0,958	0,934	0,908	0,865	0,73	0,833	0,766	0,706	0,624	1,08	0,610	0,547	0,495	0,428
0,39	0,955	0,930	0,903	0,858	0,74	0,828	0,761	0,700	0,617	1,09	0,603	0,541	0,490	0,423
0,40	0,953	0,926	0,897	0,850	0,75	0,823	0,755	0,694	0,611	1,10	0,596	0,535	0,484	0,419
0,41	0,950	0,922	0,892	0,843	0,76	0,818	0,749	0,687	0,605	1,11	0,589	0,529	0,479	0,414
0,42	0,947	0,918	0,887	0,836	0,77	0,812	0,743	0,681	0,598	1,12	0,582	0,523	0,474	0,410
0,43	0,945	0,914	0,881	0,829	0,78	0,807	0,737	0,675	0,592	1,13	0,576	0,518	0,469	0,406
0,44	0,942	0,910	0,876	0,822	0,79	0,801	0,731	0,668	0,586	1,14	0,569	0,512	0,463	0,401
0,45	0,939	0,906	0,871	0,815	0,80	0,796	0,724	0,662	0,580	1,15	0,562	0,506	0,458	0,397
0,46	0,936	0,902	0,865	0,808	0,81	0,790	0,718	0,656	0,574	1,16	0,556	0,500	0,453	0,393
0,47	0,933	0,897	0,860	0,800	0,82	0,784	0,712	0,650	0,568	1,17	0,549	0,495	0,448	0,388
0,48	0,930	0,893	0,854	0,793	0,83	0,778	0,706	0,643	0,562	1,18	0,543	0,489	0,443	0,384
0,49	0,927	0,889	0,849	0,786	0,84	0,772	0,699	0,637	0,556	1,19	0,536	0,484	0,439	0,380
0,50	0,924	0,884	0,843	0,779	0,85	0,766	0,693	0,631	0,550	1,20	0,530	0,478	0,434	0,376
0,51	0,921	0,880	0,837	0,772	0,86	0,760	0,687	0,625	0,544	1,21	0,524	0,473	0,429	0,372
0,52	0,918	0,875	0,832	0,765	0,87	0,753	0,680	0,618	0,538	1,22	0,518	0,468	0,424	0,368
0,53	0,915	0,871	0,826	0,758	0,88	0,747	0,674	0,612	0,532	1,23	0,511	0,462	0,420	0,364
0,54	0,911	0,866	0,820	0,751	0,89	0,740	0,668	0,606	0,526	1,24	0,505	0,457	0,415	0,361
0,55	0,908	0,861	0,815	0,744	0,90	0,734	0,661	0,600	0,521	1,25	0,499	0,452	0,411	0,357

$\bar{\lambda}$	Křivka vzpěrné pevnosti				$\bar{\lambda}$	Křivka vzpěrné pevnosti				$\bar{\lambda}$	Křivka vzpěrné pevnosti			
	a	b	c	d		a	b	c	d		a	b	c	d
	χ					χ					χ			
1,26	0,493	0,447	0,406	0,353	1,56	0,348	0,321	0,296	0,261	1,86	0,255	0,238	0,222	0,199
1,27	0,487	0,442	0,402	0,349	1,57	0,344	0,318	0,293	0,258	1,87	0,252	0,236	0,220	0,197
1,28	0,482	0,437	0,397	0,346	1,58	0,341	0,314	0,290	0,256	1,88	0,250	0,234	0,218	0,195
1,29	0,476	0,432	0,393	0,342	1,59	0,337	0,311	0,287	0,254	1,89	0,247	0,231	0,216	0,194
1,30	0,470	0,427	0,389	0,339	1,60	0,333	0,308	0,284	0,251	1,90	0,245	0,229	0,214	0,192
1,31	0,465	0,422	0,385	0,335	1,61	0,330	0,305	0,281	0,249	1,91	0,243	0,227	0,212	0,190
1,32	0,459	0,417	0,380	0,332	1,62	0,326	0,302	0,279	0,247	1,92	0,240	0,225	0,210	0,189
1,33	0,454	0,413	0,376	0,328	1,63	0,323	0,299	0,276	0,244	1,93	0,238	0,223	0,209	0,187
1,34	0,448	0,408	0,372	0,325	1,64	0,319	0,295	0,273	0,242	1,94	0,236	0,221	0,207	0,186
1,35	0,443	0,404	0,368	0,321	1,65	0,316	0,292	0,271	0,240	1,95	0,234	0,219	0,205	0,184
1,36	0,438	0,399	0,364	0,318	1,66	0,312	0,289	0,268	0,237	1,96	0,231	0,217	0,203	0,183
1,37	0,433	0,395	0,361	0,315	1,67	0,309	0,287	0,265	0,235	1,97	0,229	0,215	0,201	0,181
1,38	0,428	0,390	0,357	0,312	1,68	0,306	0,284	0,263	0,233	1,98	0,227	0,213	0,200	0,180
1,39	0,423	0,386	0,353	0,309	1,69	0,303	0,281	0,260	0,231	1,99	0,225	0,211	0,198	0,178
1,40	0,418	0,382	0,349	0,306	1,70	0,299	0,278	0,258	0,229	2,00	0,223	0,209	0,196	0,177
1,41	0,413	0,378	0,346	0,302	1,71	0,296	0,275	0,255	0,227	2,10	0,204	0,192	0,180	0,163
1,42	0,408	0,373	0,342	0,299	1,72	0,293	0,273	0,253	0,225	2,20	0,187	0,176	0,166	0,151
1,43	0,404	0,369	0,338	0,296	1,73	0,290	0,270	0,250	0,223	2,30	0,172	0,163	0,154	0,140
1,44	0,399	0,365	0,335	0,293	1,74	0,287	0,269	0,248	0,221	2,40	0,159	0,151	0,143	0,130
1,45	0,394	0,361	0,331	0,291	1,75	0,284	0,265	0,246	0,219	2,50	0,147	0,140	0,132	0,121
1,46	0,390	0,357	0,328	0,288	1,76	0,281	0,262	0,243	0,217	2,60	0,136	0,130	0,123	0,113
1,47	0,385	0,354	0,324	0,285	1,77	0,279	0,259	0,241	0,215	2,70	0,127	0,121	0,115	0,106
1,48	0,381	0,350	0,321	0,282	1,78	0,276	0,257	0,239	0,213	2,80	0,118	0,112	0,108	0,100
1,49	0,377	0,346	0,318	0,279	1,79	0,273	0,255	0,237	0,211	2,90	0,111	0,106	0,101	0,094
1,50	0,372	0,342	0,315	0,277	1,80	0,270	0,252	0,235	0,209	3,00	0,104	0,099	0,095	0,088
1,51	0,368	0,339	0,311	0,274	1,81	0,268	0,250	0,232	0,207	3,10	0,097	0,093	0,090	0,083
1,52	0,364	0,335	0,308	0,271	1,82	0,265	0,247	0,230	0,206	3,20	0,091	0,088	0,084	0,079
1,53	0,360	0,331	0,305	0,269	1,83	0,262	0,245	0,228	0,204	3,30	0,086	0,083	0,080	0,074
1,54	0,356	0,328	0,302	0,266	1,84	0,260	0,243	0,226	0,202	3,40	0,081	0,078	0,075	0,071
1,55	0,352	0,324	0,299	0,263	1,85	0,257	0,240	0,224	0,200	3,50	0,077	0,074	0,071	0,067