

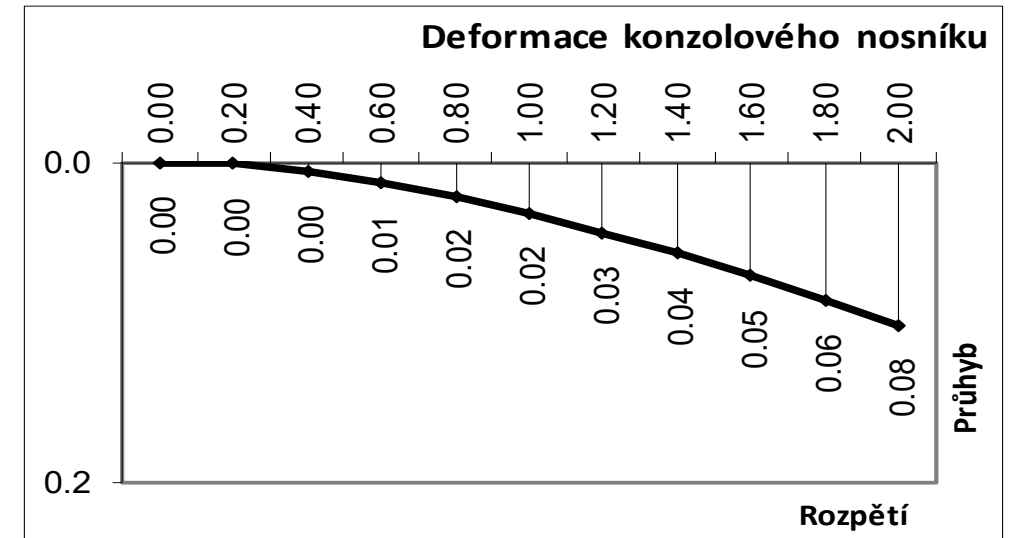
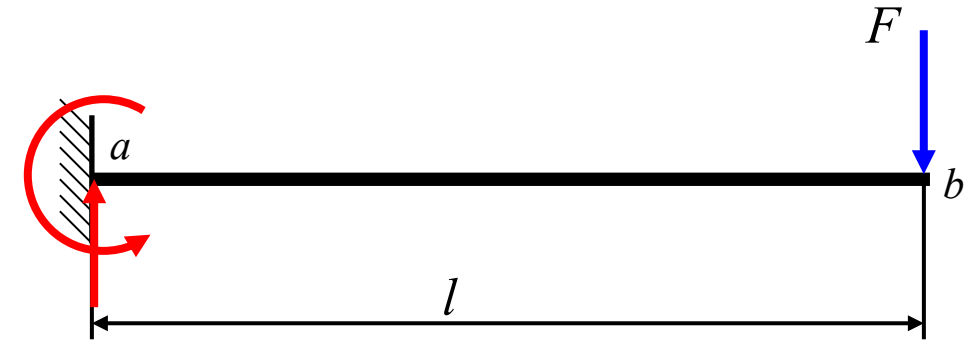
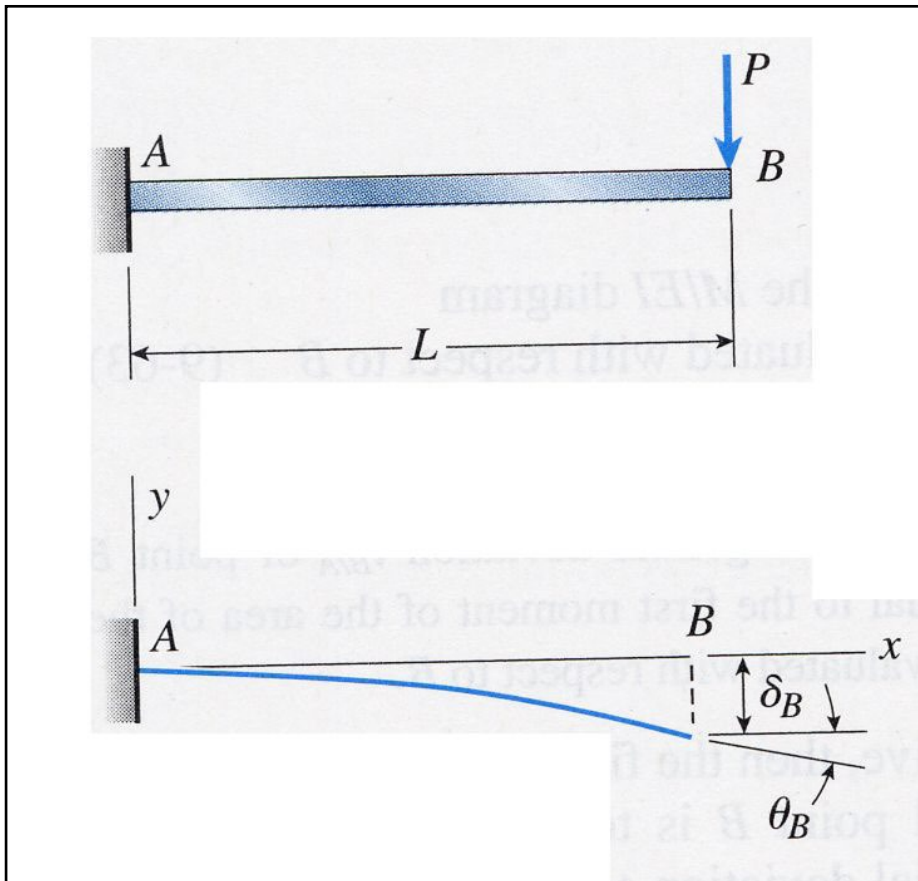
Téma 10:

Přetvoření ohýbaných nosníků

- Základní vztahy a předpoklady řešení
- Přetvoření nosníků od nerovnoměrného oteplení
- Metody řešení založené na integraci diferenciální rovnice ohybové čáry
- Dimenzování nosného prvku namáhaného ohybem podle mezního stavu použitelnosti
- Přetvoření nosníků namáhaných ohybem s proměnným průřezem
- Staticky neurčitě případy ohybu
- Vliv smyku na přetvoření ohýbaného nosníku

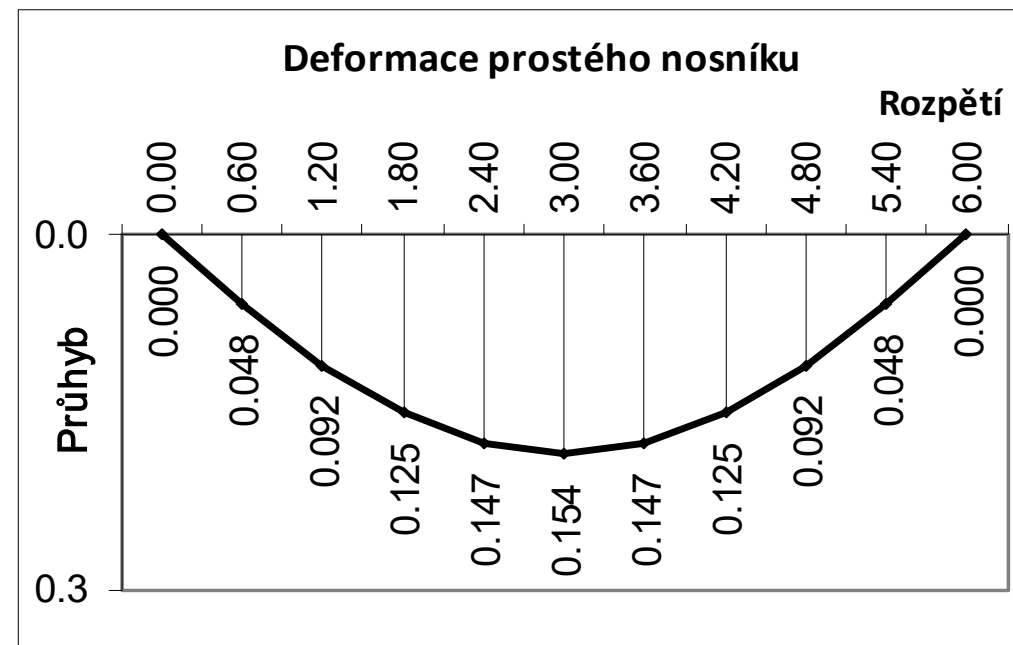
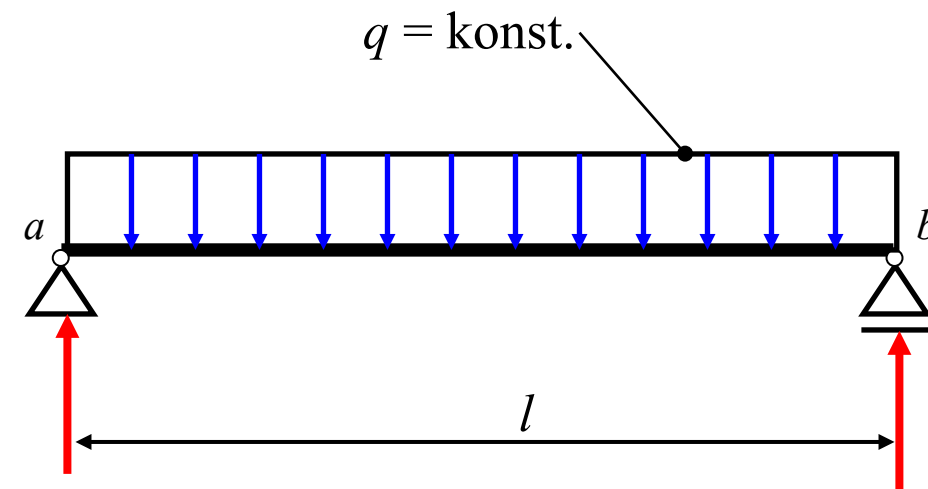
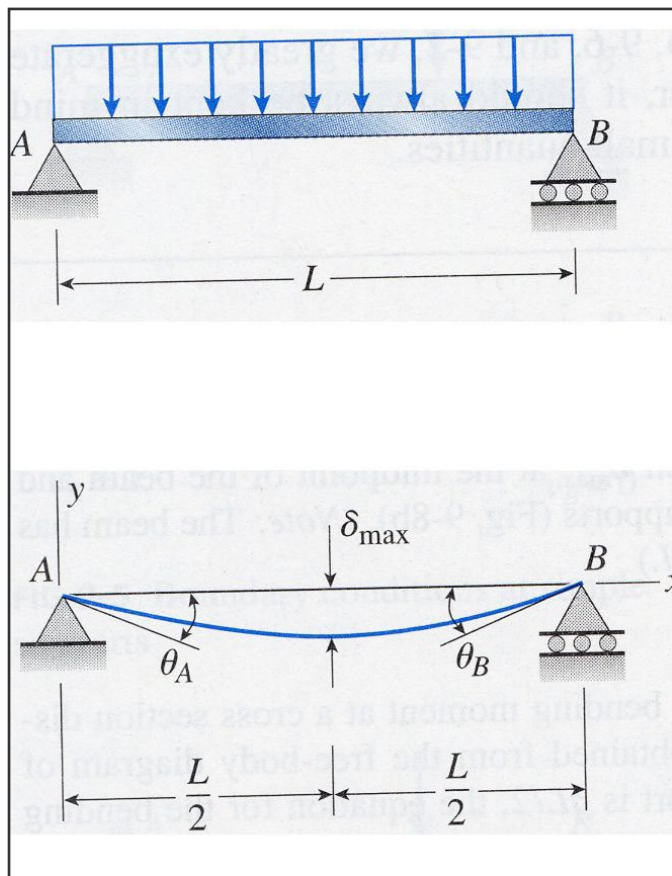
Deformace (přetvoření)

Geometrické změny rozměrů a tvaru těles způsobené účinkem zatížení.



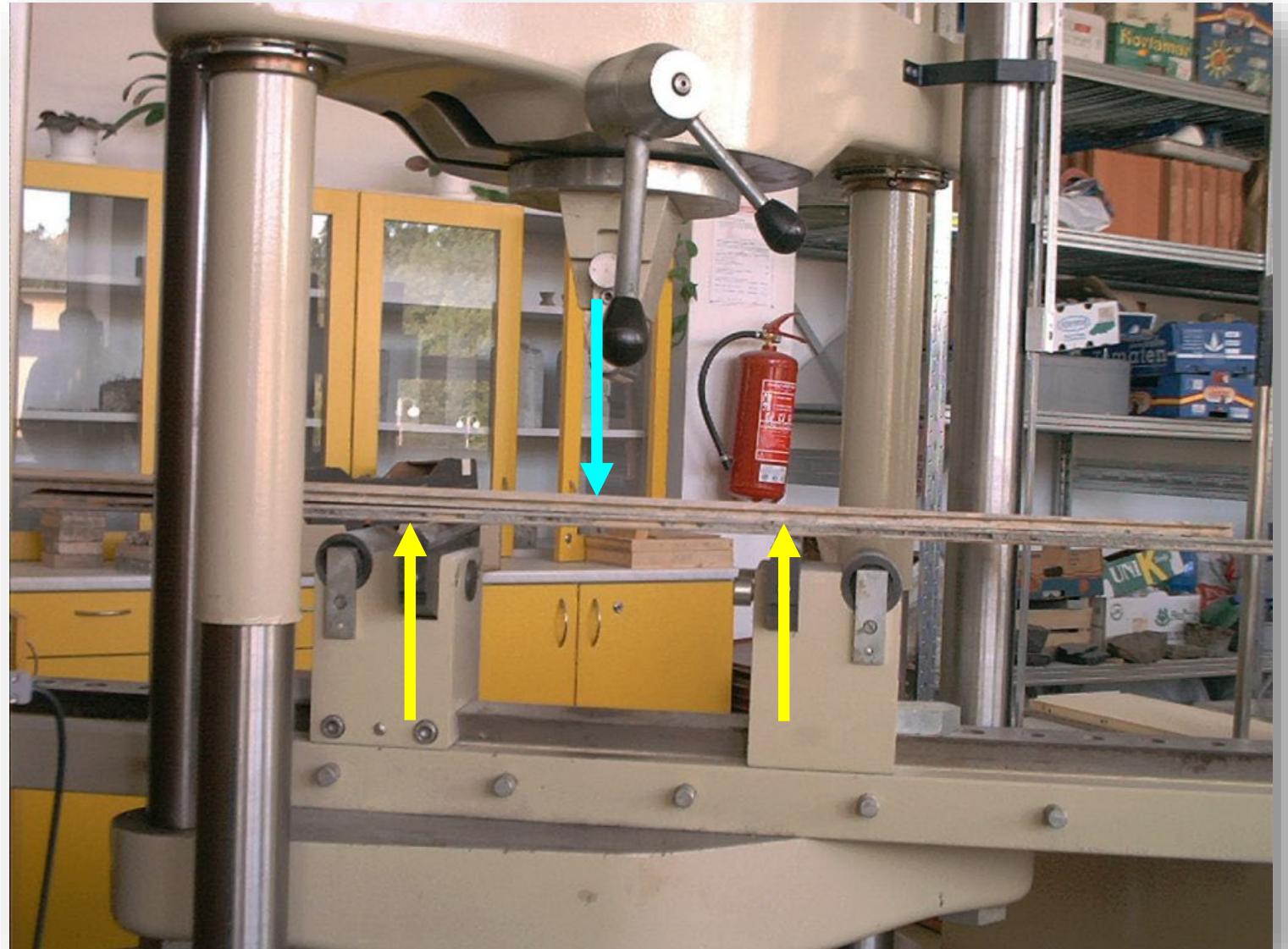
Deformace (přetvoření)

Geometrické změny rozměrů a tvaru těles způsobené účinkem zatížení.



Pruty namáhané na ohyb

Princip ohybové zkoušky
(tříbodový ohyb)



Pruty namáhané na ohyb



Ohybová zkouška

Deformace (přetvoření) betonového průvlastku



Porucha způsobená nerespektováním
přetvoření betonového průvlastku,
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.

Deformace (přetvoření)



Nadměrné přetvoření střechy vlivem extrémního zatížení sněhem, hala Divišov, foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.



Přetvoření nosných konstrukcí namáhaných ohybem

Deformace (přetvoření)

Nadměrné přetvoření střechy
vlivem extrémního zatížení
sněhem, hala Divišov,
foto:
prof. Ing. Radim Čajka, CSc.



Deformace (přetvoření)



Porušení štítové stěny
vlivem nerespektování
přetvoření konzoly
jeřábové dráhy, hala Baška



Deformace



Porušení štítové stěny vlivem nerespektování přetvoření konzoly jeřábové dráhy, hala Baška

Pruty namáhané na ohyb

Ohybová zkouška
železobetonových trámů,
ČVUT, Praha



Pruty namáhané na ohyb

Ohybová zkouška
železobetonových trámů,
ČVUT, Praha



Pruty namáhané na ohyb



Ohybová zkouška
železobetonových trámů,
ČVUT, Praha



Přetvoření nosných konstrukcí namáhaných ohybem

Pruty namáhané na ohyb



Ohybová zkouška
železobetonových trámů,
ČVUT, Praha

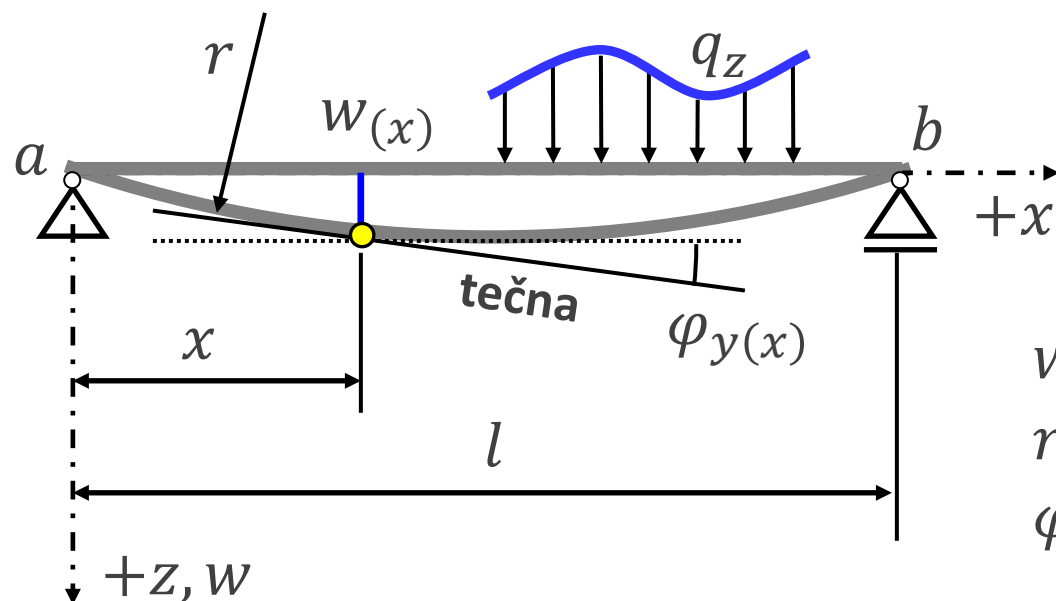
Přetvoření nosníků namáhaných ohybem

Nutno zjišťovat z důvodů:

- Posudek podle **mezního stavu použitelnosti**.
- Výpočet **staticky neurčitých konstrukcí**.

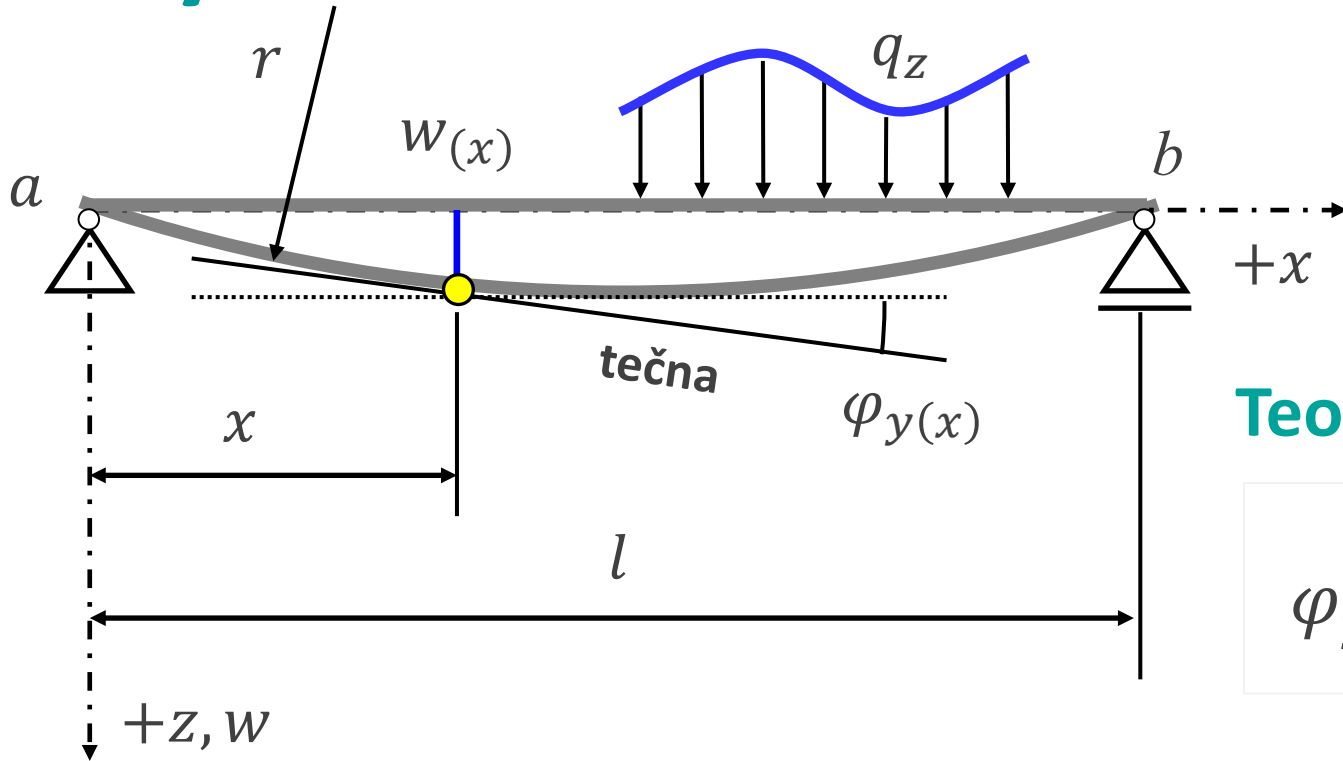
Ohybová čára

Je-li nosník dostatečně štíhlý, určuje deformační stav křivka – **ohybová čára**, do níž přejde původně přímá osa nosníku vlivem zatížení.




- $w(x)$... **průhyb** (kladný směr dolů)
 r ... poloměr křivosti
 $\varphi_y(x)$... **pootočení** - sklon tečny k ohybové čáře

Ohybová čára



$\varphi_y(x)$... **pootočení** [rad]

Směry:  

Teorie malých deformací: $w(x) \ll l$

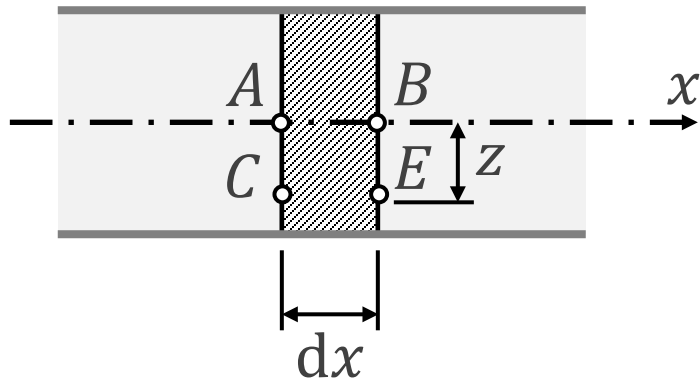
$$\varphi_y(x) \approx \tan \varphi_y(x) = \frac{dw(x)}{dx} = W'_{(x)}$$

Vztah pro **křivost** z matematiky:

$$\frac{1}{r} = - \frac{w''_{(x)}}{\left(1 + w'^2_{(x)}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

r ... poloměr křivosti v rovině xz
(znaménko mínus znamená, že střed křivosti leží nad nosníkem)

Poměrné přetvoření za ohybu



r ... poloměr křivosti

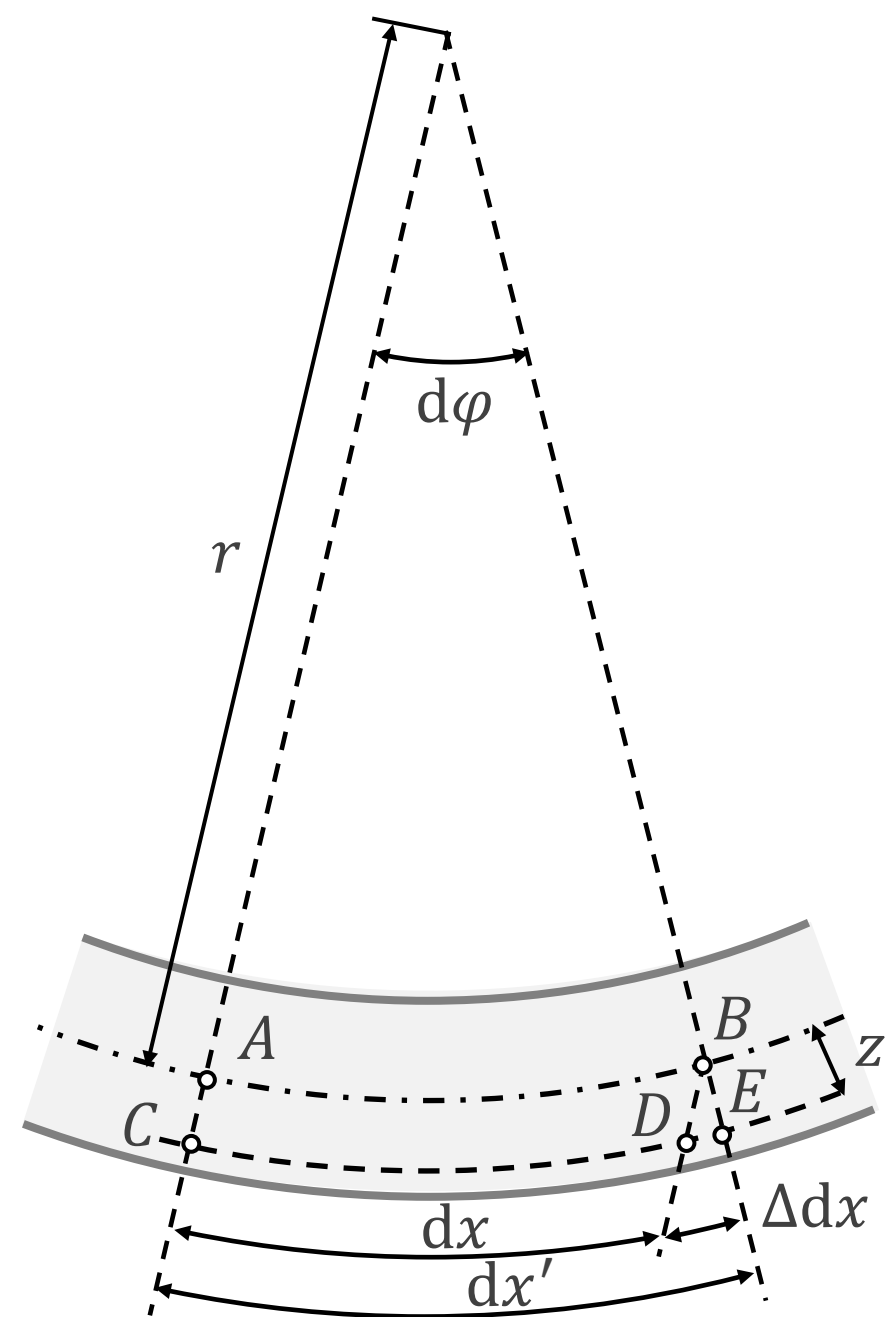
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{z}{r}$$

Podle **Hookova zákona**:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = \frac{z}{r} \cdot E$$

Z toho plyne

$$M_y = \int_A (\sigma_x \cdot z) dA \rightarrow M_y = \frac{E}{r} \cdot I_y \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$



Vztahy mezi statickými a přetvárnými veličinami

$$\frac{1}{r} = -\frac{w''(x)}{\left(1 + w'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Teorie malých deformací: $w'(x) \ll 1 \rightarrow w'^2(x) \cong 0 \rightarrow$

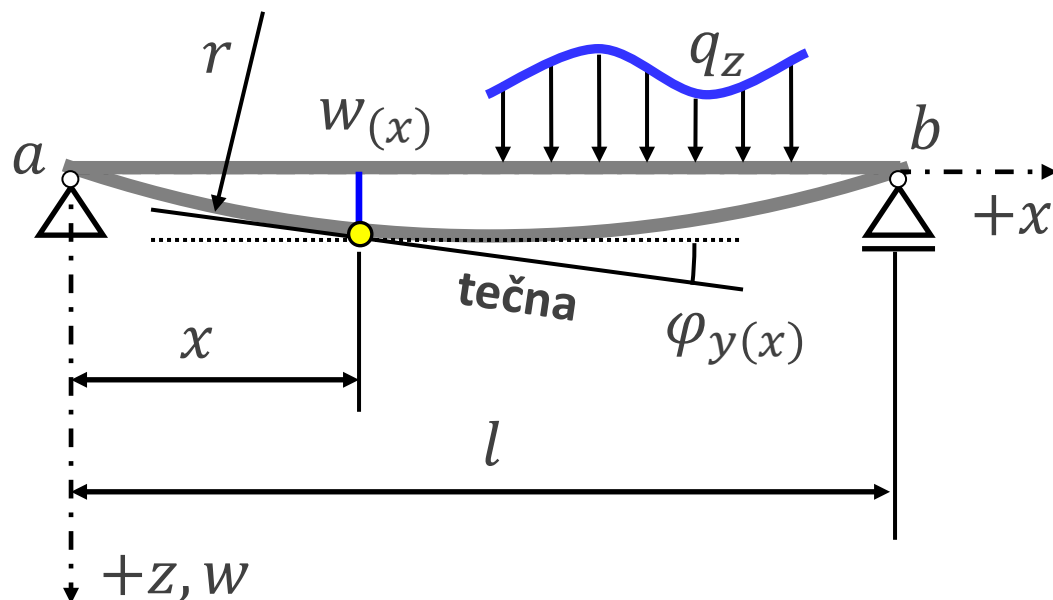
$$\frac{1}{r} = -w''(x)$$

$$\frac{1}{r} = -w''(x) = \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y} \rightarrow$$

$$M_y(x) = -E \cdot I_y \cdot w''(x)$$

Diferenciální rovnice II. řádu

Při $E \cdot I_y = \text{konst.} \rightarrow$ Diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu (**Schwedlerovy vztahy**)



Ohyb ve svislé rovině xz :

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z$$

$$w(x) = ?$$

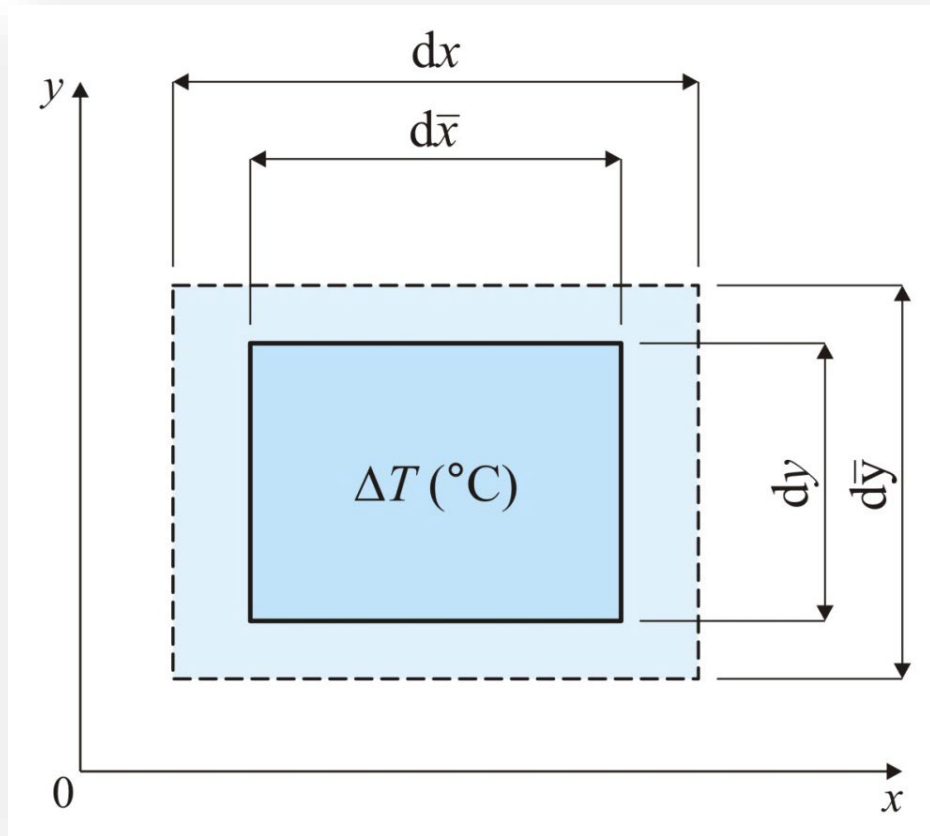
$$\varphi_y(x) = w'(x)$$

$$M_y(x) = -E \cdot I_y \cdot w''(x)$$

$$V_z(x) = -E \cdot I_y \cdot w'''(x)$$

$$q_z(x) = E \cdot I_y \cdot w^{IV}(x)$$

Deformace od rovnoměrné změny teploty



$$\varepsilon_{x,T} = \varepsilon_{y,T} = \varepsilon_{z,T} = \alpha_T \cdot \Delta T$$

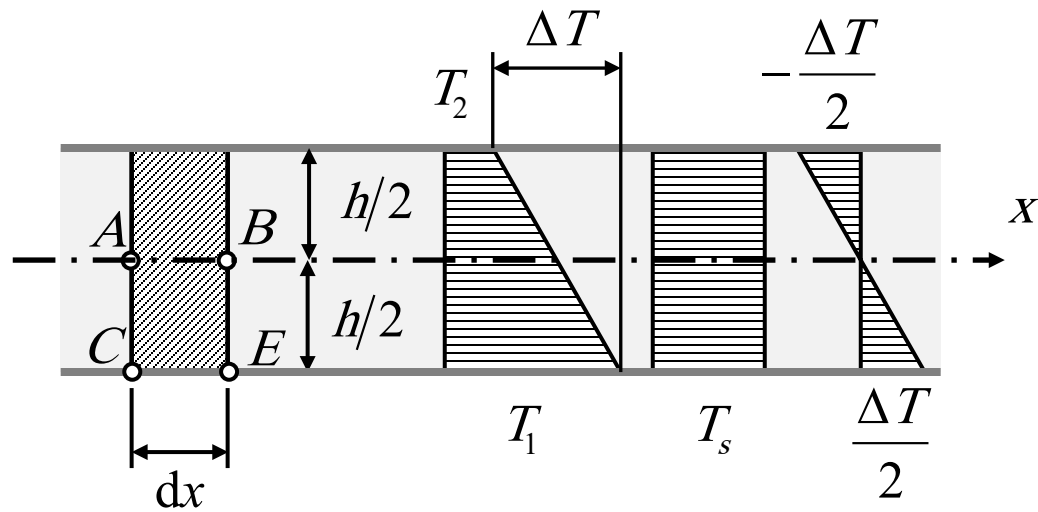
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

α_t ... součinitel tepelné roztažnosti [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]



Ocel	$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Dřevo	$\alpha_t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
Beton	$\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Zdivo	$\alpha_t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

Nerovnoměrné oteplení



$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$T_s = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$d\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{dx}{r}$$

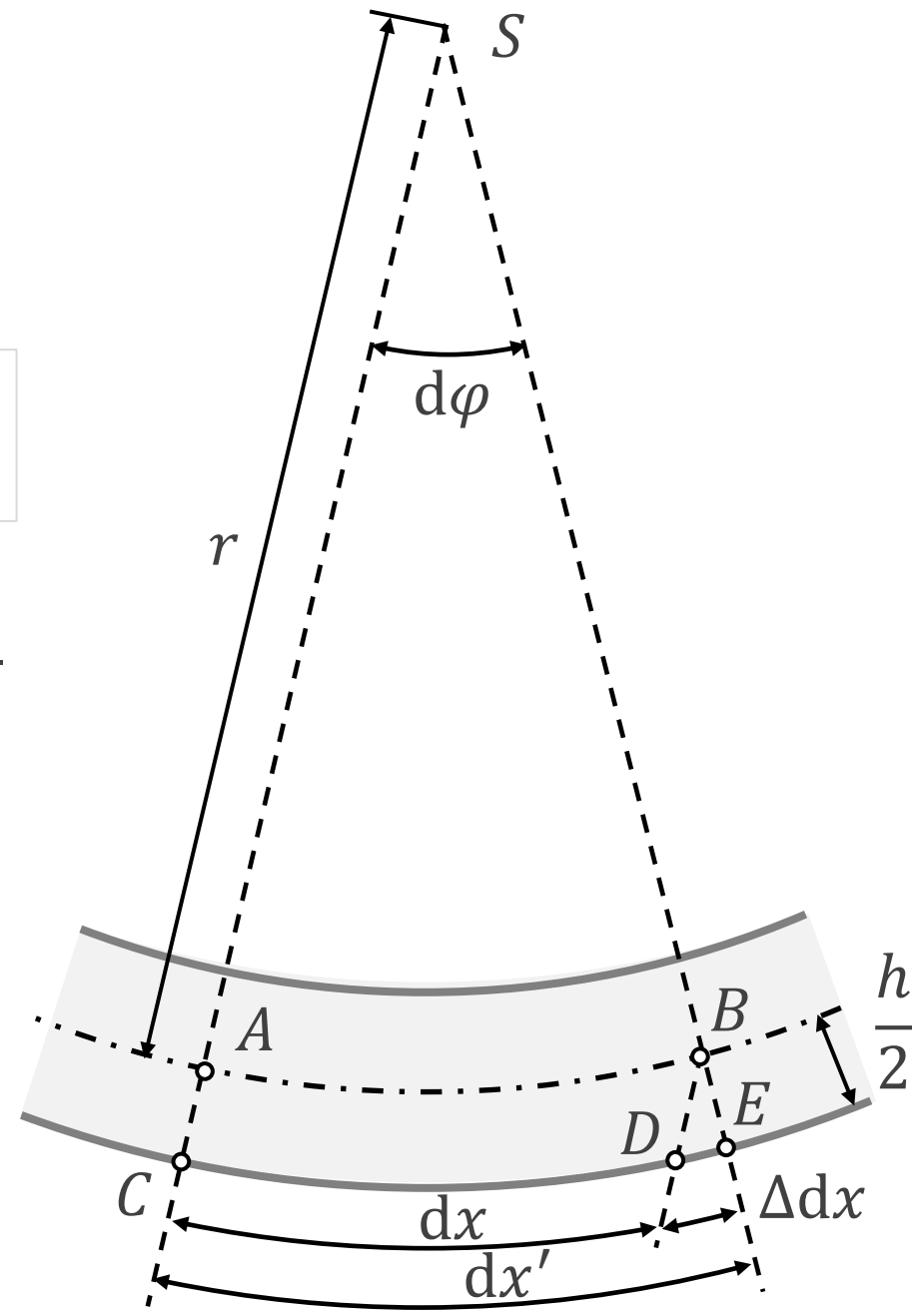
$\overline{DE} = \alpha_T \cdot dx \cdot \frac{\Delta T}{2}$... přírůstek délky spodních vláken

$$d\varphi = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} = \frac{\alpha_T \cdot dx \cdot \frac{\Delta T}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\alpha_T \cdot dx \cdot \Delta T}{h}$$

$$\frac{1}{r} = -w''(x)$$

$$\frac{dx}{r} = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T \cdot dx}{h} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h}$$

$$w''(x) = -\frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h}$$



Přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry

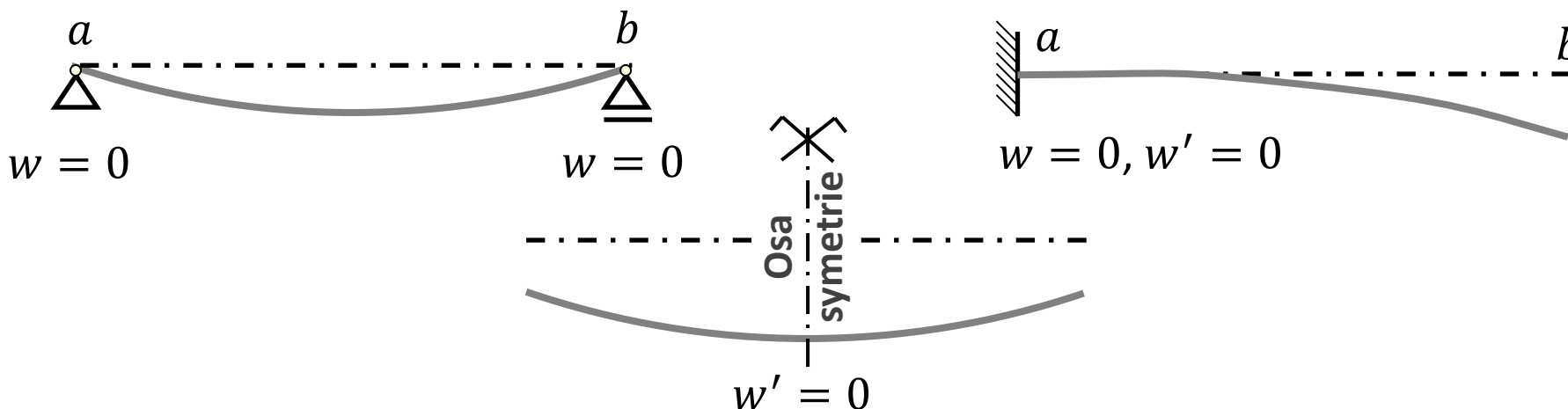
Metoda **přímé integrace** diferenciální rovnice ohybové čáry

$$M_{y(x)} = -E \cdot I_y \cdot w''_{(x)}$$

Statically určité případy ohýbaných nosníků

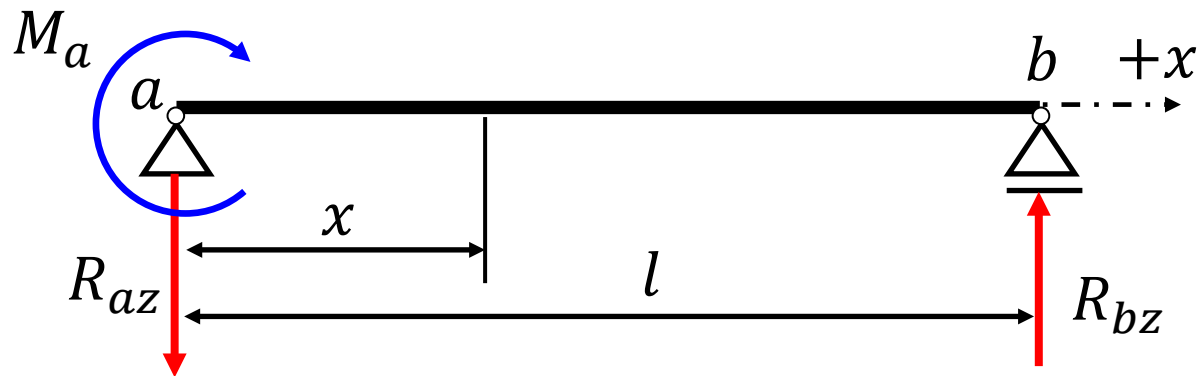
$$E \cdot I_y \cdot w'_{(x)} = - \int M_{y(x)} dx + C_1 \quad E \cdot I_y \cdot w_{(x)} = - \int \left(\int M_{y(x)} dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_2$$

Integrační konstanty C_1, C_2 se určí z **deformačních okrajových podmínek**.



Příklad 1

Zadání: Určete rovnici ohybové čáry



Reakce: $R_{az} = \frac{M_a}{l} (\downarrow)$ $R_{bz} = \frac{M_a}{l} (\uparrow)$

Vnitřní síly:

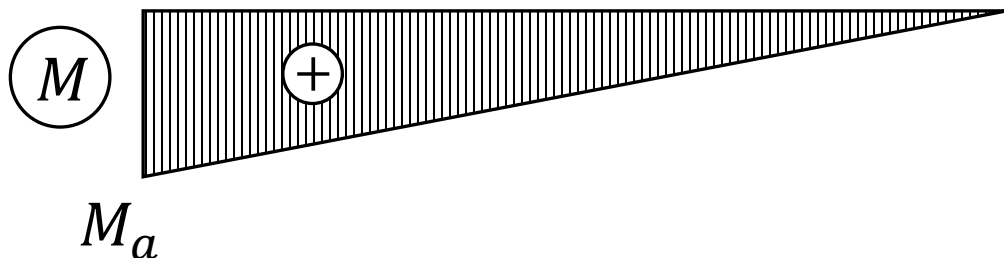
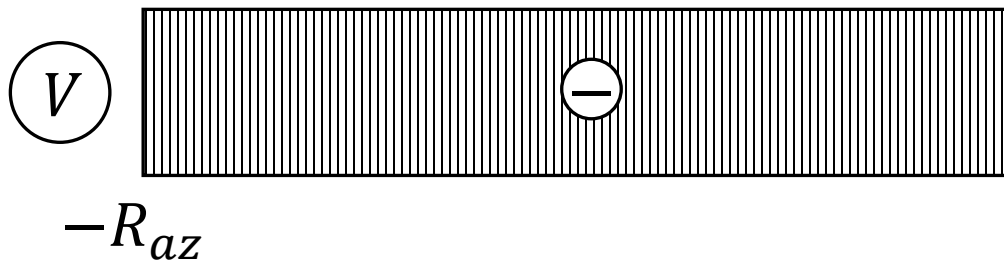
$$V_{(x)}^L = -R_{az} = \text{konst.}$$

$$M_{(x)}^L = -R_{az} \cdot x + M_a = -\frac{M_a}{l} \cdot x + M_a$$

Řešení:

$$E \cdot I_y \cdot w''_{(x)} = -M_{y(x)} = \frac{M_a}{l} \cdot x - M_a$$

2x integrace



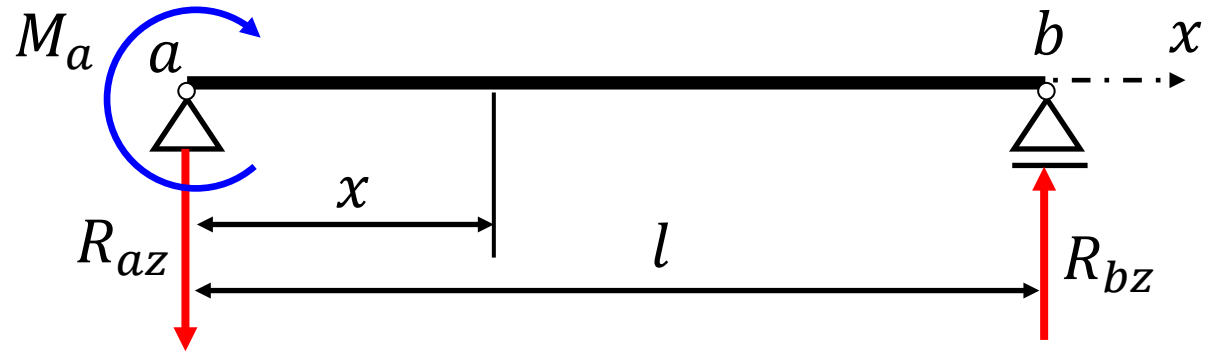
Příklad 1 - určení integračních konstant

Integrace

$$E \cdot I_y \cdot w''(x) = -M_{y(x)} = \frac{M_a}{l} \cdot x - M_a$$

$$E \cdot I_y \cdot w'(x) = \frac{M_a}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - M_a \cdot x + C_1$$

$$E \cdot I_y \cdot w(x) = \frac{M_a}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - M_a \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$$



2 neznámé **integrační konstanty** lze určit z **deformačních okrajových podmínek**:

Deformační okrajové podmínky:

$$w_{(x=0)} = 0$$

$$E \cdot I_y \cdot w_{(x=0)} = \frac{M_a}{l} \cdot \frac{0^3}{6} - M_a \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$w_{(x=l)} = 0$$

$$E \cdot I_y \cdot w_{(x=l)} = \frac{M_a}{l} \cdot \frac{l^3}{6} - M_a \cdot \frac{l^2}{2} + C_1 \cdot l + 0 = 0$$

$$C_1 = -\frac{M_a \cdot l}{6} + M_a \cdot \frac{l}{2} = M_a \cdot l \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \rightarrow$$

$$C_1 = \frac{M_a \cdot l}{3}$$

Příklad 1 - výsledné rovnice

Výsledné **rovnice ohybové čáry** a **pootočení** (po úpravě):

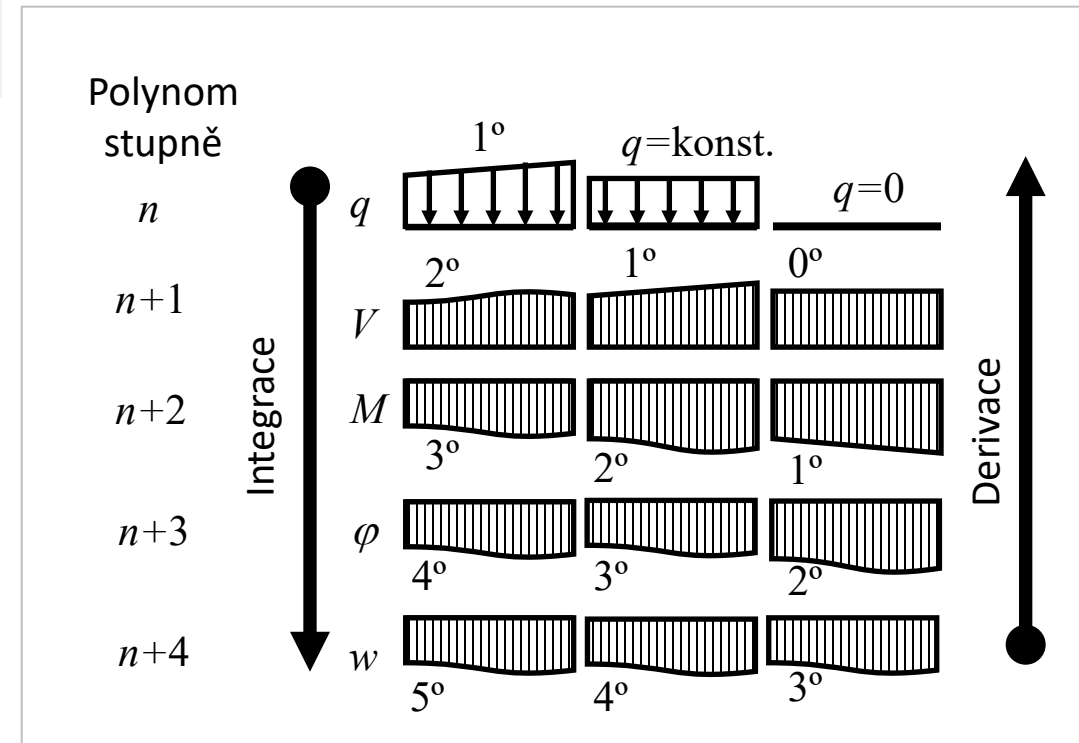
$$w_{(x)} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{M_a}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - M_a \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{M_a \cdot l}{3} \cdot x \right] = \frac{M_a}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{x^3}{6 \cdot l} - \frac{x^2}{2} + \frac{l \cdot x}{3} \right]$$

Platí pro $x \in \langle 0; l \rangle$

$$w'_{(x)} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{M_a}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - M_a \cdot x + \frac{M_a \cdot l}{3} \right] = \frac{M_a}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{x^2}{2 \cdot l} - x + \frac{l}{3} \right]$$

Závěry:

- Vzrůstající řád polynomů v posloupnosti jednotlivých veličin
- Největší průhyb v místě kde je nulová první derivace, tj. pootočení (podobně jako největší M je v místě, kde je $V = 0$)



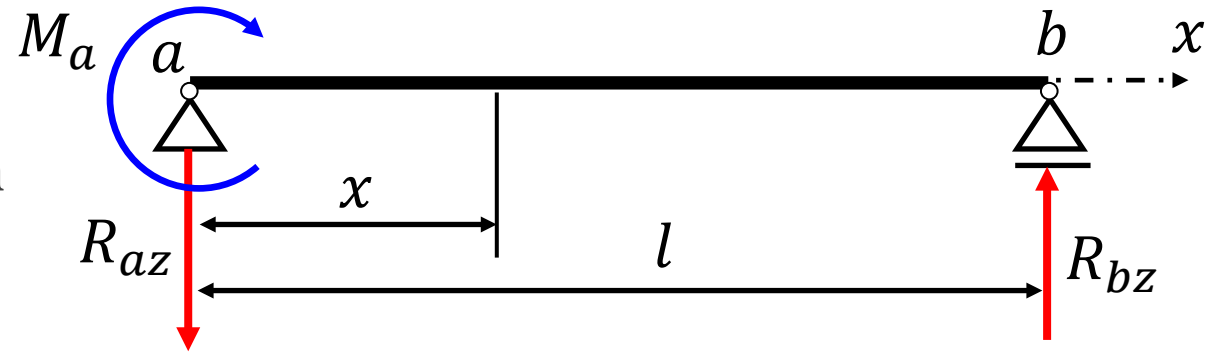
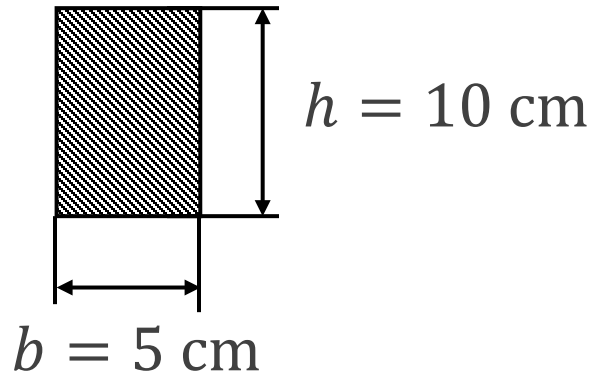
Příklad 1 - s konkrétními vstupními údaji

Zadání:

$$l = 6 \text{ m}$$

$$M_a = 15 \text{ kNm}$$

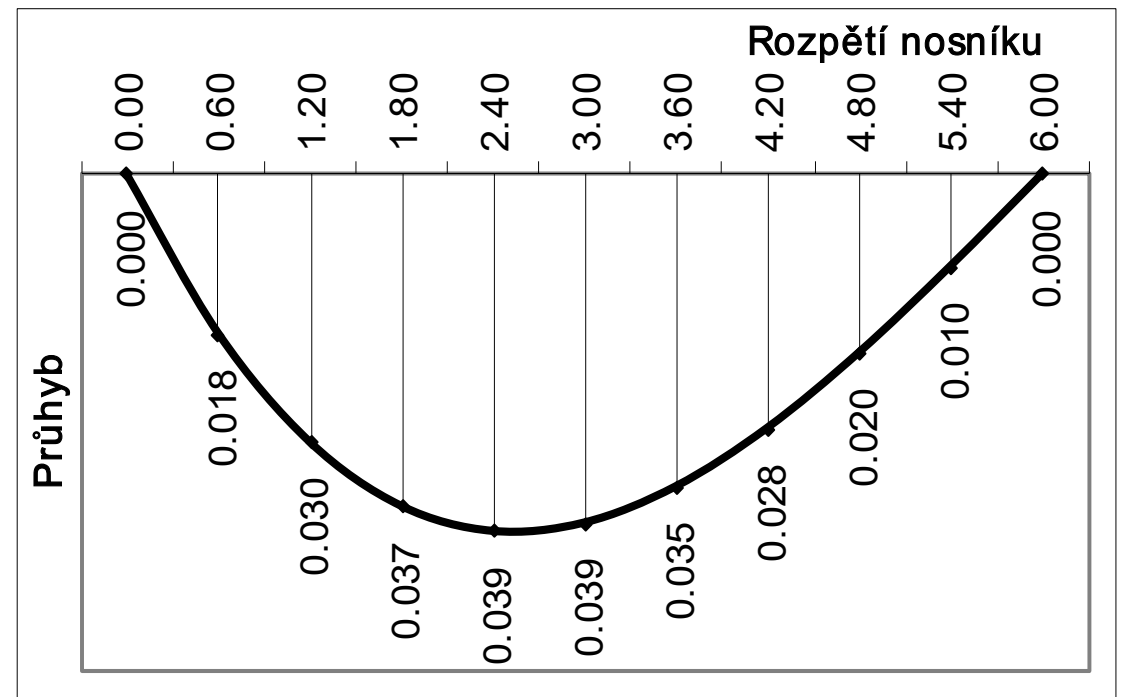
$$E = 210 \text{ GPa (ocel)}$$



Průhyb: Rovnice **ohybové čáry**

$$w(x) = \frac{M_a}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{x^3}{6 \cdot l} - \frac{x^2}{2} + \frac{l \cdot x}{3} \right]$$

Platné pro $x \in \langle 0; l \rangle$



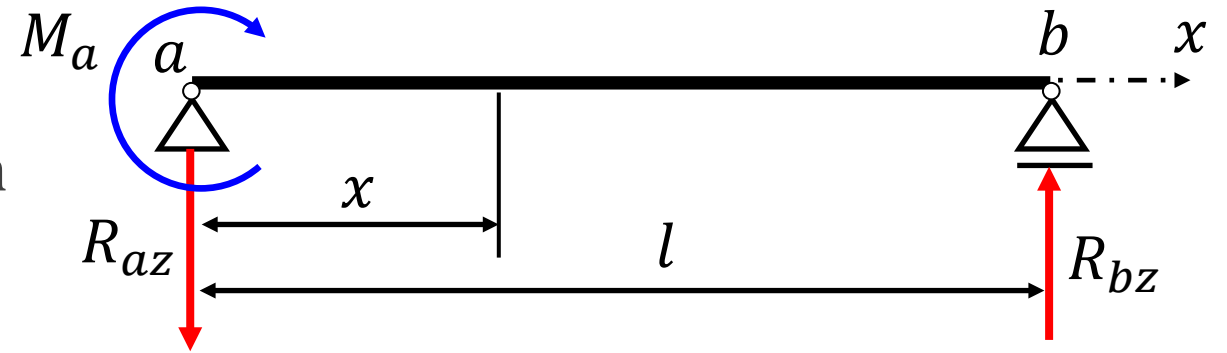
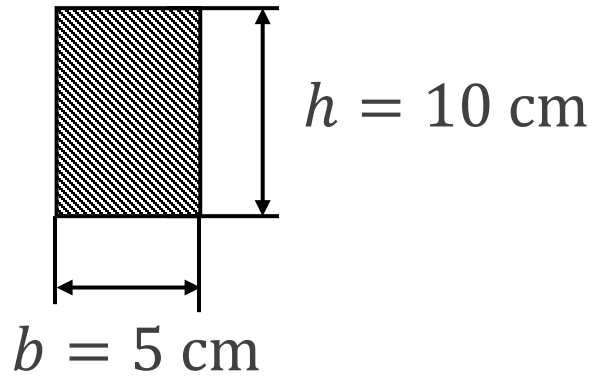
Příklad 1 - s konkrétními vstupními údaji

Zadání:

$$l = 6 \text{ m}$$

$$M_a = 15 \text{ kNm}$$

$$E = 210 \text{ GPa (ocel)}$$

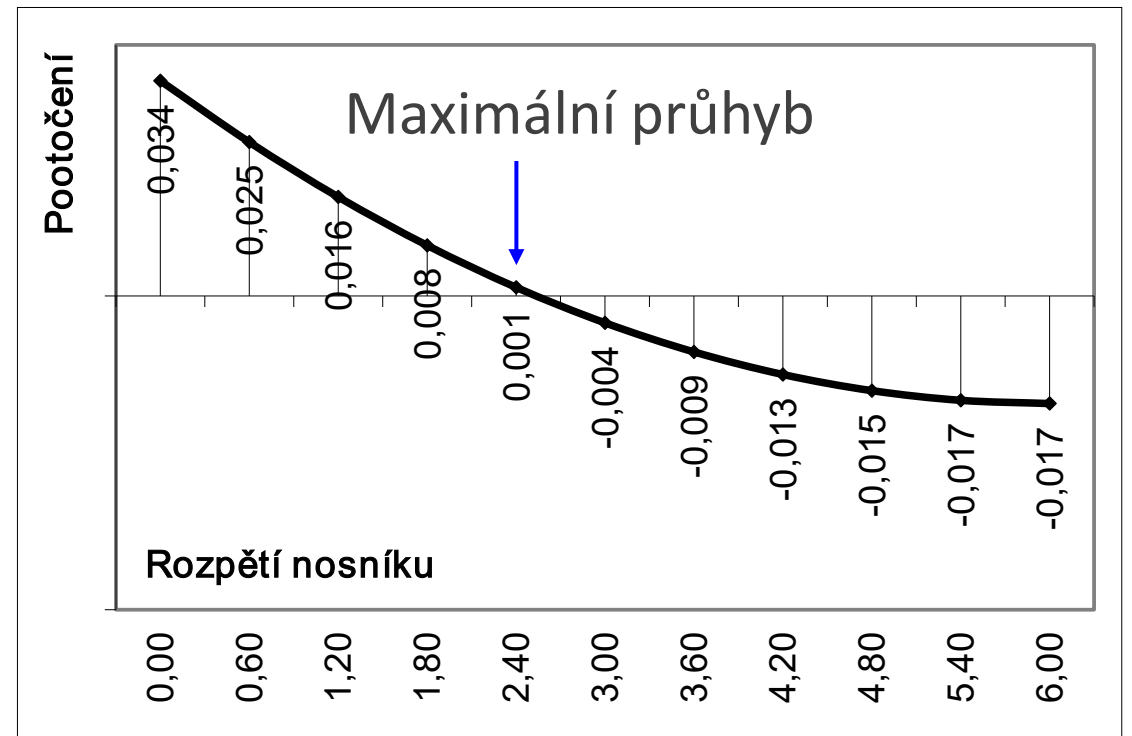


Pootočení: Rovnice **sklonu tečny**
k ohybové čáře

$$w'_{(x)} = \frac{M_a}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{x^2}{2 \cdot l} - x + \frac{l}{3} \right]$$

$$\varphi_y(x) = w'_{(x)}$$

Platné pro $x \in \langle 0; l \rangle$



Příklad 1 - s konkrétními vstupními údaji

Určení **největšího průhybu**:

$$w' = 0$$

$$\frac{M_a}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{x^2}{2 \cdot l} - x + \frac{l}{3} \right] = 0 \rightarrow \frac{1}{2l} \cdot x^2 - x + \frac{l}{3} = 0$$

Kvadratická rovnice (2 kořeny)

1. $x_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot l = 1,57735 \cdot l$

Nereálný kořen
(leží mimo nosník)

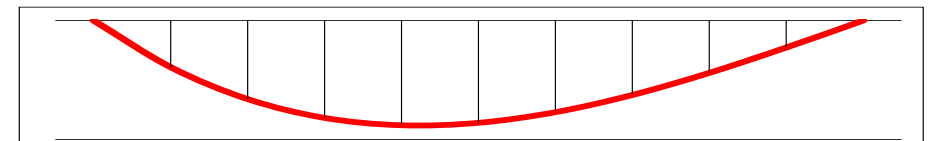
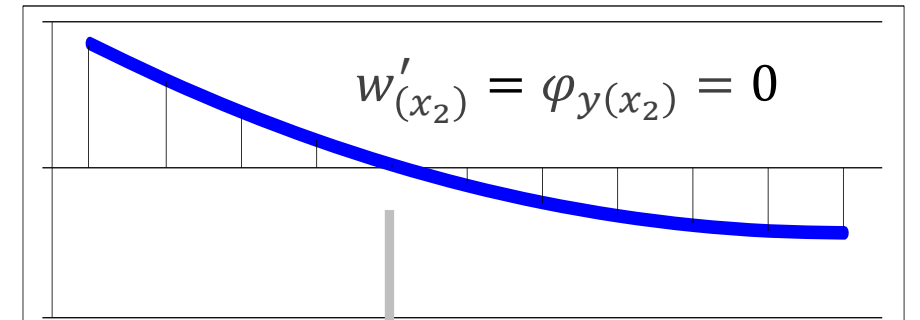
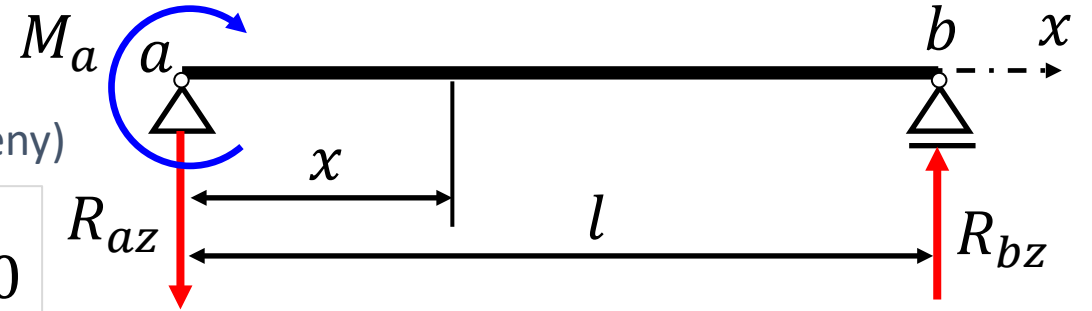
2. $x_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot l = 0,422649 \cdot l$

Reálný kořem $\in \langle 0; l \rangle$

Po dosažení do rovnice ohybové čáry:

$$w_{\max} = w(x_2) = \frac{M_a}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{x_2^3}{6 \cdot l} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{l \cdot x_2}{3} \right]$$

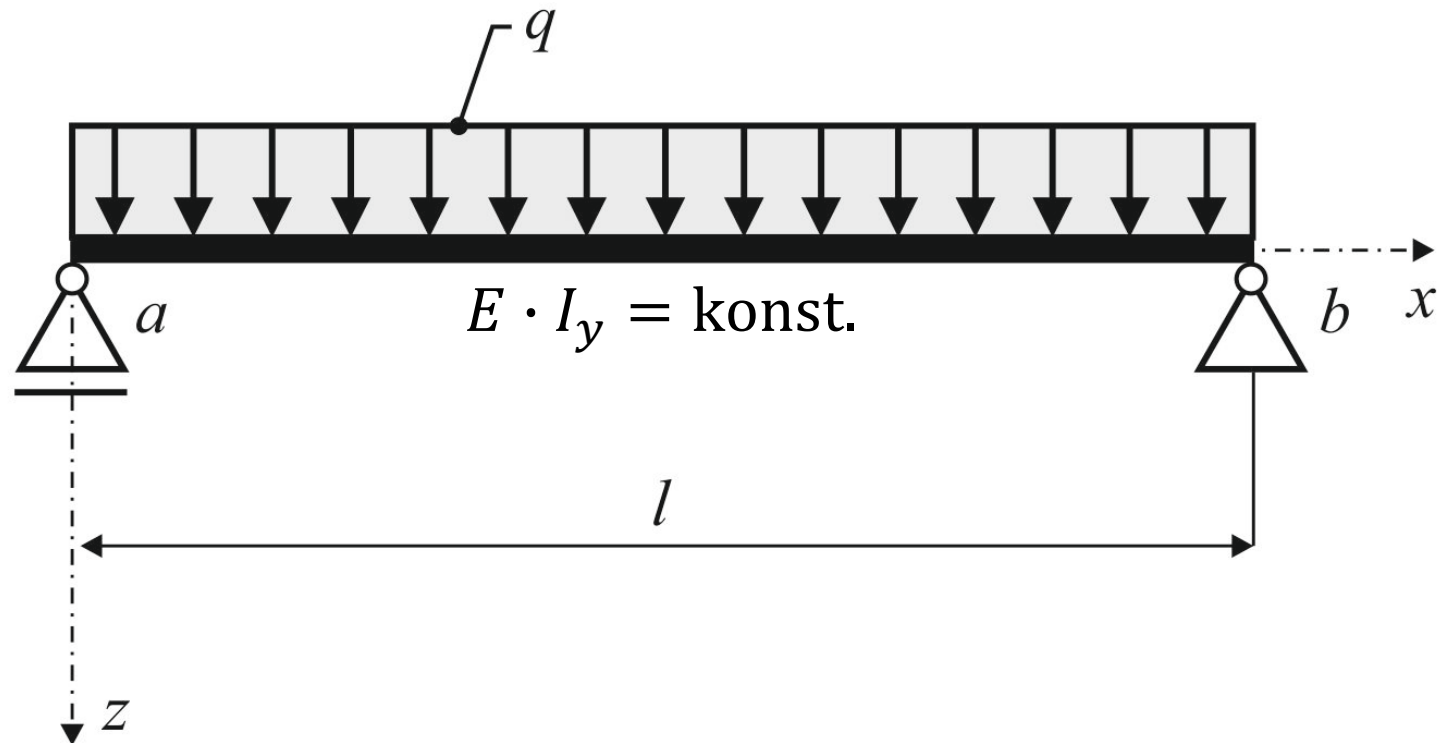
$$= \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{M_a \cdot l^2}{E \cdot I_y} \cong 0,06415 \cdot \frac{M_a \cdot l^2}{E \cdot I_y}$$



$$w_{\max} = w(x_2) = 39,59 \text{ mm}$$

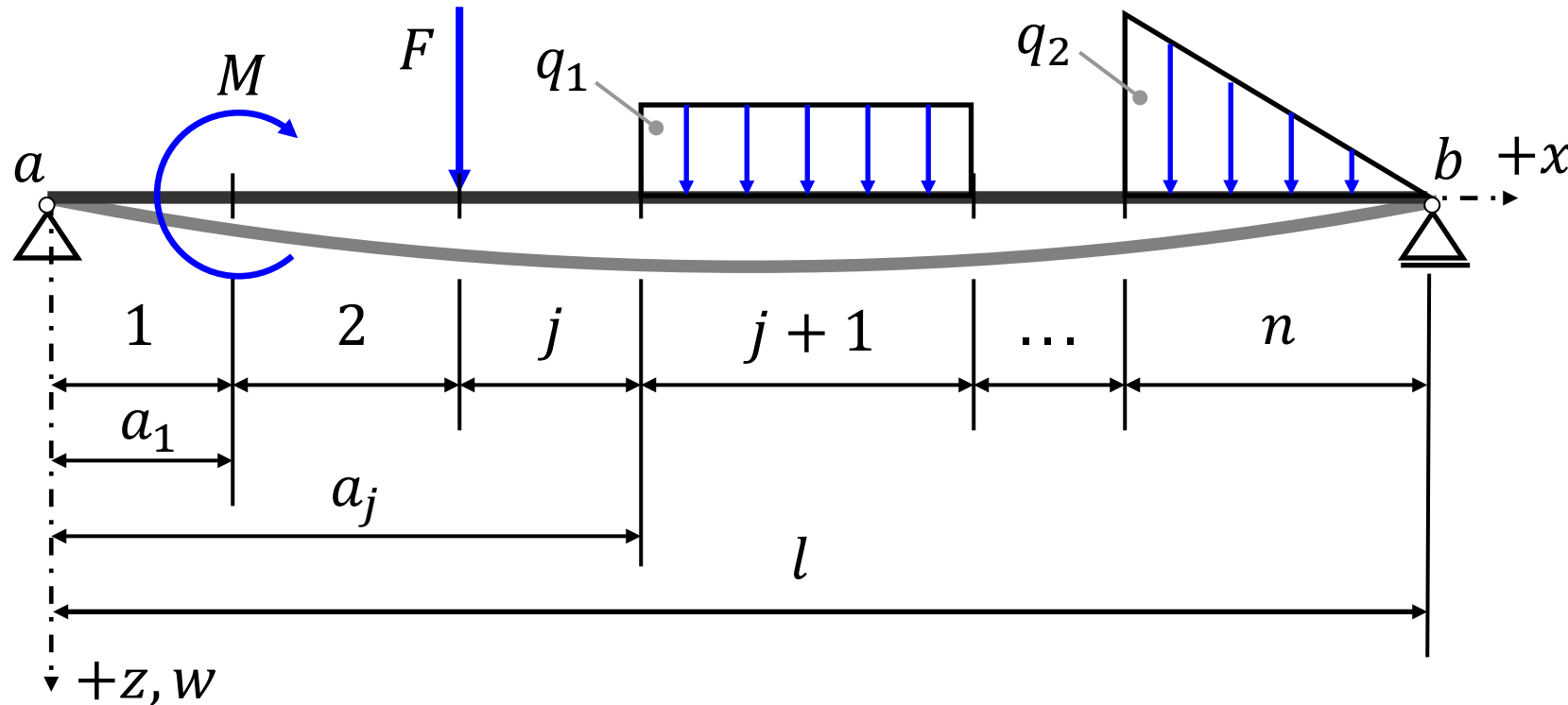
Příklad k procvičení

Zadání: Určete analyticky rovnici **ohybové čáry** a **pootočení** + **největší průhyb**



Clebschova metoda určování rovnice ohybové čáry

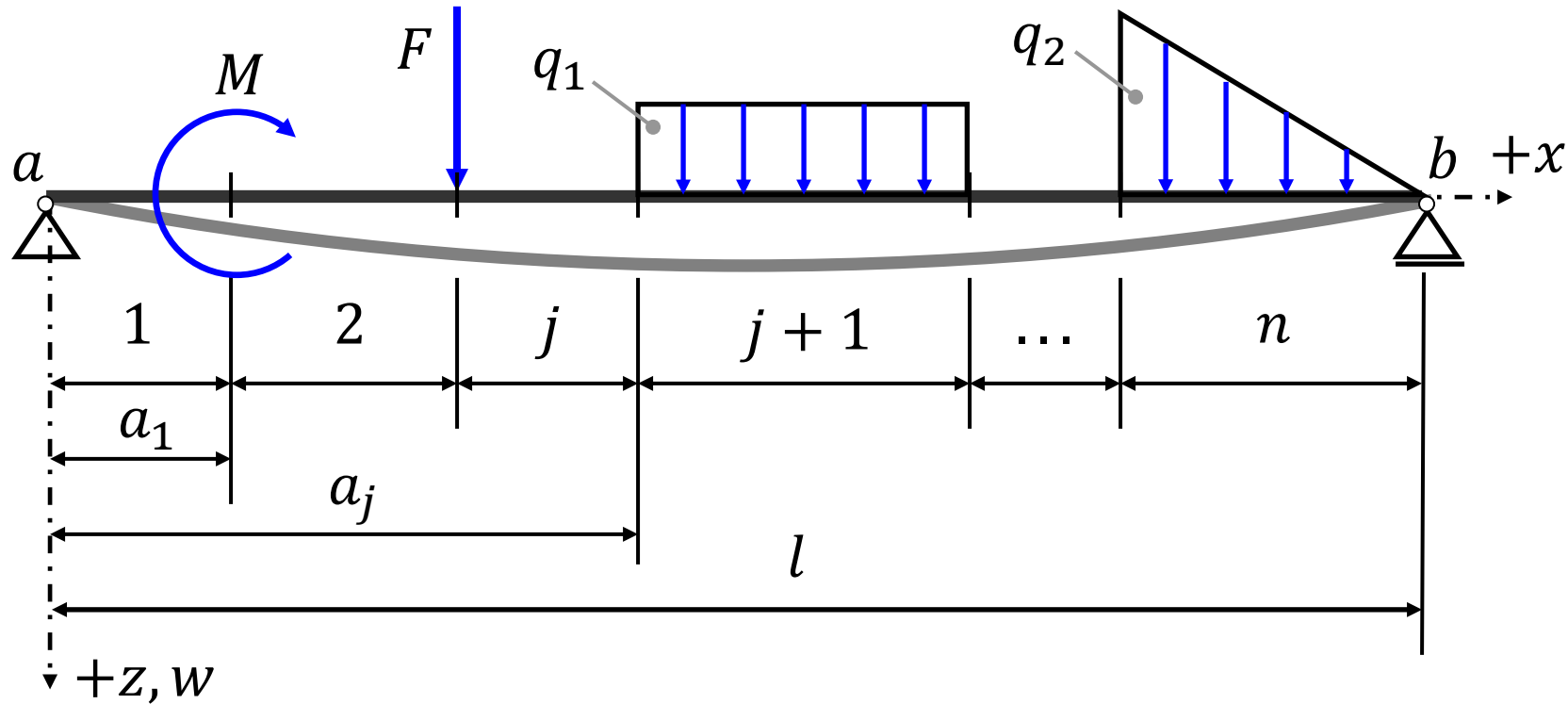
Metoda pro určení **rovnice ohybové čáry** staticky určitých případů ohýbaných nosníků se **složitějším zatížením**.



Rudolf Friedrich
Alfred Clebsch
(1833 – 1872)

Při složitějších případech zatížení (nespojitém) nebo při podepření nosníku mimo jeho konce nelze průběh $M_{(x)}$ vyjádřit **jediným výrazem**.

Clebschova metoda určování rovnice ohybové čáry



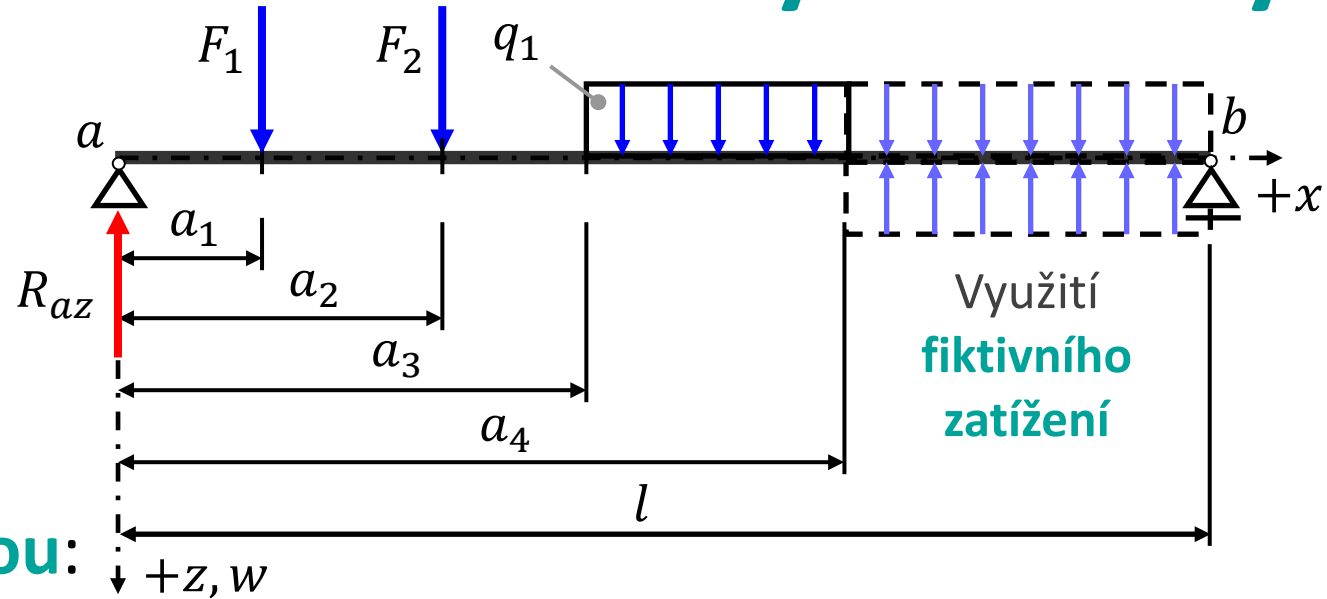
Analýza:

- Integrace se provádí zvlášť v jednotlivých intervalech.
- **Počet intervalů:** $n \rightarrow$ počet neznámých integračních konstant = $2 \cdot n \rightarrow C_{1,j} ; C_{2,j} (j = 1 \dots n)$
- **Okrajové podmínky:** 2 v místě podepření, $2 \cdot (n - 1)$ na hranicích intervalů (**podmínky spojitosti**)

Celkem: $2 \cdot n \rightarrow w_{(x=0)} = 0, w_{(x=l)} = 0, w_{j,(a_j)} = w_{j+1,(a_j)}, w'_{j,(a_j)} = w'_{j+1,(a_j)}$

Clebschova metoda určování rovnice ohybové čáry

Clebschova metoda je výhodná pro ruční výpočet → **pouze 2 neznámé integrační konstanty**



Podstata řešení **Clebschovou methodou**:

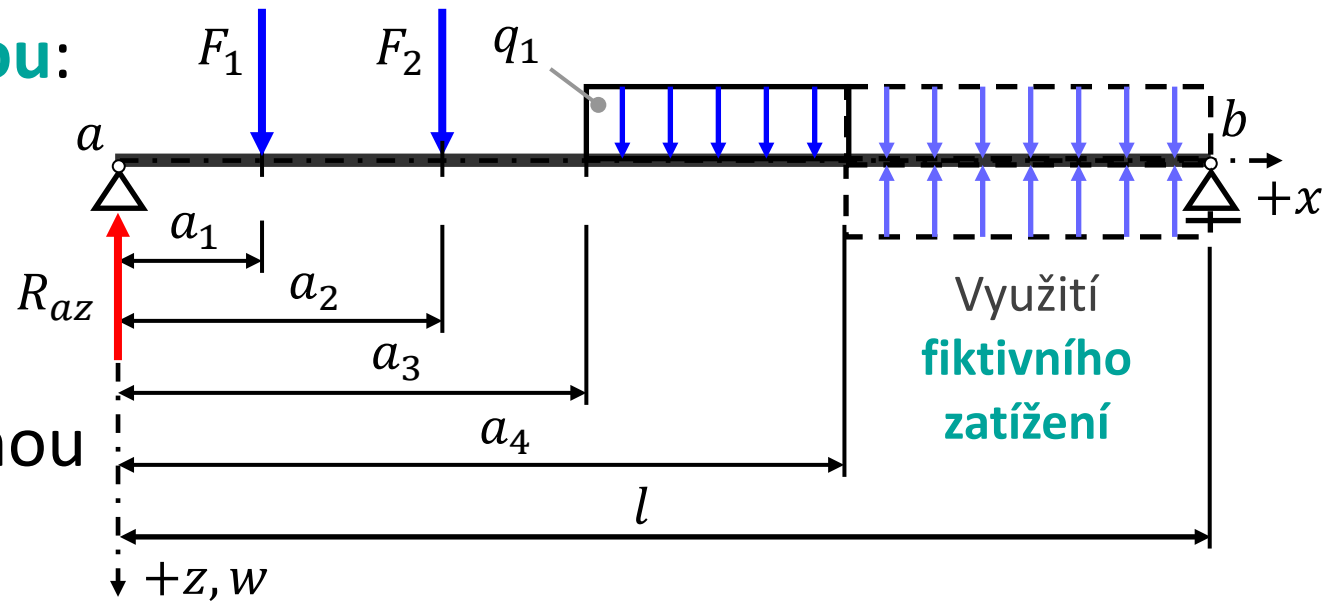
a) Při sestavování rovnice $M_y(x)$ je nezbytné převzít $M_y(x)$ z předchozího intervalu a doplnit jej o účinek nového zatížení. Pak lze $M_y(x)$ vyjádřit jedním aritmetickým výrazem, např.:

$$M_{y(x)} = R_{az} \cdot x - \left| F_1 \cdot (x - a_1) \right|_{x > a_1} - \left| F_2 \cdot (x - a_2) \right|_{x > a_2} - \left| q \cdot \frac{(x - a_3)^2}{2} \right|_{x > a_3} + \left| q \cdot \frac{(x - a_4)^2}{2} \right|_{x > a_4}$$

Clebschova metoda určování rovnice ohybové čáry

Podstata řešení **Clebschovou** metodou:

- b)** Při integrování není žádoucí odstraňovat závorky u dvojčlenů $(x - a_j)$. Tyto výrazy je nutné považovat za samostatnou proměnnou (**Clebschův způsob integrace**):



$$E \cdot I_y \cdot w'_{(x)} = -R_{az} \cdot \frac{x^2}{2} + \left| F_1 \cdot \frac{(x - a_1)^2}{2} \right| + \left| F_2 \cdot \frac{(x - a_2)^2}{2} \right| + \left| q \cdot \frac{(x - a_3)^3}{2 \cdot 3} \right| - \left| q \cdot \frac{(x - a_4)^3}{2 \cdot 3} \right| + C_1$$

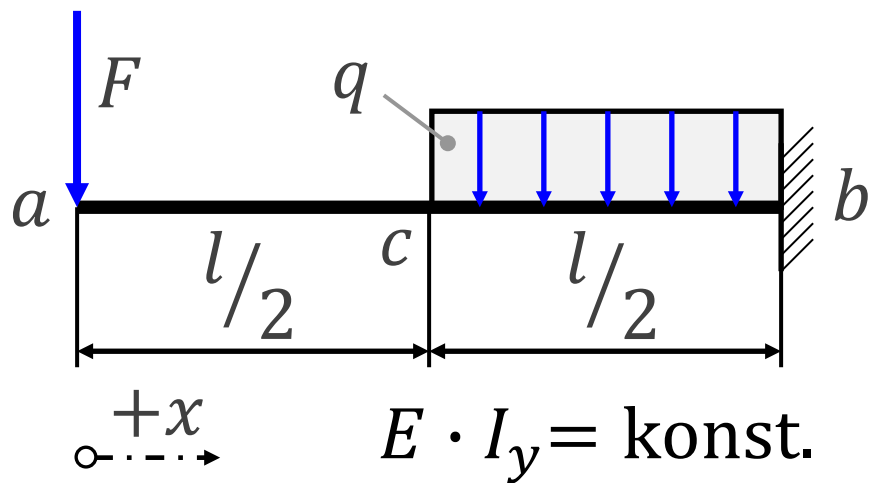
$x > a_1$ $x > a_2$ $x > a_3$ $x > a_4$

$$E \cdot I_y \cdot w_{(x)} = -R_{az} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \left| F_1 \cdot \frac{(x - a_1)^3}{2 \cdot 3} \right| + \left| F_2 \cdot \frac{(x - a_2)^3}{2 \cdot 3} \right| + \left| q \cdot \frac{(x - a_3)^4}{6 \cdot 4} \right| - \left| q \cdot \frac{(x - a_4)^4}{6 \cdot 4} \right| + C_1 \cdot x + C_2$$

$x > a_1$ $x > a_2$ $x > a_3$ $x > a_4$

Příklad 2

Zadání:



$$x \leq \frac{l}{2}$$

Ohybový moment:

$$M_{y(x)}^L = -F \cdot x \quad x \geq \frac{l}{2} \quad M_{y(x)}^L = -F \cdot x - \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2}$$

Lze vyjádřit jedním výrazem:

$$M_{y(x)}^L = -F \cdot x - \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} \\ x > \frac{l}{2} \end{cases}$$

Clebschův způsob integrace:

$$E \cdot I_y \cdot w''(x) = -M_{y(x)}$$

$$E \cdot I_y \cdot w'(x) = F \cdot \frac{x^2}{2} + \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \\ x > \frac{l}{2} \end{cases} + C_1$$

Pouze **2** neznámé integrační konstanty

$$E \cdot I_y \cdot w(x) = F \cdot \frac{x^3}{6} + \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \\ x > \frac{l}{2} \end{cases} + C_1 \cdot x + C_2$$

Příklad 2 – určení integračních konstant

Z okrajových podmínek:

$$w'_{(x=l)} = 0$$

$$E \cdot I_y \cdot w'_{(x)} = F \cdot \frac{x^2}{2} + \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \\ x > \frac{l}{2} \end{cases} + C_1$$

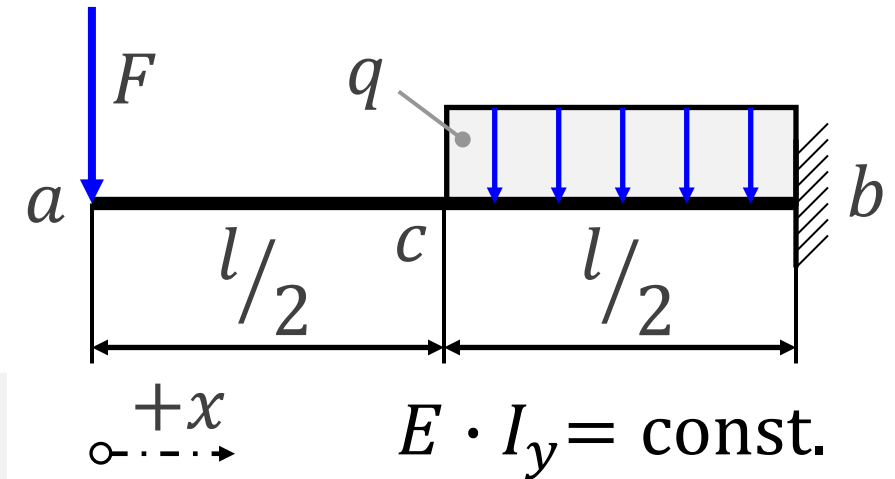
$$F \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{q \cdot \left(l - \frac{l}{2}\right)^3}{6} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{F \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{48}$$

$$w_{(x=l)} = 0$$

$$E \cdot I_y \cdot w_{(x)} = F \cdot \frac{x^3}{6} + \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \\ x > \frac{l}{2} \end{cases} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$F \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{q \cdot \left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24} + C_1 \cdot l + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = -F \cdot \frac{l^3}{6} + F \cdot \frac{l^3}{2} - \frac{q \cdot l^4}{384} + \frac{q \cdot l^4}{48} \rightarrow$$

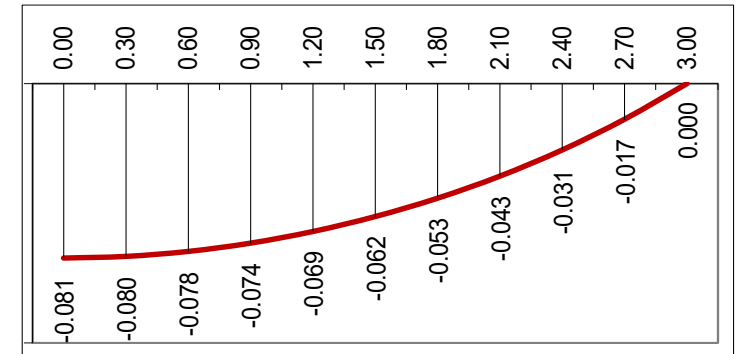
$$C_2 = \frac{F \cdot l^3}{3} + \frac{7 \cdot q \cdot l^4}{384}$$



Příklad 2 – výsledné rovnice

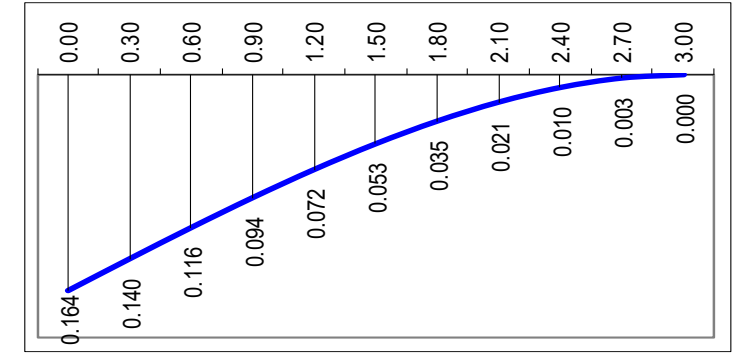
Pootočení – sklon tečny k ohybové čáře

$$w'_{(x)} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(F \cdot \frac{x^2}{2} + \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{6} - \frac{F \cdot l^2}{2} - \frac{q \cdot l^3}{48} & x > \frac{l}{2} \end{cases} \right)$$



Rovnice **ohybové čáry**

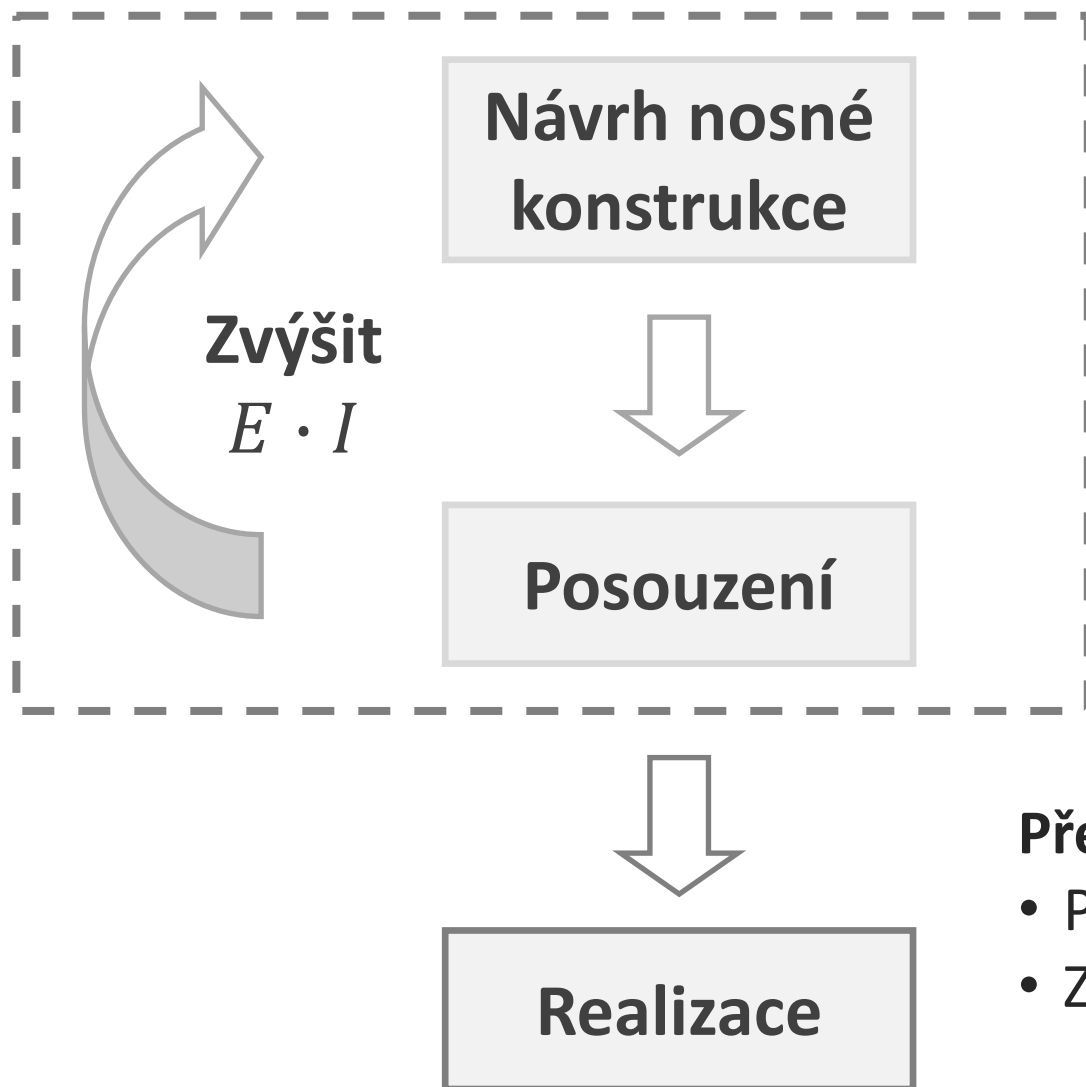
$$w_{(x)} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(F \cdot \frac{x^3}{6} + \begin{cases} \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{24} + \frac{F \cdot l^2}{2} \cdot x - \frac{q \cdot l^3}{48} \cdot x + \frac{F \cdot l^3}{3} + \frac{7 \cdot q \cdot l^4}{384} & x > \frac{l}{2} \end{cases} \right)$$



Určení **největšího průhybu**:

$$w_{\max} = w_{(x=0)} = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left(\frac{F \cdot l^3}{3} + \frac{7 \cdot q \cdot l^4}{384} \right)$$

Dimenzování ohýbaného prvku podle MSP



$$M_{Ek} = \max|M_k|, I_{\min}, E, \delta_{\max}$$

Dimenzování

$$\delta \leq \delta_{\max}$$

Předpoklady řešení:

- Pružné chování materiálu.
- Zanedbán vliv smykových napětí.



Příklad 3

Dimenzování prvku namáhaného ohybem

Nadimenzujte ohýbaný nosný prvek z profilu **IPN**

Vstupní údaje

$$g_k = 2,0 \text{ kN/m} \quad \gamma_G = 1,35$$

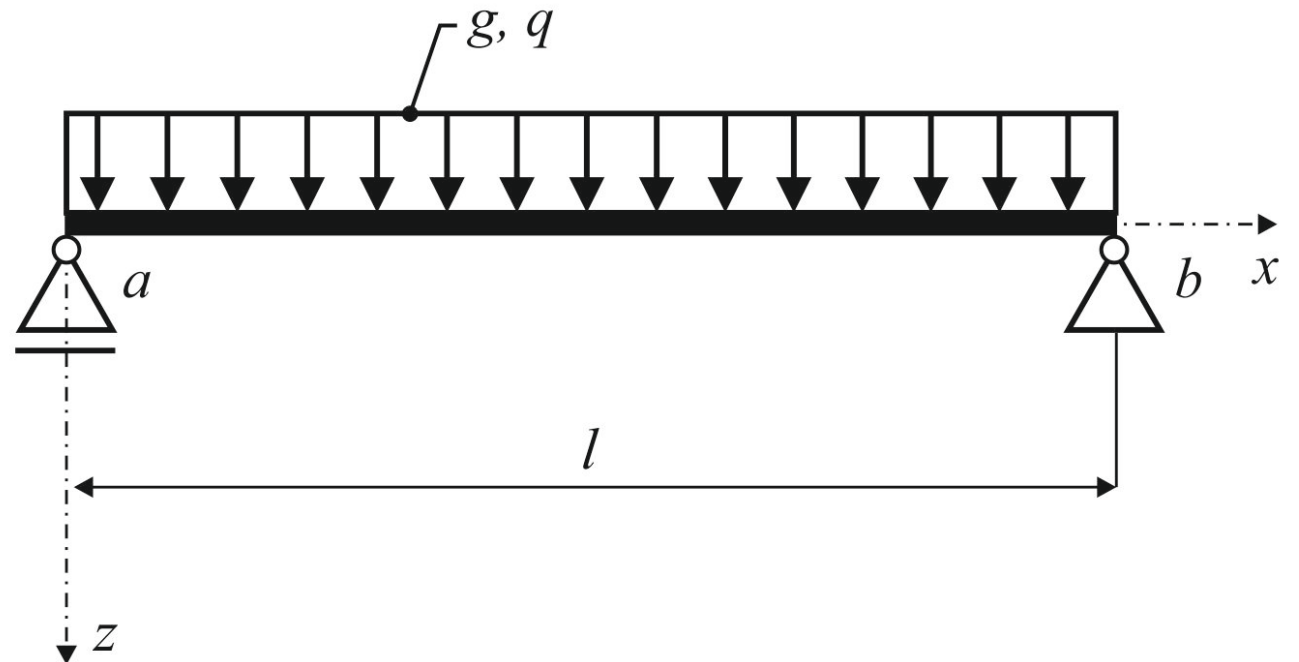
$$q_k = 6,0 \text{ kN/m} \quad \gamma_Q = 1,5$$

Ocel S235

$$f_{yk} = 235 \text{ MPa} \quad \gamma_M = 1,0$$

$$E = 210 \text{ GPa} \quad l = 6 \text{ m}$$

$$\delta_{\max} = \frac{l}{300} = 20 \text{ mm}$$



Příklad 3

Dimenzování prvku namáhaného ohybem

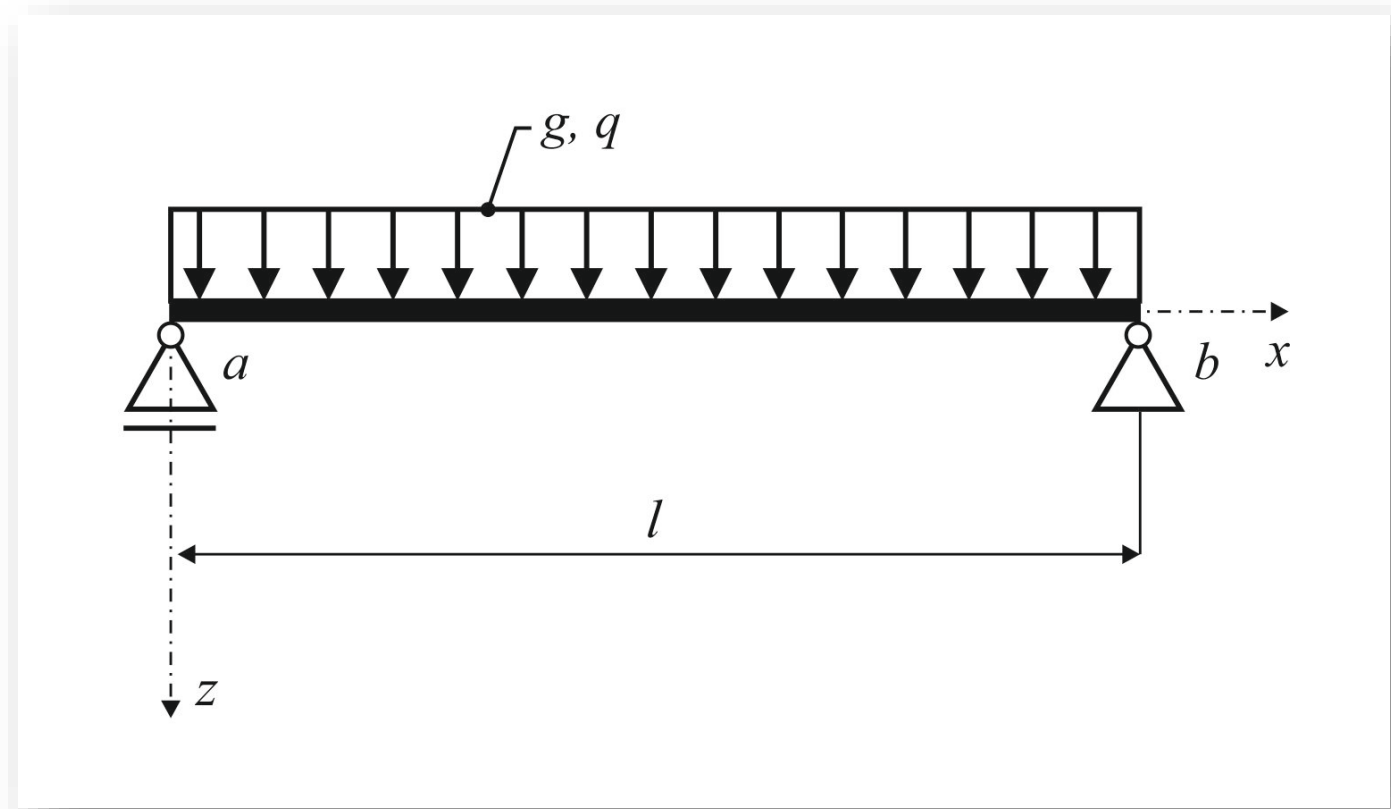
Ohybový moment

$$p_k = g_k + q_k = 2 + 6 = 8 \text{ kN/m}$$

$$p_d = g_k \cdot \gamma_G + q_k \cdot \gamma_Q = 2 \cdot 1,35 + 6 \cdot 1,5 = 11,7 \text{ kN/m}$$

$$M_{Ed} = \frac{1}{8} \cdot p_d \cdot l^2 = \frac{1}{8} \cdot 11,7 \cdot 6^2$$

$$= 52,65 \text{ kNm}$$



Příklad 3

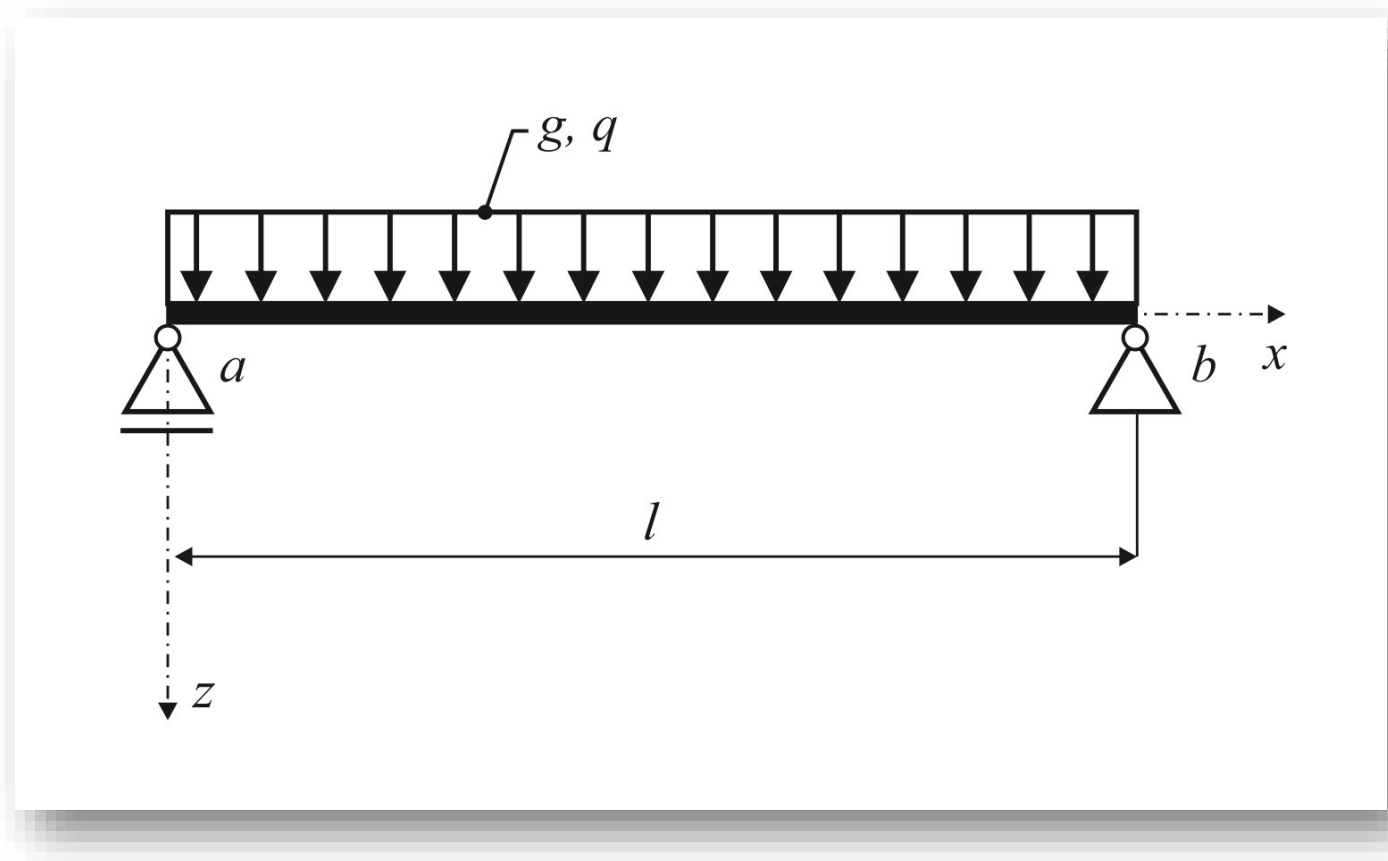
Dimenzování prvku namáhaného ohybem

Návrh podle **mezního stavu únosnosti**:

$$W_{\min} = \frac{M_{Ed}}{\left(\frac{f_{yk}}{\gamma_M}\right)} = \frac{52,65 \cdot 10^3}{\left(\frac{235 \cdot 10^6}{1,0}\right)} = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$W_y(\text{IPN220}) = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Navržen profil podle **mezního stavu únosnosti**: **IPN220**



Příklad 3

Dimenzování prvku namáhaného ohybem

Návrh podle **mezního stavu použitelnosti**:

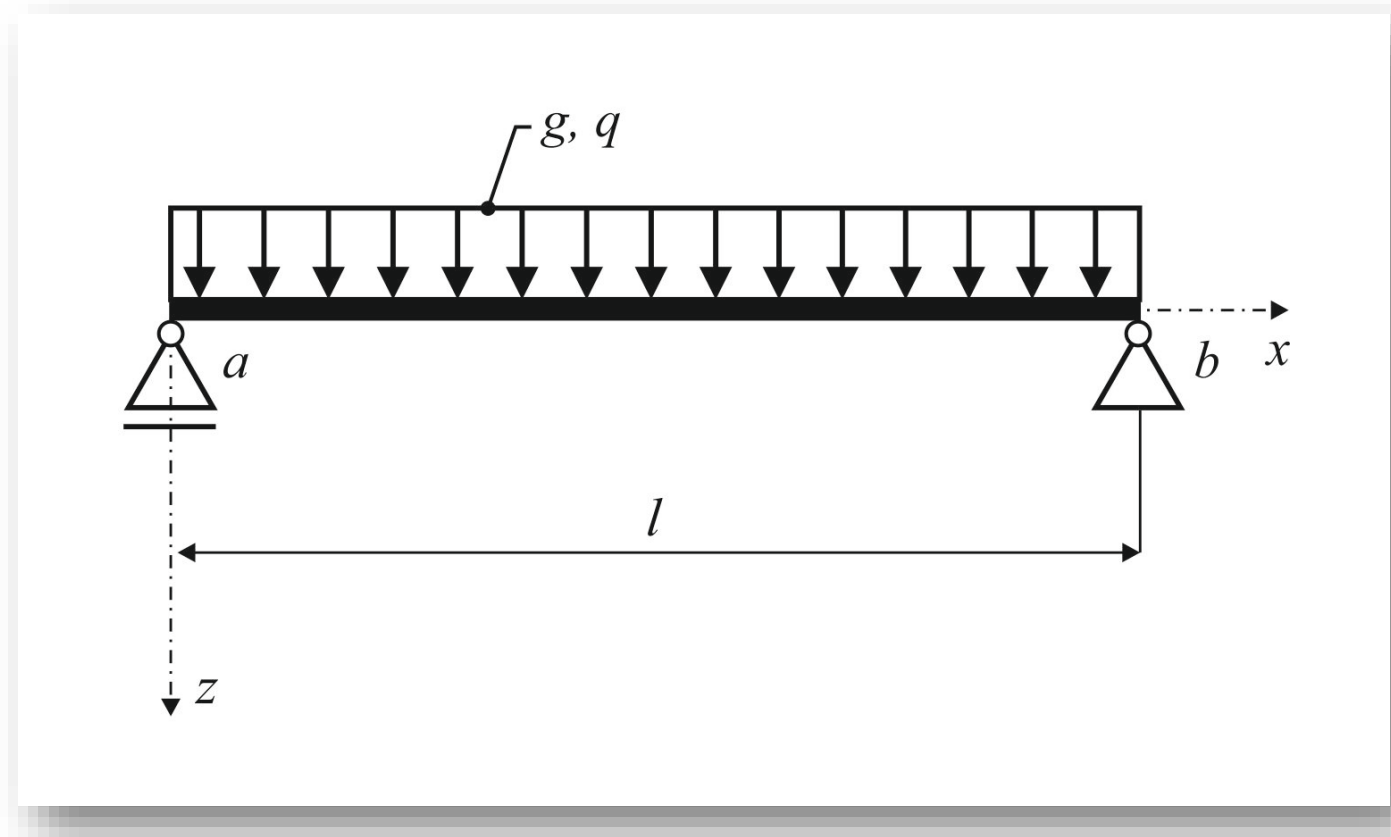
$$\begin{aligned} I_{\min} &= \frac{5}{384} \cdot \frac{p_k \cdot l^4}{E \cdot \delta_{\max}} = \\ &= \frac{5}{384} \cdot \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{210 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^3} = \\ &= 3,21 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$I_y(\text{IPN240}) = 4,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Navržen profil podle **mezního stavu použitelnosti**: **IPN240**

Výsledný návrh podle obou mezních stavů: **navržen profil IPN240**

$$(W_y = 3,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3, I_y = 4,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)$$



Příklad 3

Dimenzování prvku namáhaného ohybem

Posudek spolehlivosti:

Mezní stav únosnosti

$$M_{Rd} = f_{yd} \cdot W_y = 235 \cdot 10^6 \cdot 3,54 \cdot 10^{-4} = 83,19 \cdot 10^3 \text{ Nm} = 83,19 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{52,65}{83,19} \cong 0,6329 \leq 1,0$$

Vyhoví na ohyb podle mezního stavu únosnosti - rezerva 36,71 %.



Mezní stav použitelnosti

$$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{p_k \cdot l^4}{E \cdot I_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{210 \cdot 10^9 \cdot 4,25 \cdot 10^{-5}} = 0,01516 \text{ m} = 15,16 \text{ mm}$$

$$\delta = 15,16 \text{ mm} \leq \delta_{\max} = 20 \text{ mm}$$

Vyhoví na ohyb podle mezního stavu použitelnosti.



Přetvoření ohýbaných nosníků proměnného průřezu

Náročná integrace, neboť $E \cdot I_y \neq \text{konst.}$ ($I_y = I_{(x)}$)

Řešení:

Okrajové podmínky:

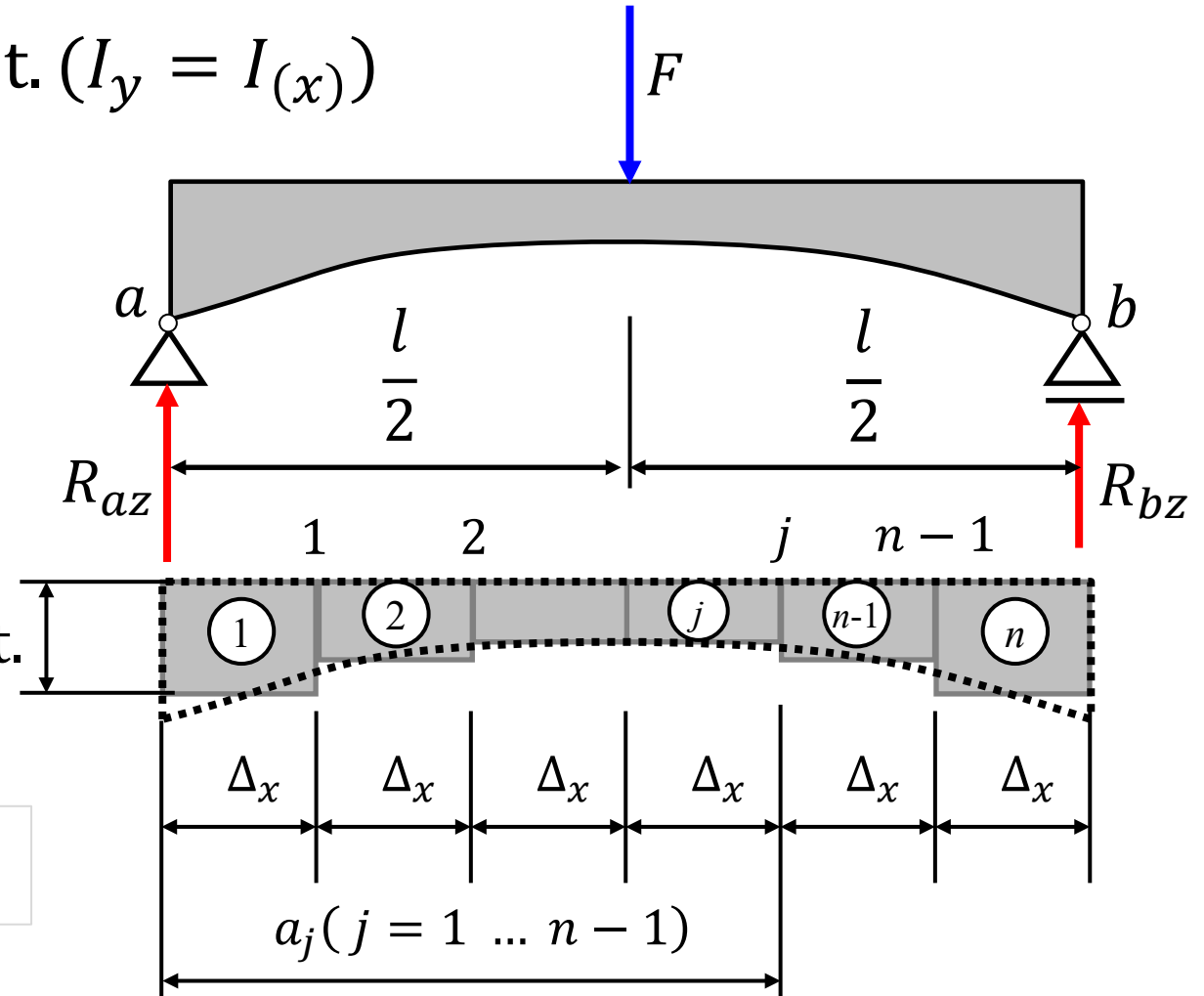
$$w_{(x=0)} = 0$$

$$w_{(x=l)} = 0$$

Podmínky spojitosti:

$$w_{j,(a_j)} = w_{j+1,(a_j)}$$

$$w'_{j,(a_j)} = w'_{j+1,(a_j)}$$



Soustava $2 \cdot n$ lineárních rovnic, $2 \cdot n$ neznámých $C_{1,j}; C_{2,j}$ ($j = 1 \dots n$)

Donau-wald bridge, Winzer, Německo



Donau-wald bridge, Winzer, Německo



Bogenberg bridge, Bogen, Německo



Kingstone Bridge, Glasgow, Skotsko



Kingstone Bridge, Glasgow, Skotsko



Kingstone Bridge, Glasgow, Skotsko



Lávka pro pěší přes řeku Ostravici, Ostrava-Kamenec



Lávka pro pěší přes řeku Ostravici, Ostrava-Kamenec



Konzola ochozu:

- Ocelový svařovaný a válcovaný profil I
 - Trapézový plech
 - Betonová podlaha



Ukázky stavebních konstrukcí s proměnným průřezem

Integrace diferenciální rovnice ohybové čáry IV. řádu

Metody výpočtu **staticky neurčitých** ohýbaných nosníků:

- a) **Přímá integrace** diferenciální rovnice ohybové čáry IV. řádu
- b) **Silová metoda**
- c) Metody založené na **energetických principech**

Přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry IV. řádu

Schwedlerovy vztahy

$$w(x) = ?$$

$$\varphi_y(x) = w'(x)$$

$$M_y(x) = -E \cdot I_y \cdot w''(x)$$

$$V_z(x) = -E \cdot I_y \cdot w'''(x)$$

$$q_z(x) = E \cdot I_y \cdot w^{IV}(x)$$

$$E \cdot I_y \cdot w^{IV}(x) = q_z(x)$$

$$E \cdot I_y \cdot w'''(x) = \int q_z(x) + C_1 = -V_z(x)$$

$$E \cdot I_y \cdot w''(x) = \iint q_z(x) + C_1 \cdot x + C_2 = -M_y(x)$$

$$E \cdot I_y \cdot w'(x) = \iiint q_z(x) + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$



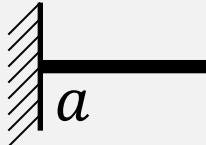
$$E \cdot I_y \cdot w(x) = \int \int \int \int q_z(x) + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Řešení: 4 neznámé
integrační konstanty
 C_1, C_2, C_3, C_4

↓

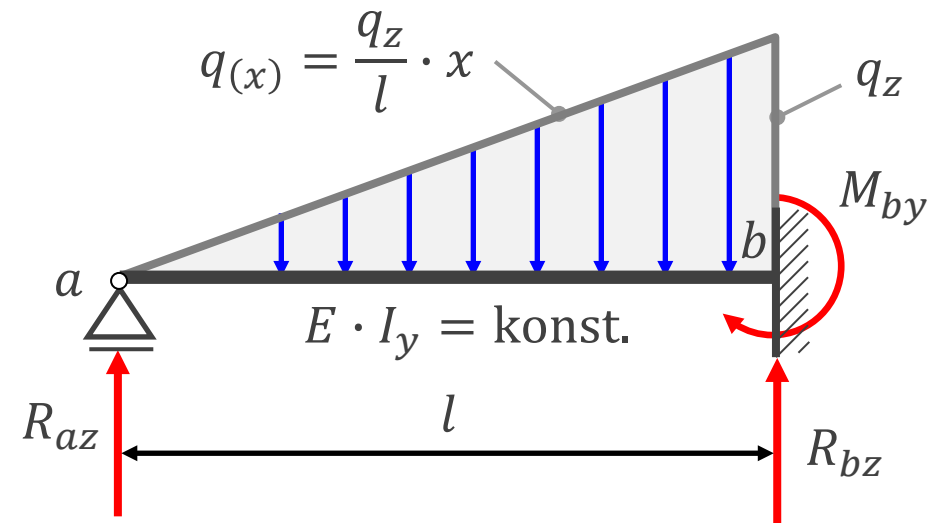
**4 okrajové
podmínky**

Statické a deformační okrajové podmínky

Typ okraje	Deformační okrajové podmínky	Statické okrajové podmínky
Volný okraj 	$w_{(a)} \neq 0$ $\varphi_{(a)} \neq 0$	$M_{(a)} = 0 \rightarrow w''_{(a)} = 0$ $V_{(a)} = 0 \rightarrow w'''_{(a)} = 0$
Prostě podepřený okraj 	$w_{(a)} = 0$ $\varphi_{(a)} \neq 0$	$M_{(a)} = 0 \rightarrow w''_{(a)} = 0$ $V_{(a)} \neq 0 \rightarrow w'''_{(a)} \neq 0$
Vetknutí 	$w_{(a)} = 0$ $\varphi_{(a)} = 0$	$M_{(a)} \neq 0 \rightarrow w''_{(a)} \neq 0$ $V_{(a)} \neq 0 \rightarrow w'''_{(a)} \neq 0$

Příklad 4

Zadání: Stanovte statické a přetvárné veličiny **staticky neurčitého nosníku** metodou přímé integrace diferenciální rovnice ohybové čáry IV. řádu.



Řešení:

Zatížení $E \cdot I_y \cdot w_{(x)}^{IV} = q_{z(x)} = \frac{q_z}{l} \cdot x$

Posouvající síla

$$-V_{z(x)} = E \cdot I_y \cdot w_{(x)}''' = \int q_{z(x)} + C_1 = \int \frac{q_z}{l} \cdot x \, dx + C_1 = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

Ohybový moment

$$-M_{y(x)} = E \cdot I_y \cdot w_{(x)}'' = \iint q_{z(x)} + C_1 \cdot x + C_2 = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Pootočení

$$E \cdot I_y \cdot w_{(x)}' = \iiint q_{z(x)} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3 = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

Ohybová čára

$$E \cdot I_y \cdot w_{(x)} = \int \int \int \int q_{z(x)} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^5}{120} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

Řešení: 4 neznámé integrační konstanty

$$C_1, C_2, C_3, C_4$$



4 okrajové podmínky

Příklad 4 – okrajové podmínky a integrační konstanty

Na každém okraji lze definovat 2 **okrajové podmínky**:

Levý okraj

Pravý okraj

$$w(x=0) = 0$$

Deformační

$$w'(x=l) = 0$$

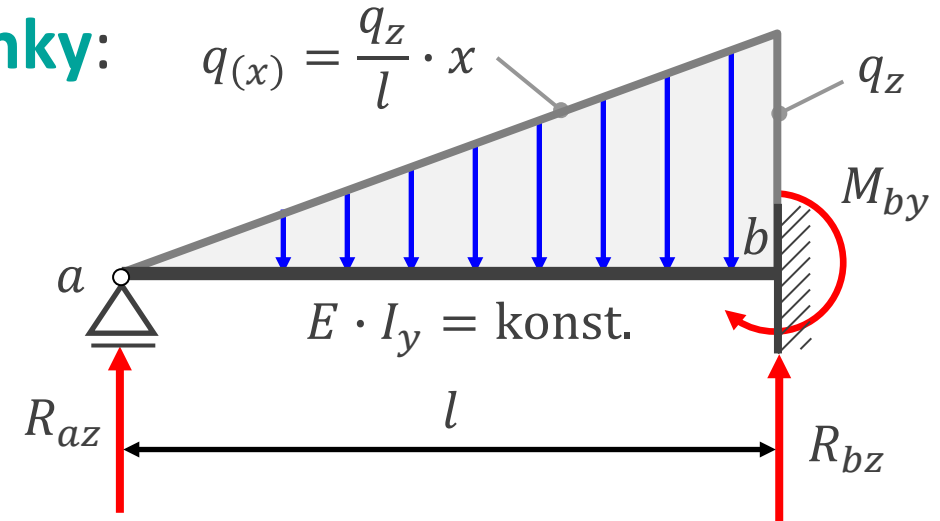
Deformační

$$M_y(x=0) = 0$$

Statická

$$w(x=l) = 0$$

Deformační



Určení integračních konstant:

$$1. \quad w(x=0) = 0 \quad E \cdot I_y \cdot w(x=0) = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{0^5}{120} + C_1 \cdot \frac{0^3}{6} + C_2 \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$2. \quad M_y(x=0) = 0 \quad M_y(x=0) = -\frac{q_z}{l} \cdot \frac{0^3}{6} - C_1 \cdot 0 - C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$3. \quad w'(x=l) = 0 \quad E \cdot I_y \cdot w'(x=l) = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{l^4}{24} + C_1 \cdot \frac{l^2}{2} + 0 \cdot l + C_3 = 0$$

2 rovnice
o 2 neznámých C_1 a C_3

$$4. \quad w(x=l) = 0 \quad E \cdot I_y \cdot w(x=l) = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{l^5}{120} + C_1 \cdot \frac{l^3}{6} + 0 \cdot \frac{l^2}{2} + C_3 \cdot l + 0 = 0$$

$$C_1 = -\frac{q_z \cdot l}{10}$$

$$C_3 = \frac{q_z \cdot l^3}{120}$$

Příklad 4 – výsledné rovnice

Výsledné integrační konstanty:

$$C_1 = -\frac{q_z \cdot l}{10} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{q_z \cdot l^3}{120} \quad C_4 = 0$$

Posouvající síla: Rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant

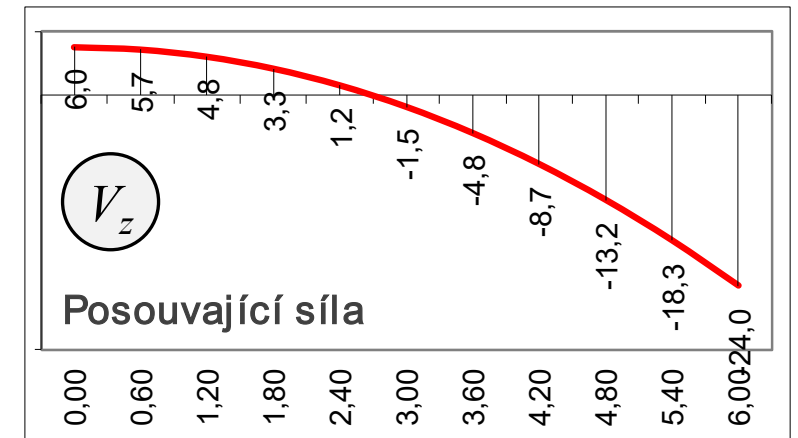
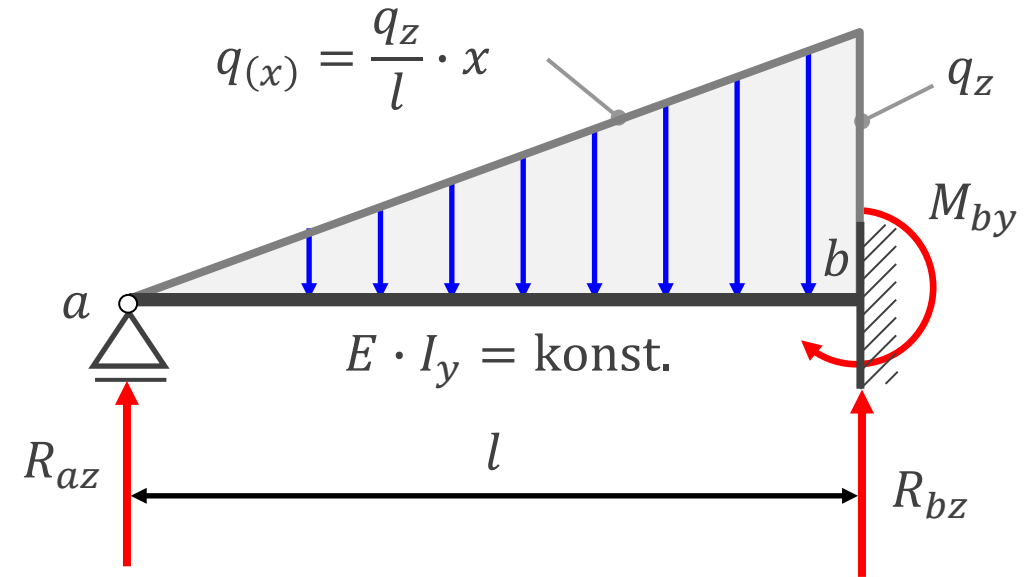
$$V_z(x) = -\frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - C_1 = -\frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q_z \cdot l}{10} = q_z \cdot \left(-\frac{x^2}{2 \cdot l} + \frac{l}{10} \right) = \frac{q_z}{10 \cdot l} \cdot (l^2 - 5 \cdot x^2)$$

Reakce:

$$R_{az} = V_z(x=0) = \frac{1}{10} \cdot q_z \cdot l$$

$$R_{bz} = -V_z(x=l) = -\frac{q_z}{10 \cdot l} \cdot (l^2 - 5 \cdot l^2) = \frac{2}{5} \cdot q_z \cdot l$$

Kontrola: $R_z = 0:$ $R_{az} + R_{bz} - \frac{q_z \cdot l}{2} = q_z \cdot l \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right) = 0$



Příklad 4 – výsledné rovnice

Výsledné integrační konstanty:

$$C_1 = -\frac{q_z \cdot l}{10} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{q_z \cdot l^3}{120} \quad C_4 = 0$$

Ohybový moment - rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant:

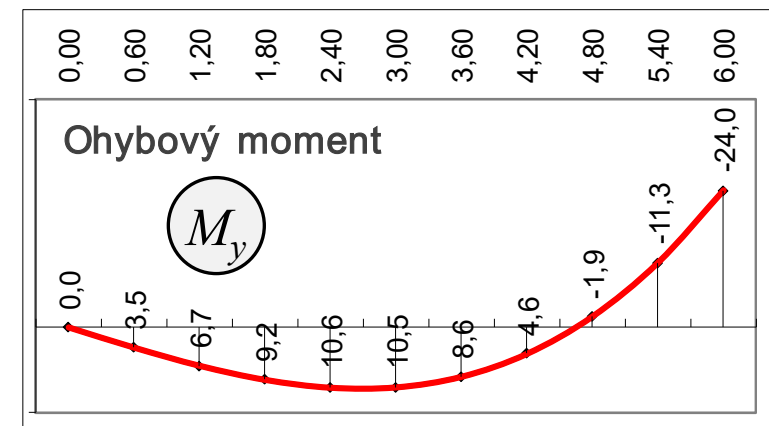
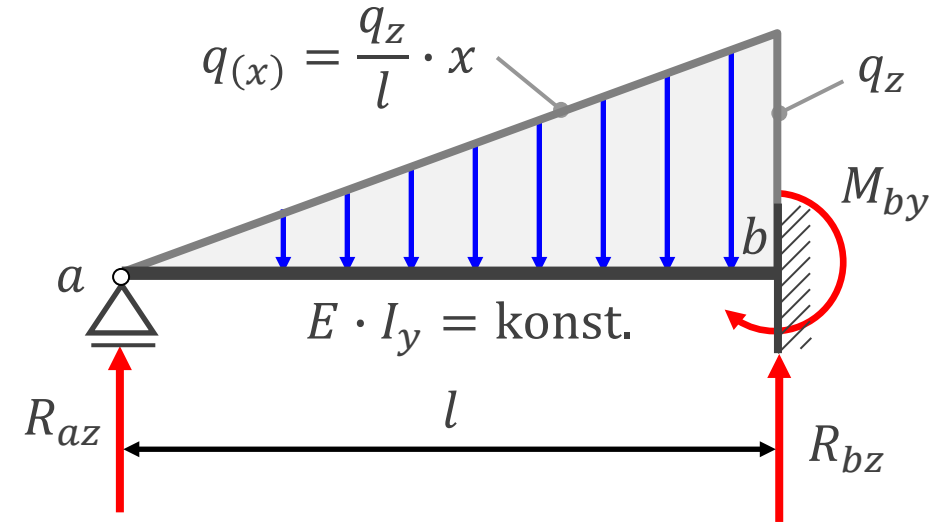
$$M_{y(x)} = -\frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - C_1 \cdot x - C_2 = -\frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q_z \cdot l}{10} \cdot x = \frac{q_z \cdot x}{30 \cdot l} \cdot (3 \cdot l^2 - 5 \cdot x^2)$$

Reakce: $M_{ay} = M_{y(x=0)} = 0$

$$M_{by} = -M_{y(x=l)} = -\frac{q_z \cdot l}{30 \cdot l} \cdot (3 \cdot l^2 - 5 \cdot l^2) = \frac{1}{15} \cdot q_z \cdot l^2$$

Kontrola:

$$\sum M_{i,b} = 0: -R_{az} \cdot l + \frac{q_z \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} - M_{by} = -\frac{q_z \cdot l^2}{10} + \frac{q_z \cdot l^2}{6} - \frac{q_z \cdot l^2}{15} = 0$$



Příklad 4 – výsledné rovnice

Výsledné integrační konstanty:

$$C_1 = -\frac{q_z \cdot l}{10} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{q_z \cdot l^3}{120} \quad C_4 = 0$$

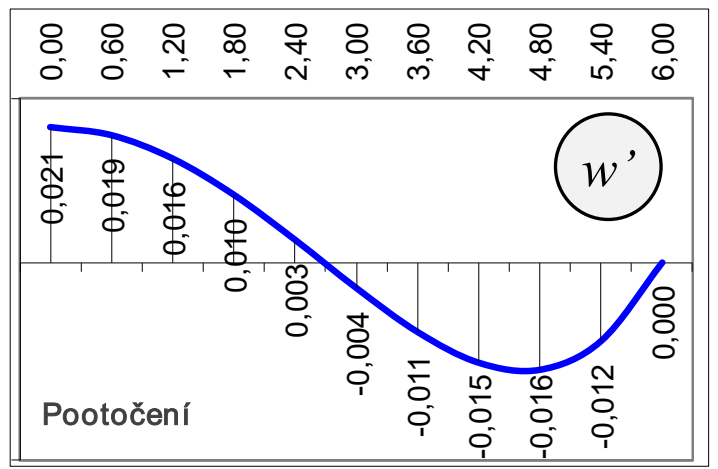
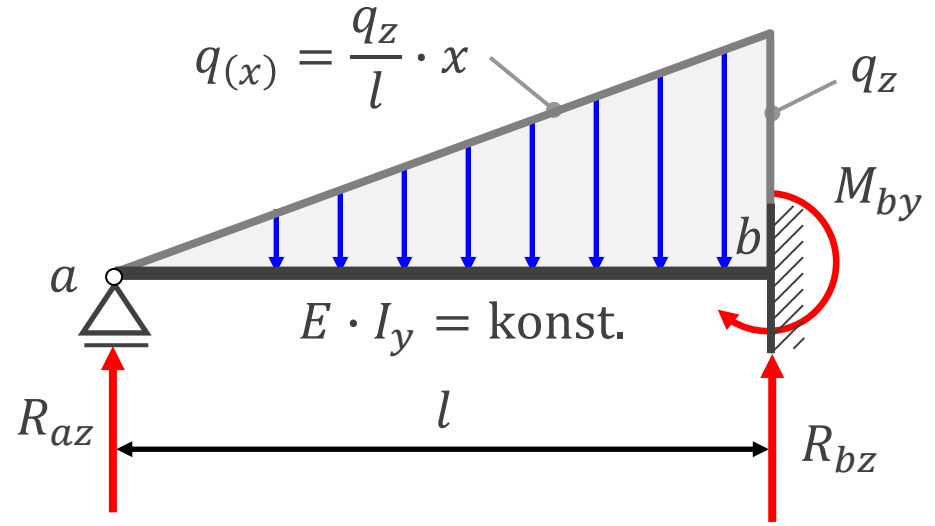
Pootočení - rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant:

$$E \cdot I_y \cdot w'_{(x)} = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3 = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^4}{24} - \frac{q_z \cdot l}{10} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q_z \cdot l^3}{120} = q_z \cdot \left[\frac{x^4}{24 \cdot l} - \frac{l \cdot x^2}{20} + \frac{l^3}{120} \right]$$

Koncové hodnoty:

$$\varphi_a = w'_{(x=0)} = \frac{q_z \cdot l^3}{120 \cdot E \cdot I_y}$$

$$\varphi_b = w'_{(x=l)} = \frac{q_z \cdot l^3}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{20} + \frac{1}{120} \right] = \frac{q_z \cdot l^3}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{5}{120} - \frac{6}{120} + \frac{1}{120} \right] = 0$$



Příklad 4 – výsledné rovnice

Výsledné integrační konstanty:

$$C_1 = -\frac{q_z \cdot l}{10}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{q_z \cdot l^3}{120}$$

$$C_4 = 0$$

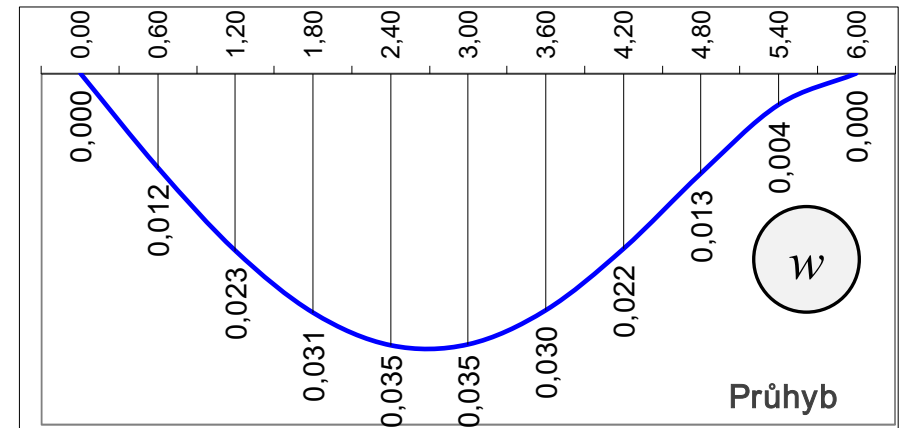
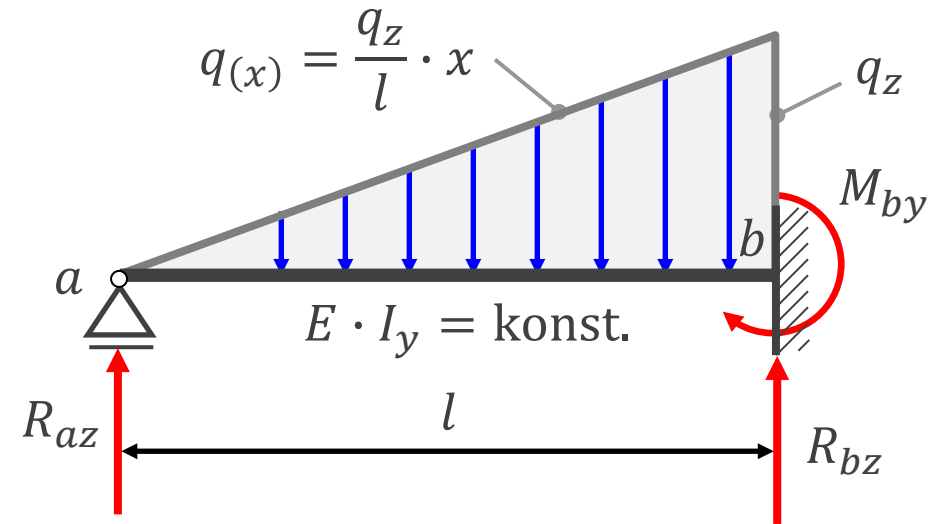
Ohybová čára - rovnice po dosazení vypočtených integračních konstant:

$$E \cdot I_y \cdot w(x) = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^5}{120} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 = \frac{q_z}{l} \cdot \frac{x^5}{120} - \frac{q_z \cdot l}{10} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q_z \cdot l^3}{120} \cdot x = q_z \cdot \left[\frac{x^5}{120 \cdot l} - \frac{l \cdot x^3}{60} + \frac{l^3 \cdot x}{120} \right]$$

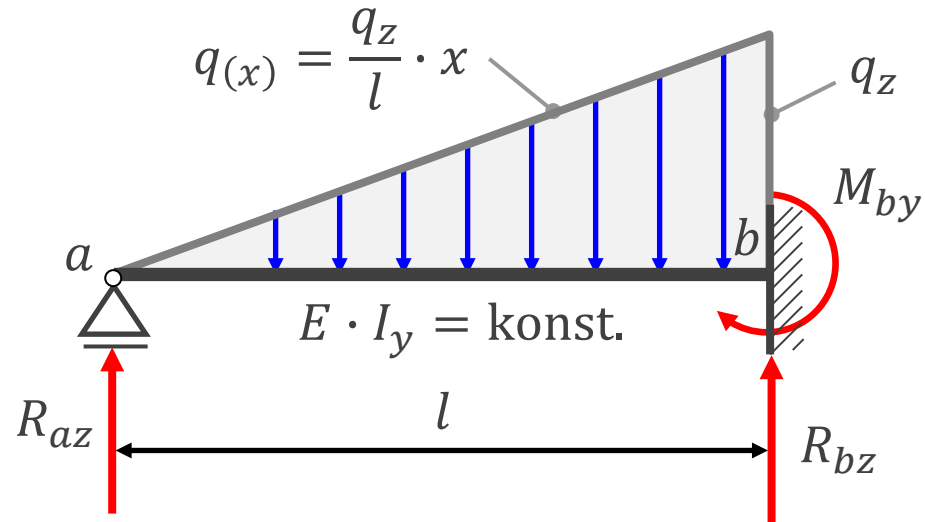
Koncové hodnoty: $w_a = w(x=0) = 0$

$$w_b = w(x=l) = \frac{q_z}{E \cdot I_y} \cdot \left[\frac{l^4}{120} - \frac{l^4}{60} + \frac{l^4}{120} \right] = 0$$

Největší průhyb $\rightarrow \varphi_y(x) = w'(x) = 0$



Příklad 4 – největší průhyb



Největší průhyb $\rightarrow \varphi_y(x) = w'(x) = 0$

Řešením lze získat 4 kořeny:

$$x_1 = l$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot l \cong 0,447213 \cdot l$$

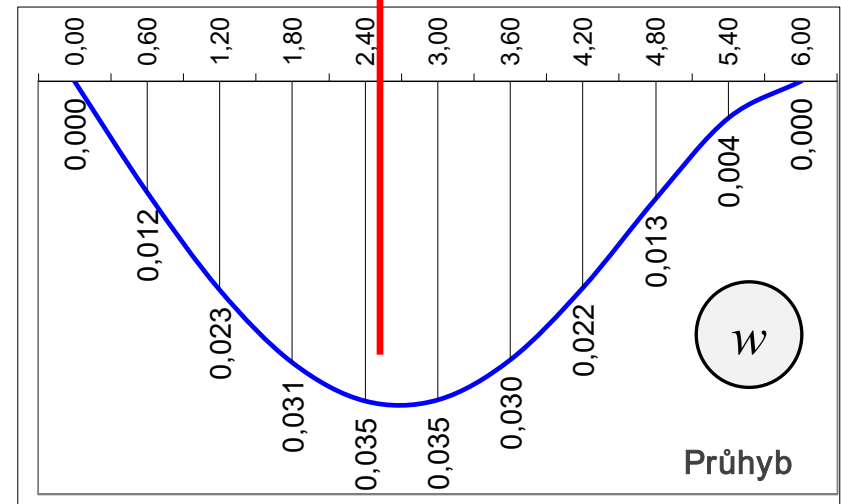
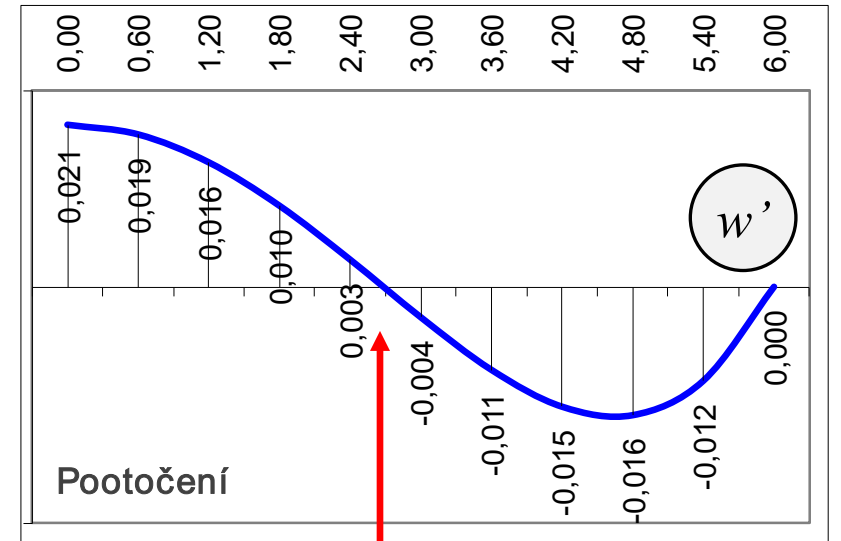
$$x_4 = -\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot l$$

$$x_2 = -l$$

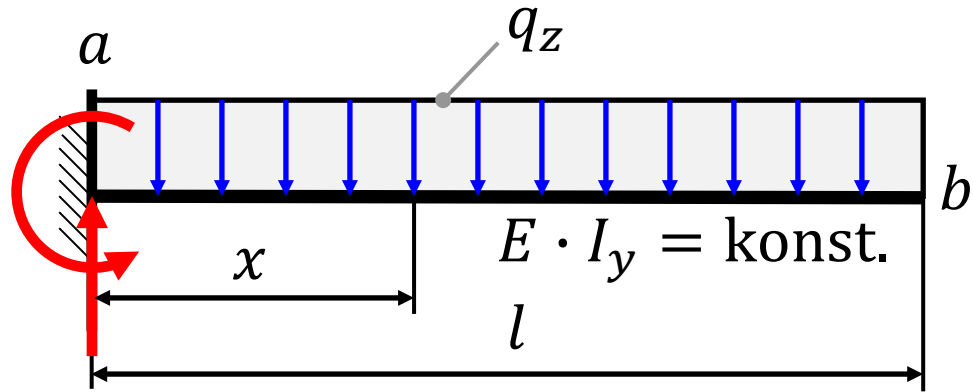
Reálný kořen

Největší průhyb:

$$w_{\max} = w(x_3) = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{1875} \cdot \frac{q_z \cdot l^4}{E \cdot I_y}$$



Vliv smyku na přetvoření ohýbaného nosníku



Průhyb bez účinku smyku

$$w_{\max, M} = w_{(x=l)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y}$$

Z Hookova zákona ve smyku:

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Pootočení

vlivem smyku:

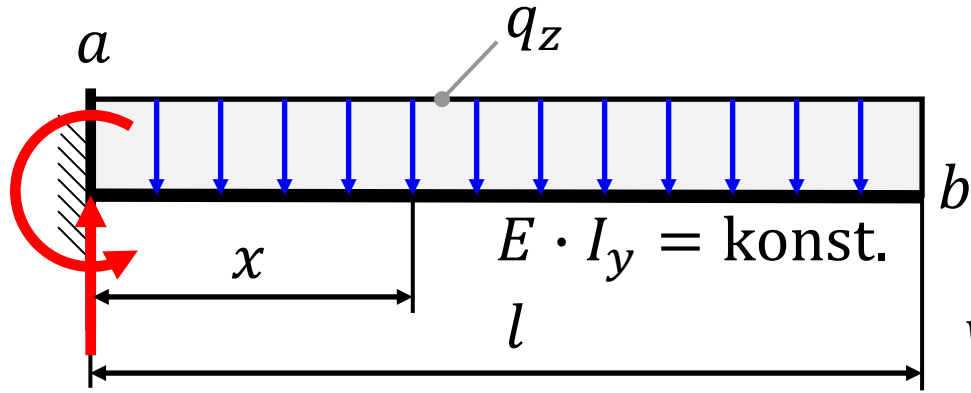
$$\gamma_{xz} = \frac{V_z}{G \cdot A^*} = w'_V$$

Smykové napětí: $\tau_{xz} = \frac{V_z}{A^*}$

A^* ... **redukovaná průřezová plocha** (smyková)

Typ průřezu	A^*	Typ průřezu	A^*
obdélník	$0,833 \cdot A$	kruh	$0,844 \cdot A$
I-profil	A_w	mezikruží	$0,5 \cdot A$

Vliv smyku na přetvoření ohýbaného nosníku

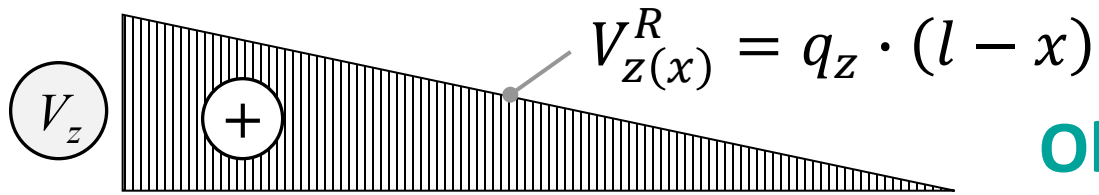


Pootočení

vlivem smyku:

$$w_V' = \frac{V_z}{G \cdot A^*} = \frac{q_z \cdot (l - x)}{G \cdot A^*}$$

$$w_V = \int \frac{q_z \cdot (l - x)}{G \cdot A^*} dx + C_1^* = \frac{q_z}{G \cdot A^*} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1^*$$



Okrajová podmínka

$$w_V(x=0) = 0 \rightarrow C_1^* = 0$$

$$w_V = \frac{q_z}{G \cdot A^*} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) \rightarrow$$

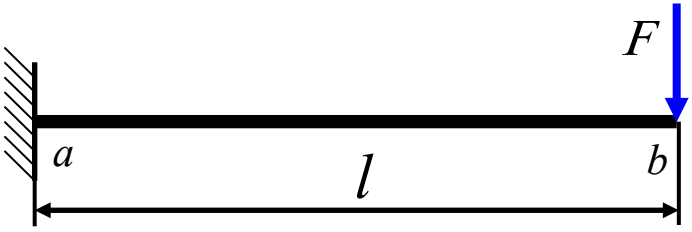
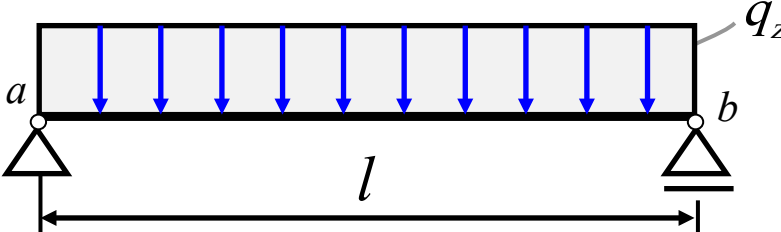
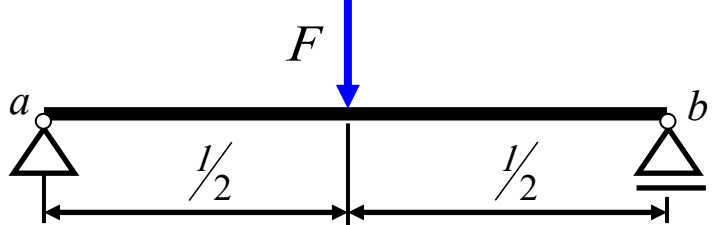
$$w_{\max, V} = w_{(x=l)} = \frac{q_z}{G \cdot A^*} \cdot \left(l \cdot l - \frac{l^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_z \cdot l^2}{G \cdot A^*}$$

Přetvoření včetně vlivu smyku

$$W(x) = w_M(x) + w_V(x) \rightarrow$$

$$W_{\max, M} = w_{(x=l)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I_y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q_z \cdot l^2}{G \cdot A^*}$$

Vliv smyku na přetvoření ohýbaného nosníku

	$W_{\max} = W_{(x=l)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y} + \frac{F \cdot l}{G \cdot A^*}$
	$W_{\max} = W_{(x=l/2)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_z \cdot l^4}{E \cdot I_y} + \frac{1}{8} \cdot \frac{q_z \cdot l^2}{G \cdot A^*}$
	$W_{\max} = W_{(x=l/2)} = \frac{1}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot l}{G \cdot A^*}$

Čím je nosník štíhlejší, tím je vliv smyku na jeho přetvoření menší:

l ... **rozpětí nosníku**

h ... **výška průřezu**

$l/h = 10$	10%
$l/h = 20$	2,5%
$l/h > 20$	Lze zanedbat

Nová budova Národního muzea, Praha

Vierendeelův (rámový) nosník:

- Realizace 1968 až 1973
- Půdorys 59x83 m
- 6 pilířů



Silniční most přes řeku Olši, Karviná-Darkov

Železobetonový obloukový most z roku 1925:

- Vierendeelův (rámový) nosník
- Unikátní příčné ztužení
- Výška 6,25 m
- Délka mostovky 55,8 m
- Šířka 5,6 m

Foto:
Ing. Renata Zdařilová, Ph.D.



Silniční most přes řeku Olši, Karviná-Darkov

Železobetonový obloukový most z roku 1925:

- Vierendeelův (rámový) nosník
- Unikátní příčné ztužení
- Výška 6,25 m
- Délka mostovky 55,8 m
- Šířka 5,6 m

Foto:
Ing. Renata Zdařilová, Ph.D.



Silniční most přes řeku Olši, Karviná-Darkov

Železobetonový obloukový most z roku 1925:

- Vierendeelův (rámový) nosník
- Unikátní příčné ztužení
- Výška 6,25 m
- Délka mostovky 55,8 m
- Šířka 5,6 m

Foto:
Ing. Renata Zdařilová, Ph.D.



Silniční most přes řeku Olši, Karviná-Darkov

Železobetonový obloukový most z roku 1925:

- Vierendeelův (rámový) nosník
- Unikátní příčné ztužení
- Výška 6,25 m
- Délka mostovky 55,8 m
- Šířka 5,6 m

Foto:

Ing. Renata Zdařilová, Ph.D.



Silniční most přes řeku Olši, Karviná-Darkov

Železobetonový obloukový most z roku 1925:

- Vierendeelův (rámový) nosník
- Unikátní příčné ztužení
- Výška 6,25 m
- Délka mostovky 55,8 m
- Šířka 5,6 m

Foto:
Ing. Renata Zdařilová, Ph.D.



Hala Tatra / Bonver Aréna, Ostrava

