

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ | KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY

Téma 7: Kroucení

- Základní vztahy a předpoklady řešení
- Výpočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku s rotačně symetrickým, obecným a tenkostěnným průřezem
- Řešení staticky neurčité úlohy krouceného prvku

10/09/22 Průžnost a plasticita 0

0

Kroucení, kroučící moment

Kroučící moment $T = M_x \neq 0$
 Např. **prostorově lomený nosník**

Vnitřní síly:
 N, T (mohou být $\neq 0$ v každém prutu),
 V_y, V_z, M_y, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou x)
 V_x, V_z, M_x, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou y)
 V_x, V_y, M_x, M_y (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou z)

10/09/22 Základní vztahy a předpoklady řešení 1

1

Kroucení, prvky namáhané kroucením

Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – průřez mostní konstrukce

Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – dřevěný rumpál

10/09/22 Základní vztahy a předpoklady řešení 2

2

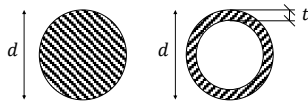
Kroucení prosté

Jediná nenulová složka vnitřních sil v libovolném průřezu prutu je **kroucí moment** $T = M_x \neq 0$.

$$N = 0 \quad V_y = V_z = 0 \quad M_y = M_z = 0$$

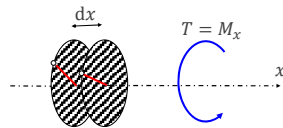


Nejjednodušší řešení lze získat u prutů s rotačně symetrickým průřezem – **kruhový průřez a mezikružší**.



3

Předpoklady řešení



- a) osa prutu zůstane i po deformaci **přímá**
- b) průřezy zůstávají **rovinnými** i po deformaci a vzájemně se nevzdálí
- c) jednotlivé průřezy se otáčejí jako **tuhé celky** (přuvodiče se nezkrvíví)

$$\sigma_x = 0 \rightarrow \epsilon_x = 0$$

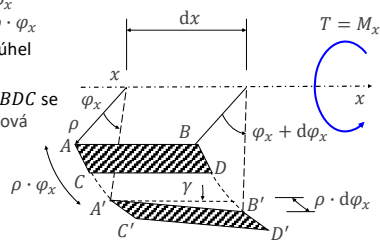
4

Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

- Průřez x se pootočí o úhel φ_x ($A \rightarrow A'$), $\tan \varphi_x \approx \varphi_x \Rightarrow \rho \cdot \varphi_x$
- Průřez $x + dx$ se pootočí o úhel $\varphi_x + d\varphi_x$ ($B \rightarrow B'$)
- Původně pravouhlý prvek $ABDC$ se zkosí o úhel γ (poměrná úhlová deformace):

$$\gamma = \frac{\rho \cdot d\varphi_x}{dx} = \rho \cdot \theta$$

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} \quad \theta \dots \text{poměrný úhel zkosení [m}^{-1}\text{]}$$



5

Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

$\rho \in (0; r)$

$\gamma = \rho \cdot \theta$

$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \theta$... podle Hookova zákona ve smyku

$T = M_x = \int_A \rho \cdot \tau \, dA = \int_A \rho \cdot (G \cdot \rho \cdot \theta) \, dA = G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 \, dA = G \cdot \theta \cdot I_p$

$I_p = I_t = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ I_p ... polární moment setrvačnosti (u rotačně symetrických průřezů),
 I_t ... moment tuhosti v kroucení

$I_p = I_t = \frac{\pi}{2} \cdot (r^4 - r_s^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (d^4 - d_s^4)$

10/09/22 Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku 6

6

Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta$

$T = M_x = G \cdot \theta \cdot I_p$

$\tau(\rho) = \frac{M_x \cdot \rho}{I_{p,t}}$

$\tau_{max} = \frac{M_x \cdot r}{I_{p,t}}$... maximální smykové napětí (po obvodu) [MPa]

10/09/22 Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku 7

7

Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

Deformace prutu kruhového průřezu φ_x [rad]:

Rozvinutý plášť válce:

$\varphi_x(x) = \int \theta(x) \, dx + C = \int \frac{M_x}{G \cdot I_{p,t}} \, dx + C$

Pro $I_p = \text{konst.}$ a $T = M_x = \text{konst.}$:

$\varphi_x(x) = \int \frac{T}{G \cdot I_{p,t}} \, dx = \frac{T}{G \cdot I_{p,t}} \cdot x$ $\varphi_{x,max} = \varphi_{(x=l)} = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_{p,t}}$

Okrajová podmínka: $\varphi_x(x=0) = 0$

10/09/22 Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku 8

8

Kroucení prutů obecného průřezu

Při kroucení prutů obecného průřezu dochází k tzv. **deplanaci** (porušení rovinnosti průřezu). Pokud není deplanaci bráněno, vzniká **volné kroucení** ($\sigma_x = 0$) jinak **kroucení vázané**.

U prutů obecného průřezu vzniká kroucení k ose, jež je spojnicí středů smyků, které nemusí být shodné s těžištěm. U masivních průřezů není tento rozdíl významný, respektuje se u tenkostěnných průřezů.

Předpoklady řešení:

- příčný tvar průřezů se nemění, každý průřez se pootáčí kolem osy prutu jako tuhý celek,
- $\sigma_x = 0$, vzniká však deplanace, jež je shodná ve všech řezech.

10/09/22

Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prutu

9

9

Kroucení prutů obecného průřezu

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t}$$

$$W_t \dots \text{průřezový modul v kroucení [m}^3\text{]}$$

τ_{\max} vzniká **ve středu delší strany** obdélníka

$\alpha, \beta \dots$ bezrozměrné součinitele [-]

h/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,141	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

Pro τ_B :

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3	5	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	0,333
β	0,240	0,243	0,246	0,258	0,267	0,292	0,312	0,333

$$I_t = \alpha \cdot b^3 \cdot h \dots [\text{m}^4]$$

$$W_t = \beta \cdot b^2 \cdot h \dots [\text{m}^3]$$

10/09/22

Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prutu

10

10

Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

Často nelze zanedbat vliv vázaného kroucení

Složené průřezy

$$I_t = \eta \cdot \sum_{i=1}^n I_{t,i} = \frac{\eta}{3} \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 \cdot h_i$$

$\eta \dots$ **korekční součinitel**, určený empiricky

$\tau_{\max} \dots$ vzniká v části s největší tloušťkou:

$$W_{t,\min} = \frac{I_t}{t_{\max}}$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot h$$

$$W_t = \frac{1}{3} \cdot t^2 \cdot h = \frac{I_t}{t}$$

Průřez ocelového nosníku	η
Úhelník	1,00
Válcovaný I profil	1,20
Válcovaný U profil	1,12
Svařovaný I profil s výztuhami	1,50
Svařovaný T profil s výztuhami	1,40
Nýtovaný I profil	0,50

10/09/22

Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prutu

11

11

Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

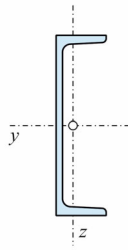
Zadání: $l = 3,2 \text{ m}$ Válcovaný profil **UPN160**
 $M_{x,d} = 0,6 \text{ kNm}$

Z tabulek válcovaných profilů – pro profil **UPN160**

$$I_t = 73,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 \quad t_f = t_{\max} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{73,9 \cdot 10^{-9}}{0,0105} = 7,0381 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x,d}}{W_t} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{7,0381 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 85,250 \text{ MPa}$$



12

Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

Předpoklad: Při malé tloušťce je $\tau = \text{konst.}$

Smykový tok: Výslednice smykových napětí v řezu napříč tloušťkou průřezu.

τ_{\max} vzniká v nejužším místě průřezu.

$$W_t = 2 \cdot A_k \cdot t_{\min}$$

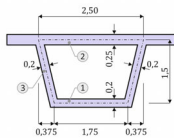
A_k ... plocha ohraničená střednicí průřezu [m^2]

t_{\min} ... nejužší místo průřezu [m]

Tuhost v kroucení:

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\oint_s t(s)} \dots \text{křivkový integrál, vztahující se na celou délku střednice průřezu}$$

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i}} \dots \text{pro průřezy po částech konstantní}$$



13

Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

Zadání: $W_t = ?$ $I_t = ?$

① $A_1 = 1,75 \cdot 0,2$

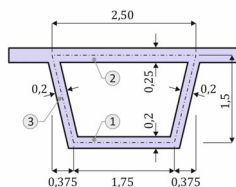
② $A_2 = 2,50 \cdot 0,25$

③ $A_3 = 1,546 \cdot 0,2$

Plocha omezená střednicí:

$$A_k = 1,5 \cdot \left(\frac{2,5 + 1,75}{2} \right) = 3,1875 \text{ m}^2$$

$$W_t = 2 \cdot A_k \cdot t_{\min} = 1,275 \text{ m}^3 \quad I_k = \frac{4 \cdot A_k^2}{\sum_{i=1}^4 \frac{h_i}{t_i}} = \frac{40,64063}{34,21165} = 1,187918 \text{ m}^4$$



14

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava



10/09/22

Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením

15

15

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava



10/09/22

Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením

16

16

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava



10/09/22

Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením

17

17

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava



10/09/22

Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením

18

18

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava



10/09/22

Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením

19

19

Dálniční most přes Odru, Ostrava



10/09/22

Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením


foto: SHP Brno

20

20

Dálniční most přes Odru, Ostrava

zdroj: SHP Brno



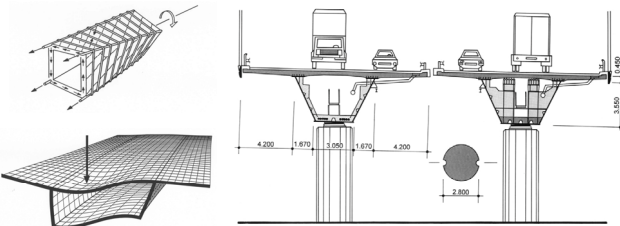
Každý směr dálnice D1 je převáděn po samostatné nosné konstrukci výšky 4 m. Rozpětí hlavního pole 99,5 m, resp. 102,5 m.

10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 21

21

Dálniční most přes Odru, Ostrava

zdroj: SHP Brno



Účinky kroucení jsou přenášeny krajními opěrami - konstrukce je v kroucení vetknuta ve vzdálenosti 402 m (rozpětí mostu).

10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 22

22

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava



10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 23

23

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava



10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 24

24

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava



10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 25

25

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava



10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 26

26

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava



10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 27

27

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava



10/09/22 Příklady konstrukcí s prvky namáhanými kroucením 28

28

Průřezové charakteristiky
vybraných rovinných obrazců

Tabulky průřezových
charakteristik I_t a W_t pro
vybrané rovinné obrazce

Typ průřezu	I_t	W_t
	$I_t = I_y = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
	$I_t = I_y = \frac{\pi}{32} [d^4 - (d - 2s)^4]$	$W_t = \frac{\pi}{16} [d^3 - (d - 2s)^3]$
	$I_t = \frac{ab^3}{12}$ $I_y = \frac{a^3 b}{12}$	$W_t = \frac{ab^2}{6}$ $W_y = \frac{a^2 b}{6}$
	$I_t = \frac{\pi}{32} [2a^4 - (2a - d)^4]$	$W_t = \frac{d^2(2ab - d)}{8(0,3b + 0,7d)}$
	$I_t = \frac{ab^3}{12}$ $I_y = \frac{a^3 b}{12}$ $\alpha = \text{viz tab. 3.1}$	$W_t = \frac{ab^2}{6}$ $W_y = \frac{a^2 b}{6}$ $\beta = \text{tab. 3.1}$
	$I_t = \frac{b^3}{12} [4h - 3h_1 + 3h_2]$ $I_y = \frac{b^3}{12} [4h - 3h_1 + 3h_2]$ $\alpha = \text{viz tab. 3.1}$	$W_t = \frac{b^2}{6}$ $W_y = \frac{b^2}{6}$
	$I_t = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{36}$ $\alpha = \text{viz tab. 3.1}$	$W_t = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{bh^2}{6}$
	$I_t = \frac{1}{12} [4a^4 - 4a^2 b^2 + b^4]$ $I_y = \frac{1}{12} [4a^4 - 4a^2 b^2 + b^4]$	$W_t = 0,188a^3$ $W_y = 0,188a^3$
	$I_t = \frac{1}{12} \sum a_i^4$	$W_t = \frac{I_t}{r_{min}}$
	$I_t = \frac{1}{12} \sum a_i^4$	$W_t = 20,4A r_{min}$

10/09/22 Výpočet smyčkového napětí a přetožení krouceného prvku 29

29

Dimenzování krouceného prvku podle MSÚ

Návrh nosné konstrukce

↓

Posouzení

↓


Realizace

$T_{Ed}, W_t, \min, f_d(\tau_{max})$

Dimenzování

$T_{Ed} \leq T_{Rd} = W_t \cdot f_d$

$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1$



10/09/22 Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku 30

30

Dimenzování krouceného prvku

Podmínka spolehlivosti pro mezní stav únosnosti (na úrovni vnitřních sil):

$$T_{Ed} \leq T_{Rd} \quad \frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1 \quad T_{Rd} = f_d \cdot W_t = \frac{f_y}{\sqrt{3}} \cdot W_t$$

Indexy: E_d ... návrhové hodnoty účinků zatížení, R_d ... návrhové hodnoty odolnosti konstrukce

Ocel: $f_d = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$... napětí na mezi kluzu ve smyku [MPa]

Podmínka spolehlivosti pro mezní stav použitelnosti (na úrovni úhlových deformací):

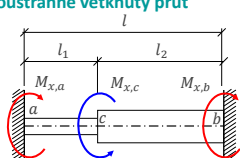
$$\varphi_{max} \leq \varphi_{lim} \quad (\text{od charakteristických hodnot zatížení})$$

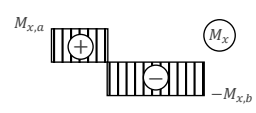
10/09/22 Vypočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku 31

31

Statically neurčitá úloha krouceného prvku

Oboustranně vetknutý prut **Předpoklad:** Pružné chování materiálu





Neznámé v úloze: $M_{x,a}(M_{x,1}), M_{x,b}(M_{x,2})$

Podmínka rovnováhy: $\sum M_{x,i} = 0: -M_{x,a} - M_{x,b} + M_{x,c} = 0$

Deformační podmínka: $\sum \varphi_i = 0: \sum_{i=1}^2 M_{x,i} \cdot l_i = 0$

10/09/22 Řešení staticky neurčité úlohy krouceného prvku 32

32