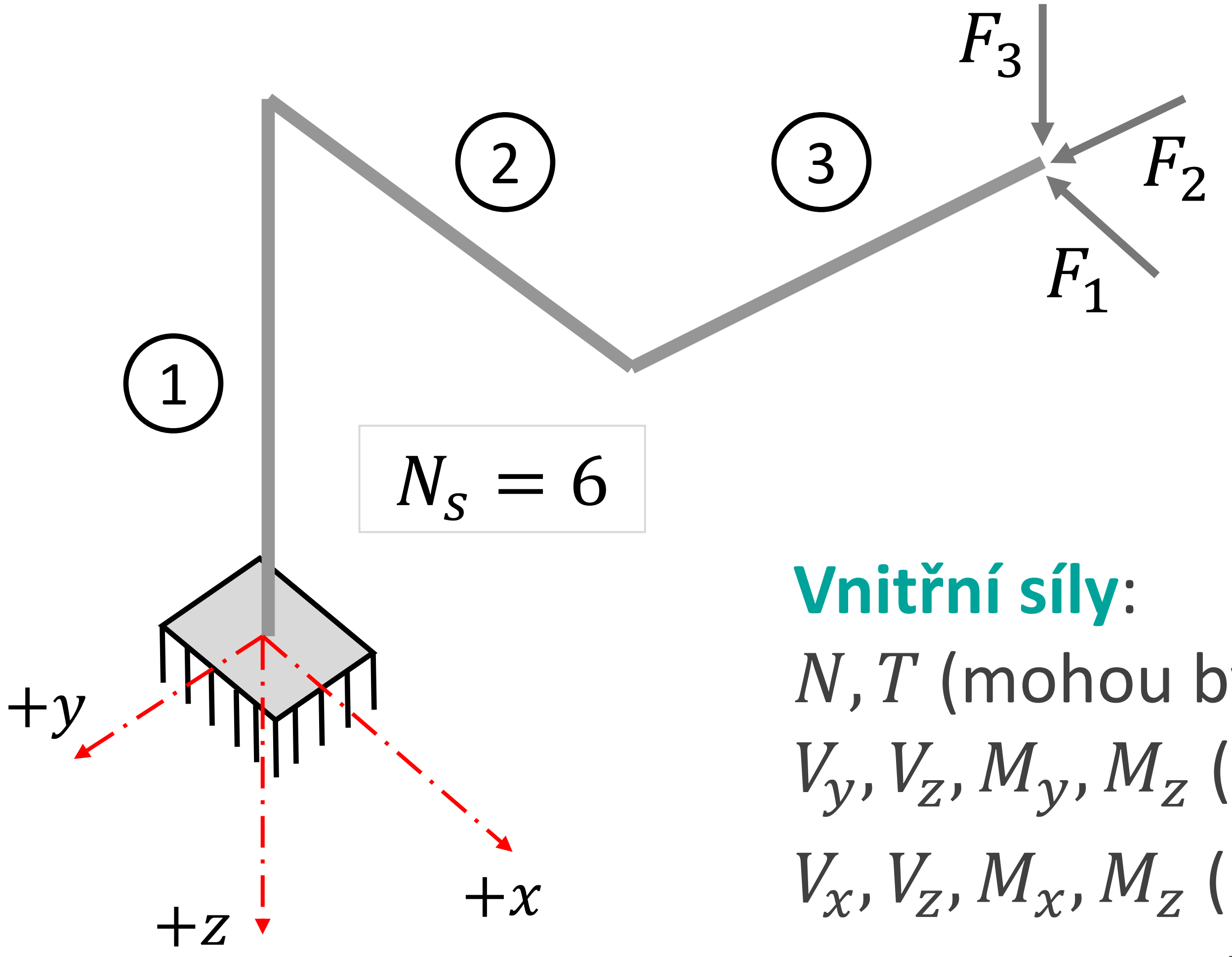
Téma 7:
Kroucení

- Základní vztahy a předpoklady řešení
- Výpočet smykového napětí a přetvoření krouceného prvku s rotačně symetrickým, obecným a tenkostěnným průřezem
- Řešení staticky neurčité úlohy krouceného prvku

Kroucení, kroutící moment



Kroutící moment $T = M_x \neq 0$

Např. **prostorově lomený nosník**

Vnitřní síly:

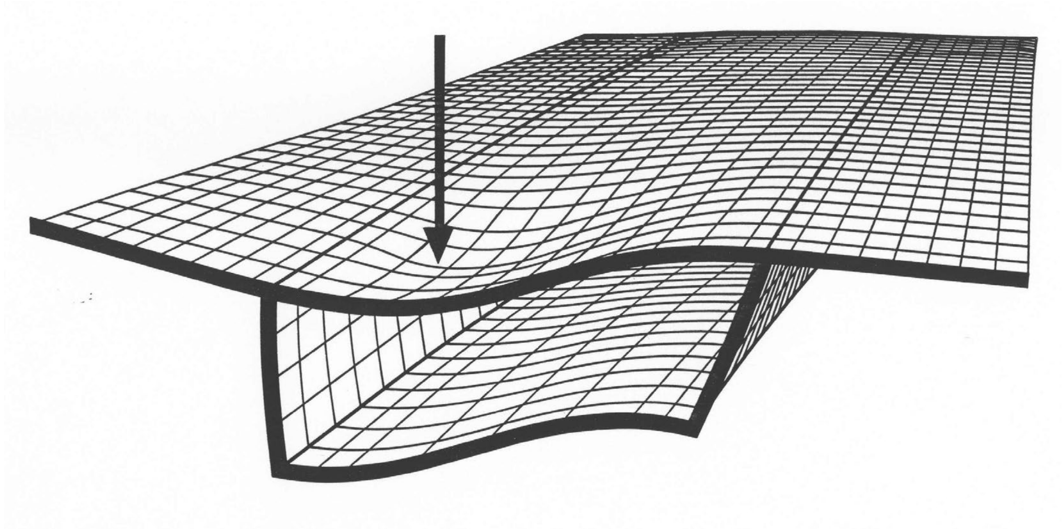
N, T (mohou být $\neq 0$ v každém prutu),

V_y, V_z, M_y, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech ∥ s osou x)

V_x, V_z, M_x, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech ∥ s osou y)

V_x, V_y, M_x, M_y (mohou být $\neq 0$ v prutech ∥ s osou z)

Kroucení, prvky namáhané kroucením

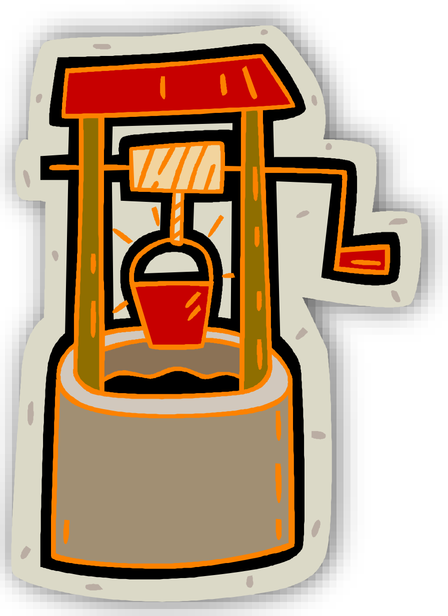


Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – průřez mostní konstrukce

Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – dřevěný rumpál

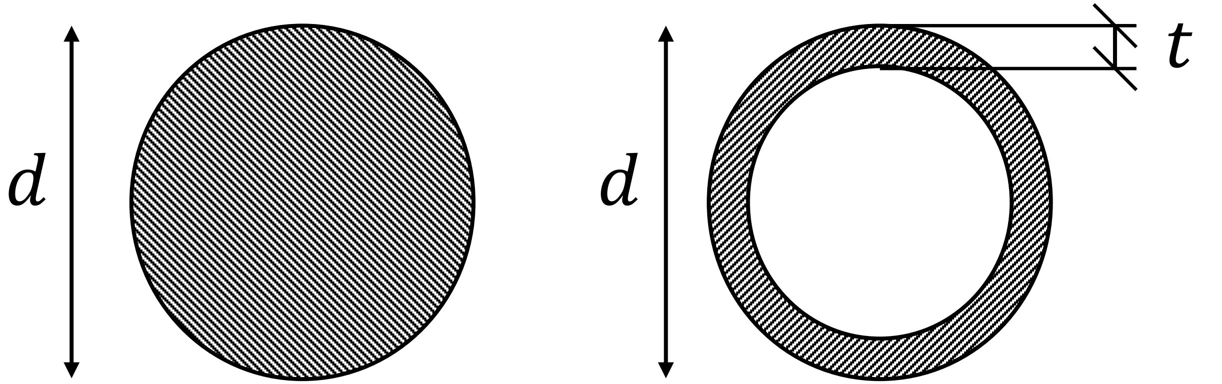
Kroucení prosté

Jediná nenulová složka vnitřních sil v libovolném průřezu prutu je **kroutící moment** $T = M_x \neq 0.$

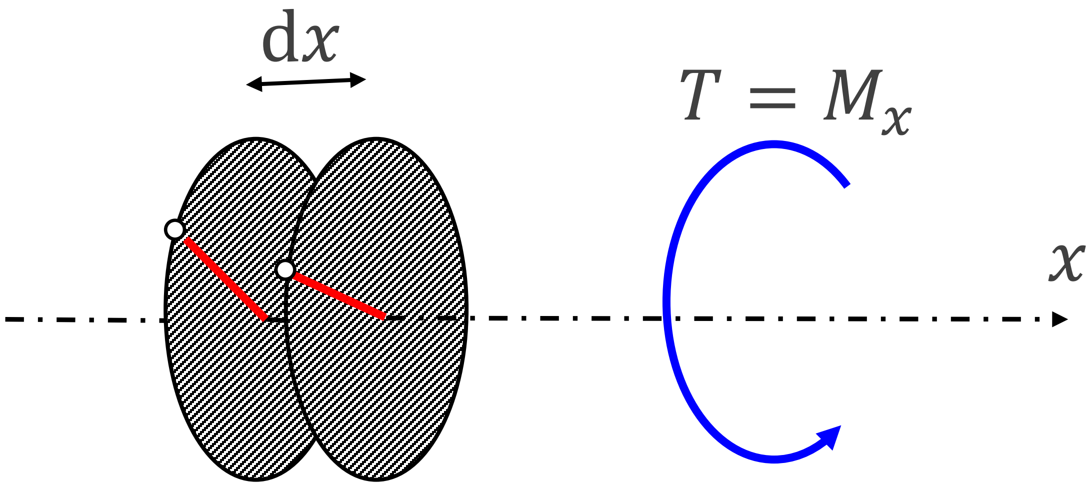


$$N = 0 \qquad V_y = V_z = 0 \qquad M_y = M_z = 0$$

Nejjednodušší řešení lze získat u prutů s rotačně symetrickým průřezem – **kruhový průřez** a **mezikruží**.



Předpoklady řešení



a) osa prutu zůstane i po deformaci **přímá**

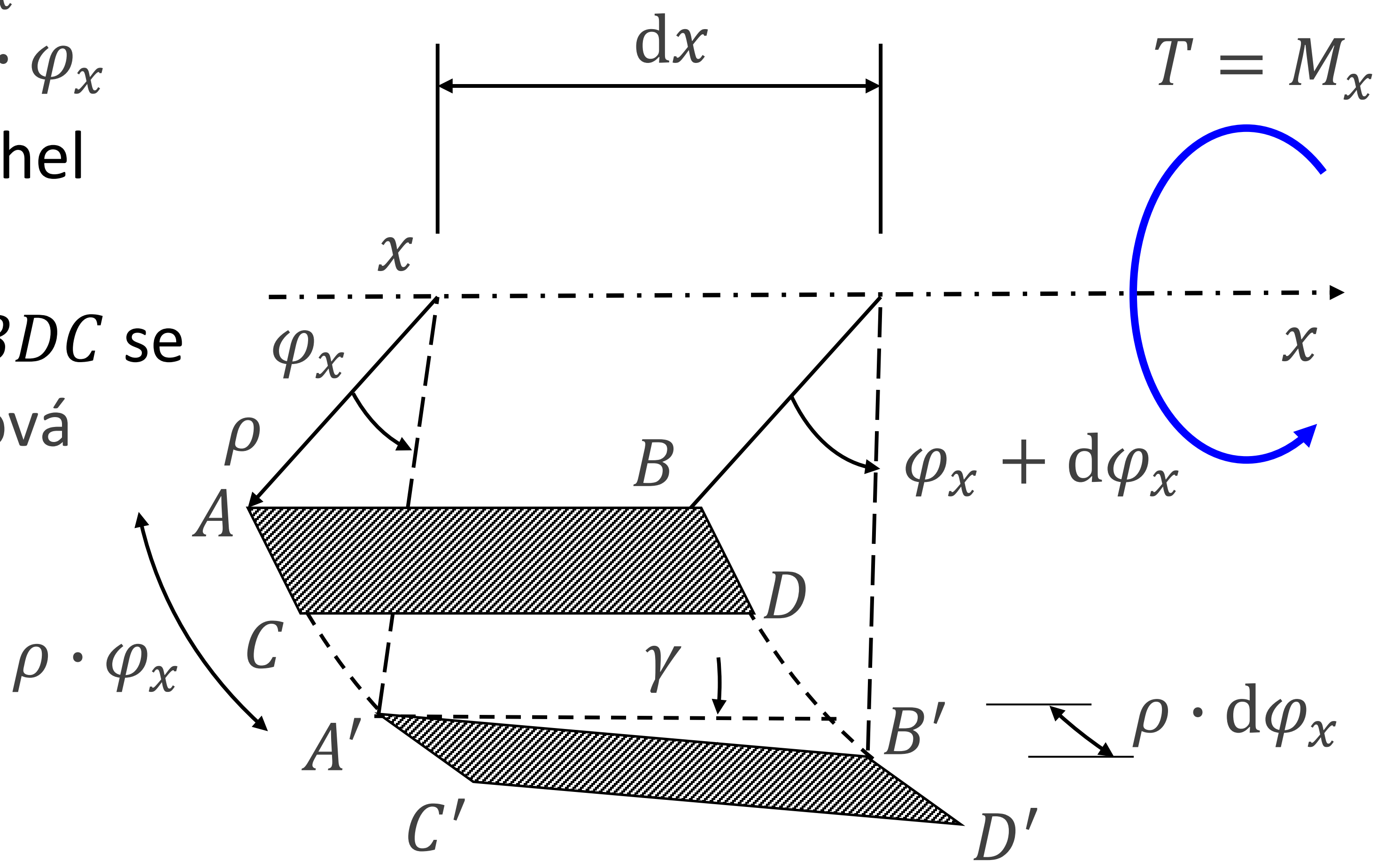
b) průřezy zůstávají **rovinnými** i po deformaci a vzájemně se nevzdálí

c) jednotlivé průřezy se otáčejí jako **tuhé celky** (průvodiče se nezkřiví)

$$\sigma_x = 0 \rightarrow \varepsilon_x = 0$$

Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

- Průřez x se pootočí o úhel φ_x $(A \rightarrow A')$, $\tan \varphi_x \approx \varphi_x \Rightarrow \rho \cdot \varphi_x$
- Průřez $x + \mathrm{d}x$ se pootočí o úhel $\varphi_x + \mathrm{d}\varphi_x$ $(B \rightarrow B')$
- Původně pravoúhlý prvek $ABDC$ se zkosí o úhel γ (poměrná úhlová deformace):



$$\boxed{\gamma = \frac{\rho \cdot \mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x} = \rho \cdot \theta}$$

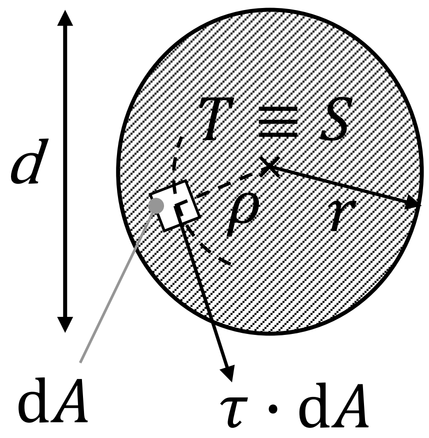
$$\theta = \frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x}$$

θ ... poměrný úhel zkosení $[\mathrm{m}^{-1}]$

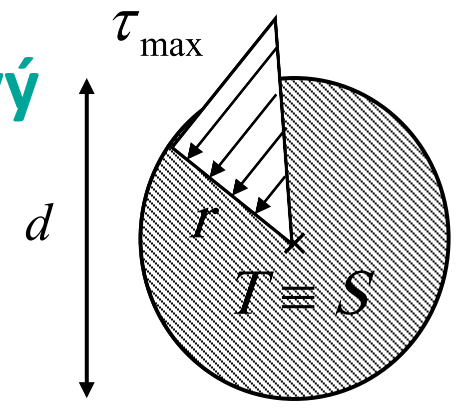
Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

$\rho \in \langle 0; r \rangle$

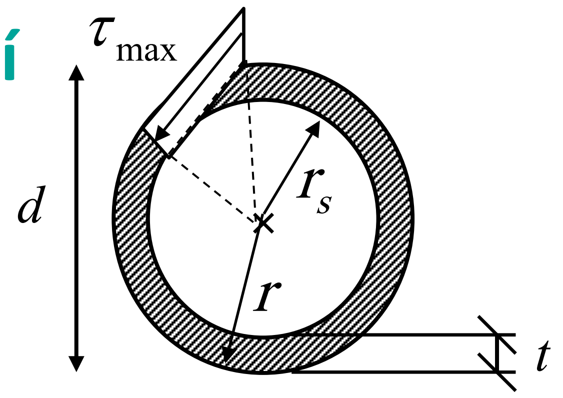
$$\boxed{\gamma = \rho \cdot \theta}$$



Kruhový průřez



Mezikruží



$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \theta$ ... podle Hookova zákona ve smyku

$$T = M_x = \int_A \rho \cdot \tau \, \mathrm{d}A = \int_A \rho \cdot (G \cdot \rho \cdot \theta) \, \mathrm{d}A = G \cdot \theta \cdot \int_A \rho^2 \, \mathrm{d}A = G \cdot \theta \cdot I_p$$

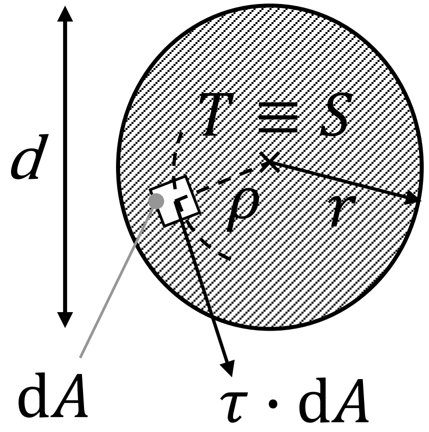
$$I_p = I_t = \frac{\pi . r^4}{2} = \frac{\pi . d^4}{32}$$

I_p ... polární moment setrvačnosti (u rotačně symetrických průřezů),

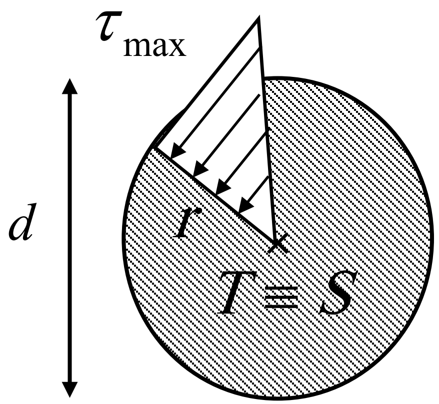
I_t ... moment tuhosti v kroucení

$$I_p = I_t = \frac{\pi}{2} \cdot (r^4 - r_s^4) = \frac{\pi}{32} \cdot (d^4 - d_s^4)$$

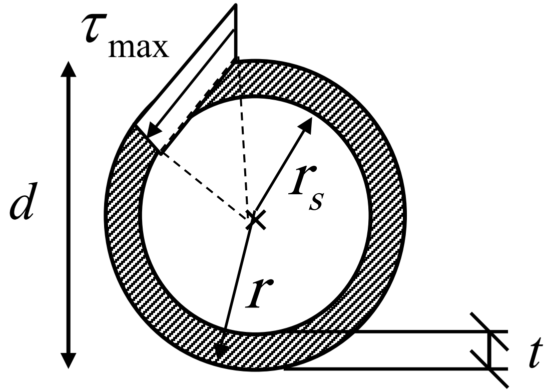
Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem



Kruhový průřez



Mezikruží



$$\boxed{\tau = G \cdot \rho \cdot \theta}$$

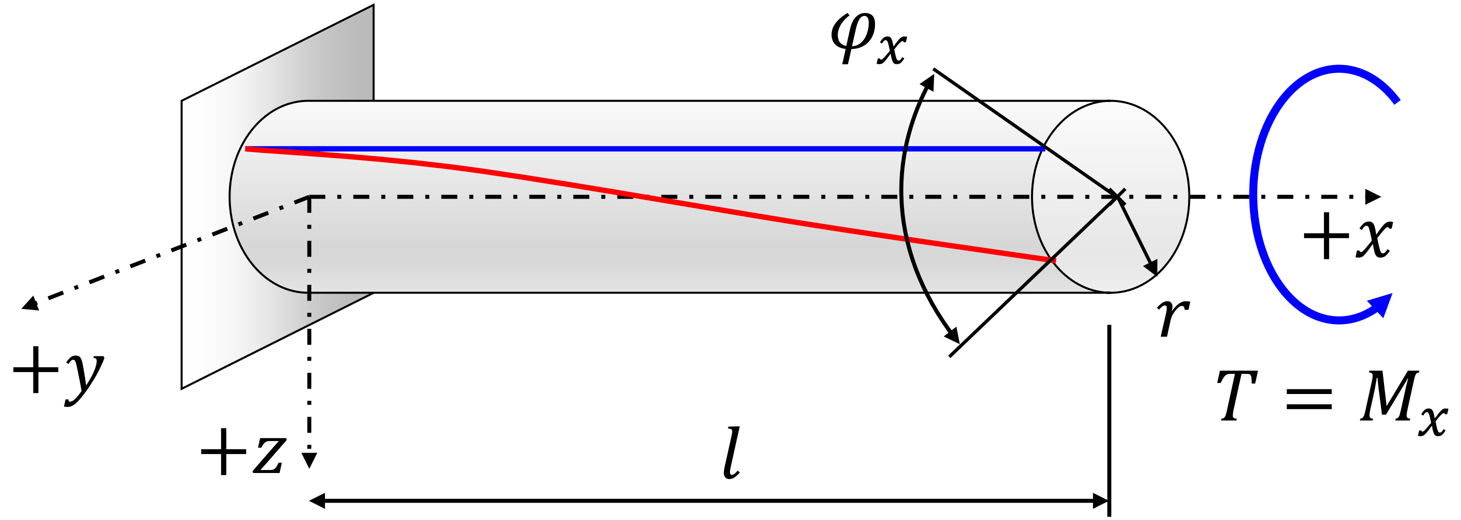
$$\boxed{T = M_x = G \cdot \theta \cdot I_p} \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau(\rho) = \frac{M_x \cdot \rho}{I_{p,t}}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_x \cdot r}{I_{p,t}}$$

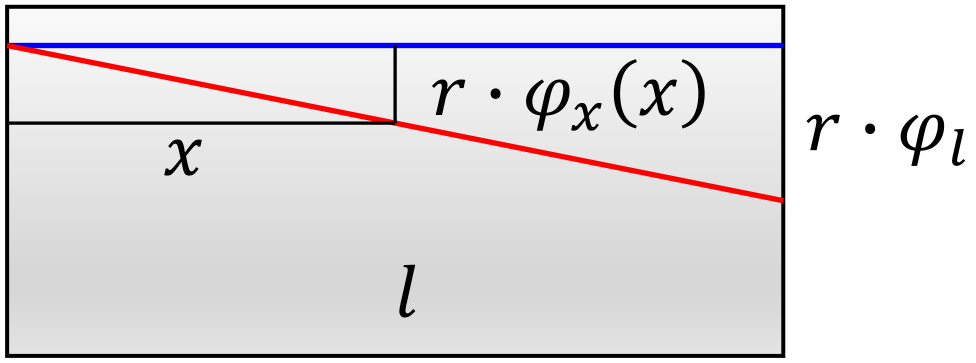
… maximální smykové napětí (po obvodu) [MPa]

Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

Deformace prutu kruhového průřezu φ_x [rad]:



Rozvinutý plášť válce:



$$\varphi_x(x) = \int \theta(x)\,\mathrm{d}x + C = \int \frac{M_x}{G \cdot I_{p,t}}\,\mathrm{d}x + C$$

Okrajová podmínka:

$$\boxed{\varphi_x(x = 0) = 0}$$

Pro $I_p = \text{konst.}$ a $T = M_x = \text{konst.}$:

$$\varphi_x(x) = \int \frac{T}{G \cdot I_{p,t}}\,\mathrm{d}x = \frac{T}{G \cdot I_{p,t}} \cdot \int \mathrm{d}x = \frac{T \cdot x}{G \cdot I_{p,t}}$$

$$\varphi_{x,\max} = \varphi_{(x=l)} = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_{p,t}}$$

Kroucení prutů obecného průřezu

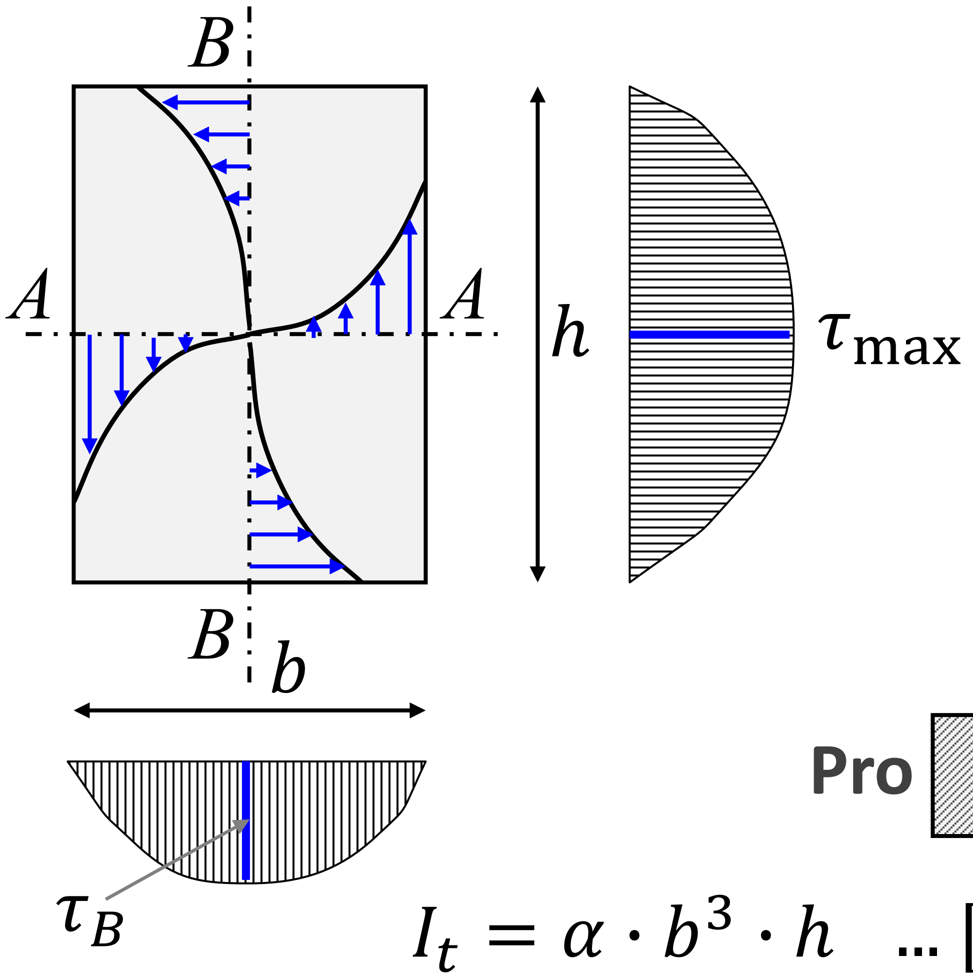
Při **kroucení prutů obecného průřezu** dochází k tzv. **deplanaci** (porušení rovinnosti průřezu). Pokud není deplanaci bráněno, vzniká **volné kroucení** ($\sigma_x = 0$) jinak **kroucení vázané**.

U prutů obecného průřezu vzniká kroucení k ose, jež je spojnicí středů smyků, které nemusí být shodné s těžištěm. U masivních průřezů není tento rozdíl významný, respektuje se u tenkostěnných průřezů.

Předpoklady řešení:

- příčný tvar průřezů se nemění, každý průřez se pootáčí kolem osy prutu jako tuhý celek,
- $\sigma_x = 0$, vzniká však deplanace, jež je shodná ve všech řezech.

Kroucení prutů obecného průřezu

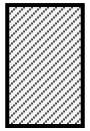


$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t}$$

W_t ... **průřezový modul v kroucení** $[\mathrm{m}^3]$

$\tau_{\max}$ vzniká **ve středu delší strany** obdélníka

α, β ... bezrozměrné součinitele [-]

Pro  **:**

h/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,141	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3	5	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	0,333
β	0,240	0,243	0,246	0,258	0,267	0,292	0,312	0,333

$$I_t = \alpha \cdot b^3 \cdot h \quad \text{...} \ [\mathrm{m}^4]$$

$$W_t = \beta \cdot b^2 \cdot h \ \text{...} \ [\mathrm{m}^3]$$

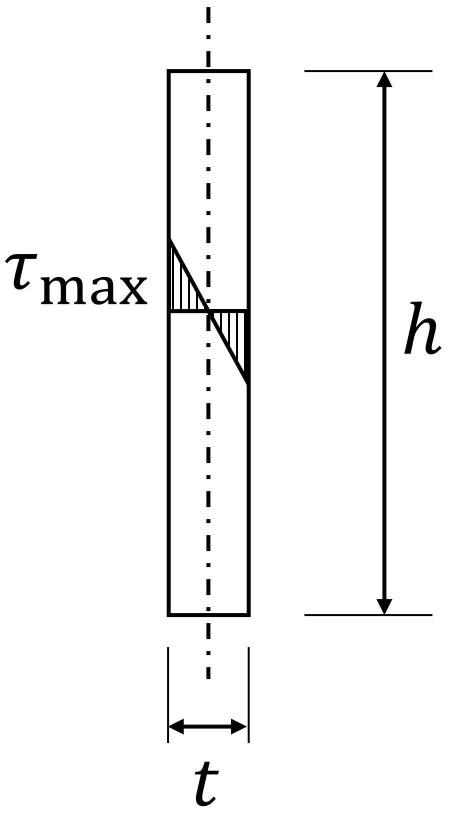
Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

Často nelze zanedbat vliv vázaného kroucení

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot h$$

$$W_t = \frac{1}{3} \cdot t^2 \cdot h = \frac{I_t}{t}$$

$t \ll h$



Složené průřezy

$$I_t = \eta \cdot \sum_{i=1}^{n} I_{t,i} = \frac{\eta}{3} \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^3 \cdot h_i$$

η … **korekční součinitel**, určený empiricky

$\tau_{\max}$ … vzniká v části s největší tloušťkou:

$$W_{t,\min} = \frac{I_t}{t_{\max}}$$

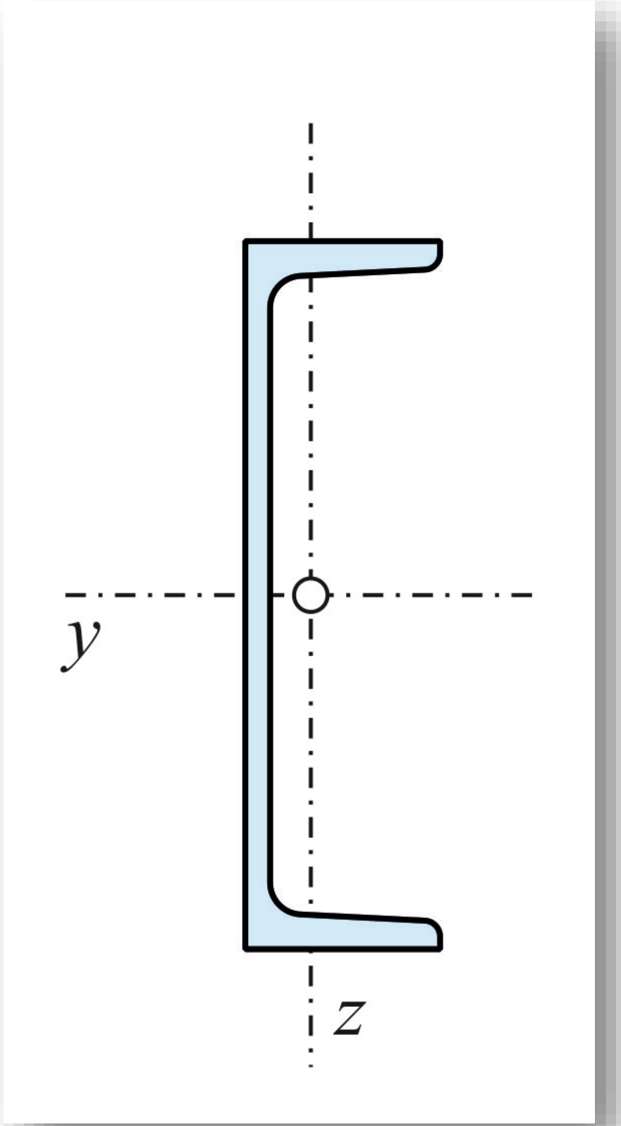
Průřez ocelového nosníku	η
Úhelník	1,00
Válcovaný I profil	1,20
Válcovaný U profil	1,12
Svařovaný I profil s výztuhami	1,50
Svařovaný T profil s výztuhami	1,40
Nýtovaný I profil	0,50

Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

Zadání: $l = 3{,}2\ \mathrm{m}$

$M_{x,d} = 0{,}6\ \mathrm{kNm}$

Válcovaný profil **UPN160**



Z tabulek válcovaných profilů – pro profil **UPN160**

$I_t = 73{,}9 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^4 \qquad t_f = t_{\max} = 10{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$

$$W_t = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{73{,}9 \cdot 10^{-9}}{0{,}0105} = 7{,}0381 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x,d}}{W_t} = \frac{0{,}6 \cdot 10^3}{7{,}0381 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 85{,}250\ \mathrm{MPa}$$

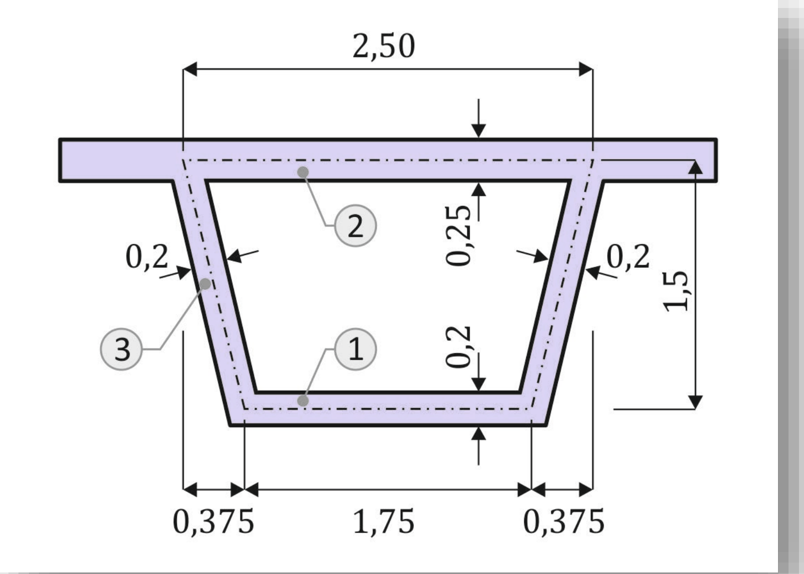
Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

Předpoklad: Při malé tloušťce je $\tau = \text{konst.}$

Smykový tok: Výslednice smykových napětí v řezu napříč tloušťkou průřezu.

$\tau_{\max}$ vzniká v nejužším místě průřezu.

$$W_t = 2 \cdot A_k \cdot t_{\min}$$



A_k ... plocha ohraničená střednicí průřezu $[\mathrm{m}^2]$

$t_{\min}$ ... nejužší místo průřezu $[\mathrm{m}]$

Tuhost v kroucení:

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\oint_s \frac{\mathrm{d}s}{t_{(s)}}}$$

... křivkový integrál, vztahující se na celou délku střednice průřezu

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{t_i}}$$

... pro průřezy po částech konstantní

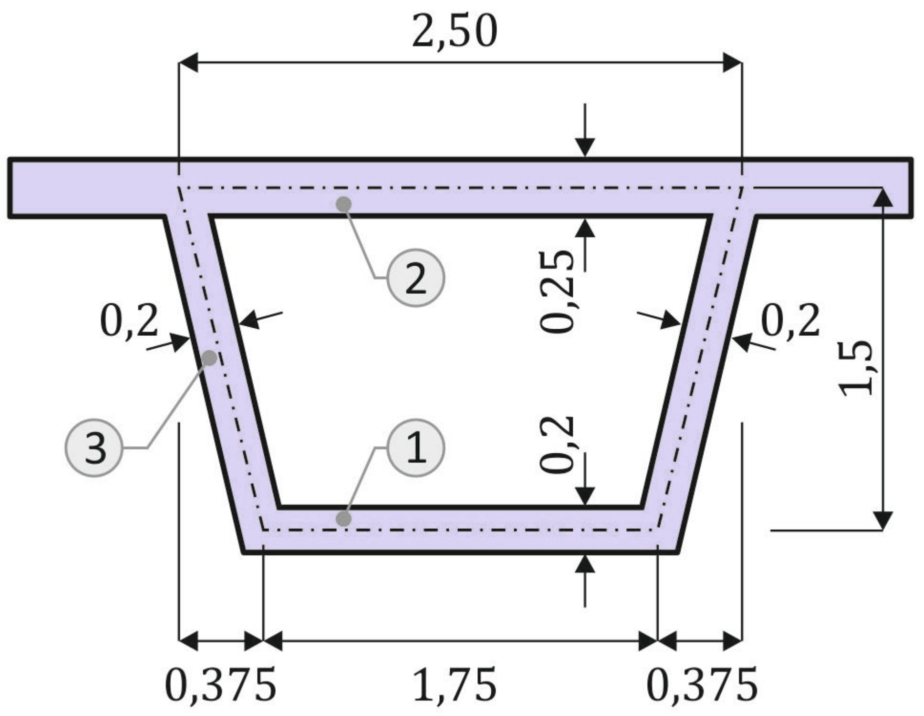
Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

Zadání: $W_t = ?\quad I_t = ?$

1 $\quad A_1 = 1{,}75 \cdot 0{,}2$

2 $\quad A_2 = 2{,}50 \cdot 0{,}25$

3 $\quad A_3 = 1{,}546 \cdot 0{,}2$



Plocha omezená střednicí:

$$A_k = 1{,}5 \cdot \left(\frac{2{,}5 + 1{,}75}{2}\right) = 3{,}1875\ \mathrm{m}^2$$

$$W_t = 2 \cdot A_k \cdot t_{\min} = 1{,}275\ \mathrm{m}^3$$

$$I_k = \frac{4 \cdot A_k^2}{\sum_{i=1}^{4} \frac{h_i}{t_i}} = \frac{40{,}64063}{34{,}21165} = 1{,}187918\ \mathrm{m}^4$$

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava

Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava

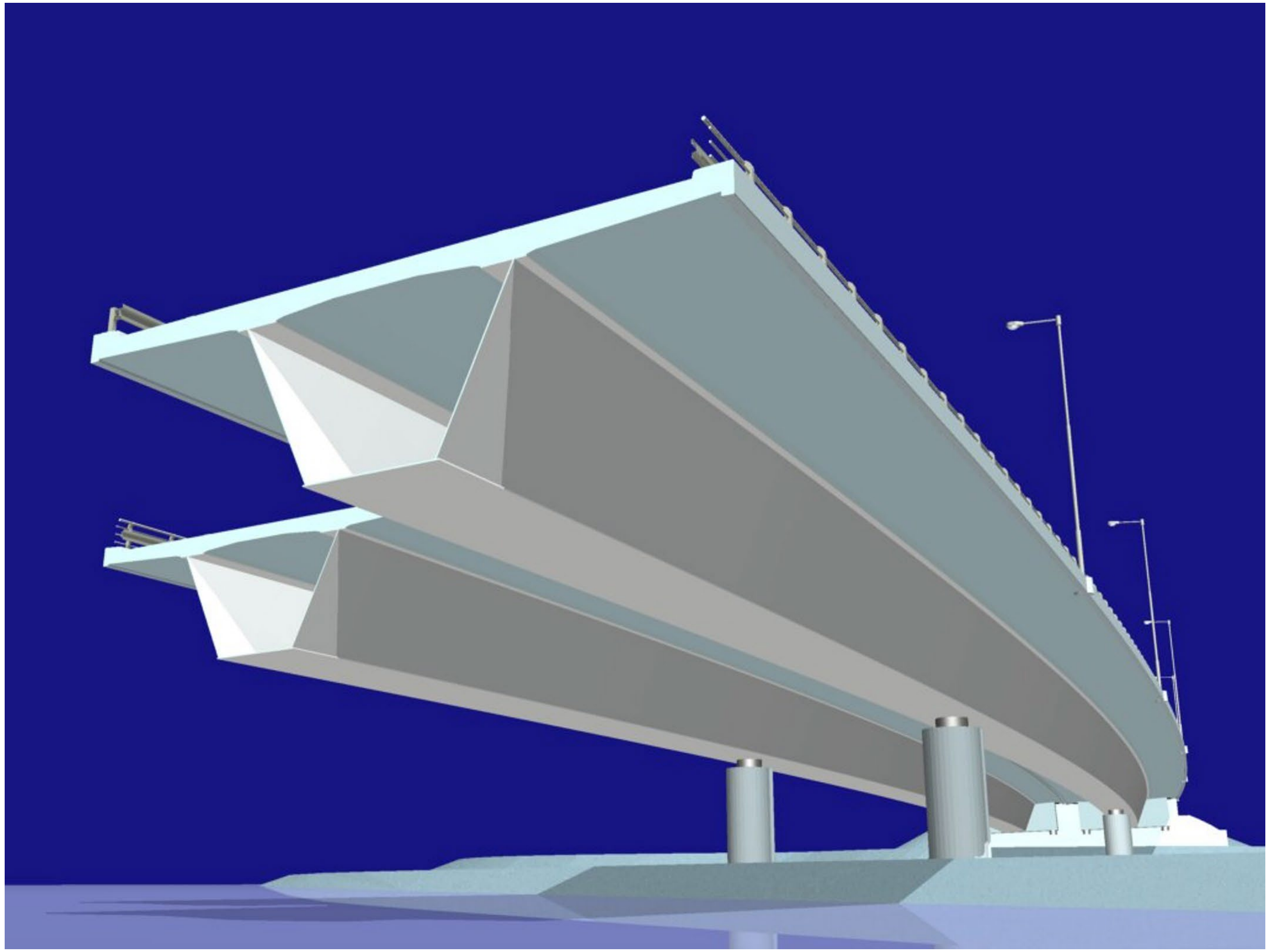
Mimoúrovňové křížení dálnice D1, Rudná, Ostrava

Dálniční most přes Odru, Ostrava

foto: SHP Brno

Dálniční most přes Odru, Ostrava

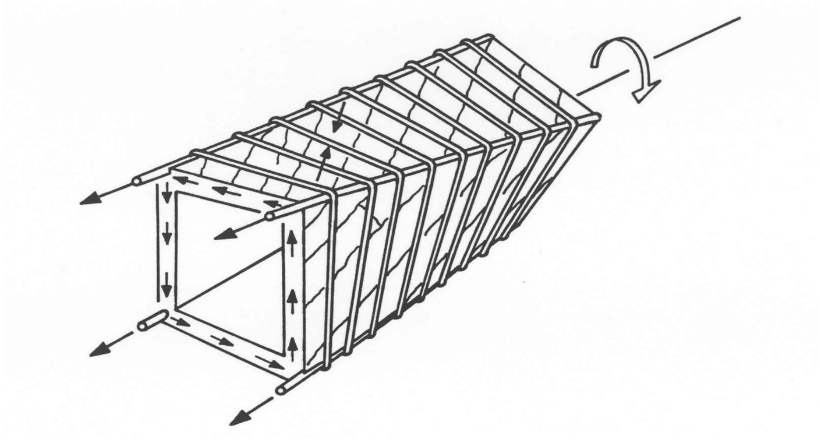
zdroj: SHP Brno

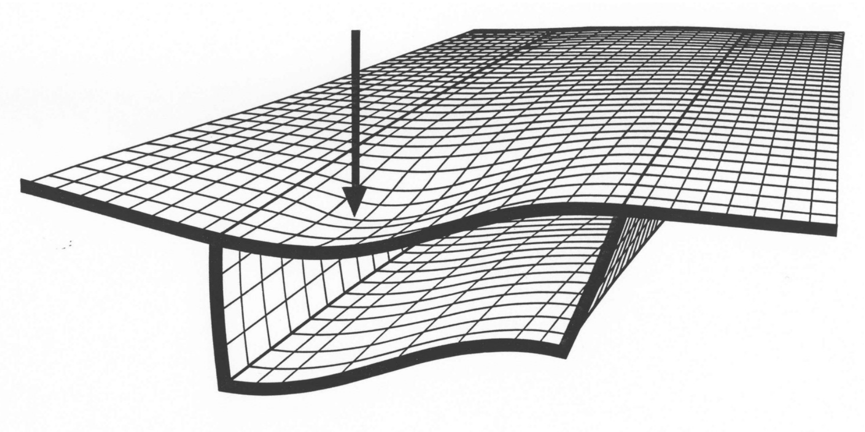


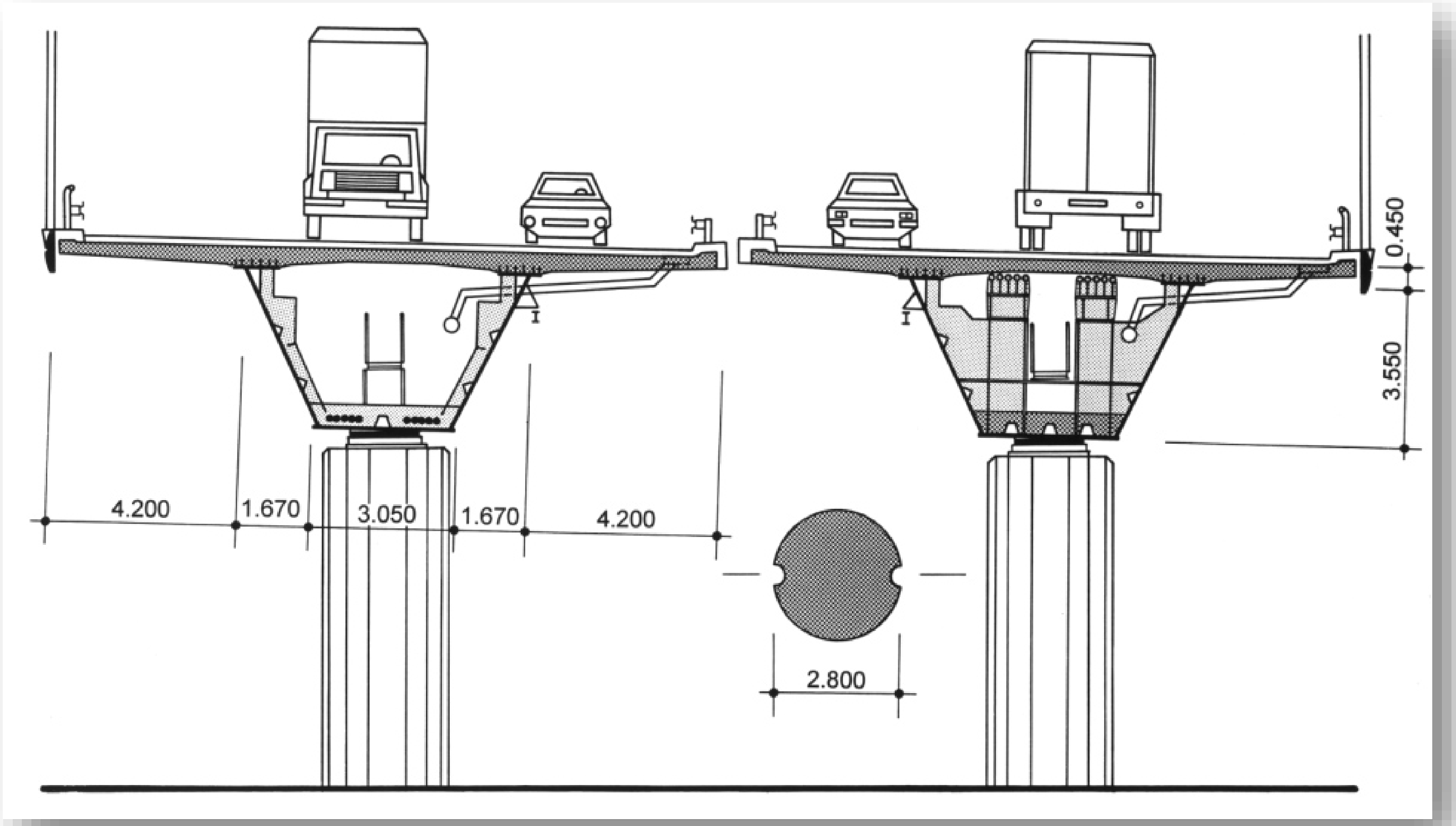
Každý směr dálnice D1 je převáděn po samostatné nosné konstrukci výšky 4 m. Rozpětí hlavního pole 99,5 m, resp. 102,5 m.

Dálniční most přes Odru, Ostrava

zdroj: SHP Brno







Účinky kroucení jsou přenášeny krajními opěrami - konstrukce je v kroucení vetknuta ve vzdálenosti 402 m (rozpětí mostu).

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava

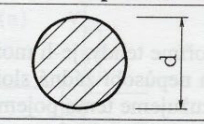
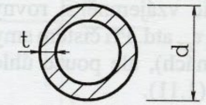
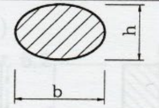
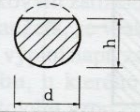
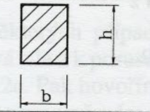
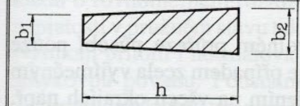
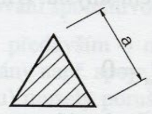
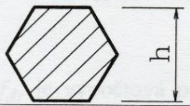
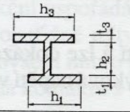
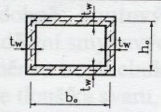
Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava

Silniční ocelový most přes řeku Odru, Rudná, Ostrava

Průřezové charakteristiky vybraných rovinných obrazců

Tabulky průřezových charakteristik I_t a W_t pro vybrané rovinné obrazce

Tvar průřezu	I_t	W_t
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32}\left[d^4 - (d-2t)^4\right]$	$W_t = \frac{2I_t}{d}$
	$I_t = \frac{\pi b^3 h^3}{16(b^2 + h^2)}$	$W_t = \frac{\pi b h^2}{16}$ $b > h$
	$I_t \approx \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$	$W_t \approx \frac{d^3(2{,}6h - d)}{8(0{,}3h + 0{,}7d)}$
	$I_t = \alpha b^3 h$ α - viz tab. 3.1	$W_t = \beta b^2 h$ β - tab. 3.1
	$I_t \approx \frac{1}{12} h(b_1 - b_2)(b_1^2 + b_2^2) - -0{,}105(b_1^4 + b_2^4)$	$W_t \approx \frac{I_t}{b_1}$
	$I_t = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$ (rovnostranný trojúhelník)	$W_t = \frac{a^3}{20}$
	$I_t \approx 0{,}115 h^4$ (pravidelný šestiúhelník)	$W_t \approx 0{,}188 h^3$
	$I_t \approx \frac{1}{3}\sum_1^3 t_i^3 h_i$	$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$
	$I_t = \frac{2 t_w t_f b_0^2 h_0^2}{t_f b_0 + t_w h_0}$	$W_t = 2 b_0 h_0 t_{min}$

Dimenzování krouceného prvku podle MSÚ

Návrh nosné konstrukce

Zvýšit T_{Rd}

Posouzení

Realizace

$$T_{Ed}, W_{t,\min}, f_d(\tau_{\max})$$

Dimenzování

$$T_{Ed} \leq T_{Rd} = W_t \cdot f_d$$

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1$$

Dimenzování krouceného prvku

Podmínka spolehlivosti pro **mezní stav únosnosti** (na úrovni vnitřních sil):

$$T_{Ed} \leq T_{Rd} \qquad \frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leq 1 \qquad T_{Rd} = f_d \cdot W_t = \frac{f_y}{\sqrt{3}} \cdot W_t$$

Indexy: Ed ... návrhové hodnoty účinků zatížení, Rd ... návrhové hodnoty odolnosti konstrukce

Ocel: $$f_d = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$ ... napětí na mezi kluzu ve smyku $[\mathrm{MPa}]$

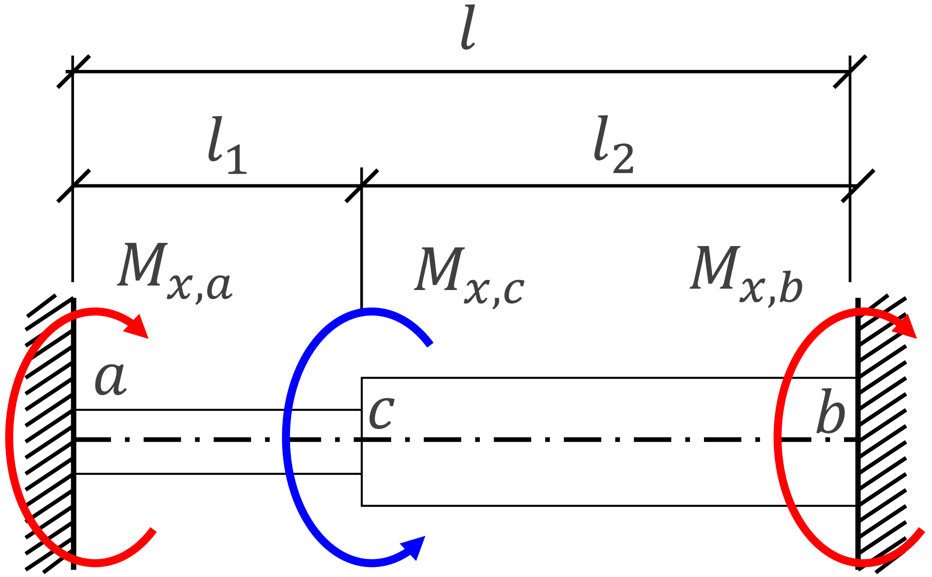
Podmínka spolehlivosti pro **mezní stav použitelnosti** (na úrovni úhlových deformací):

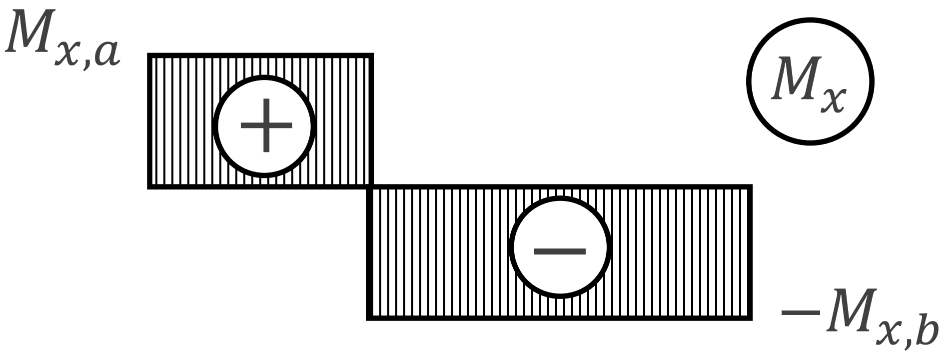
$$\varphi_{\max} \leq \varphi_{\lim}$$ (od charakteristických hodnot zatížení)

Staticky neurčitá úloha krouceného prvku

Oboustranně vetknutý prut

Předpoklad: Pružné chování materiálu





Neznámé v úloze: $M_{x,a}(M_{x,1}), M_{x,b}(M_{x,2})$

Podmínka rovnováhy: $\boxed{\sum M_{x,i} = 0:}$ $\quad -M_{x,a} - M_{x,b} + M_{x,c} = 0$

Deformační podmínka: $\boxed{\sum \varphi_i = 0:}$ $\quad \sum_{i=1}^{2} \frac{M_{x,i} \cdot l_i}{G_i \cdot I_{t,i}} = 0$