# Téma 6:
# **Osové namáhání**

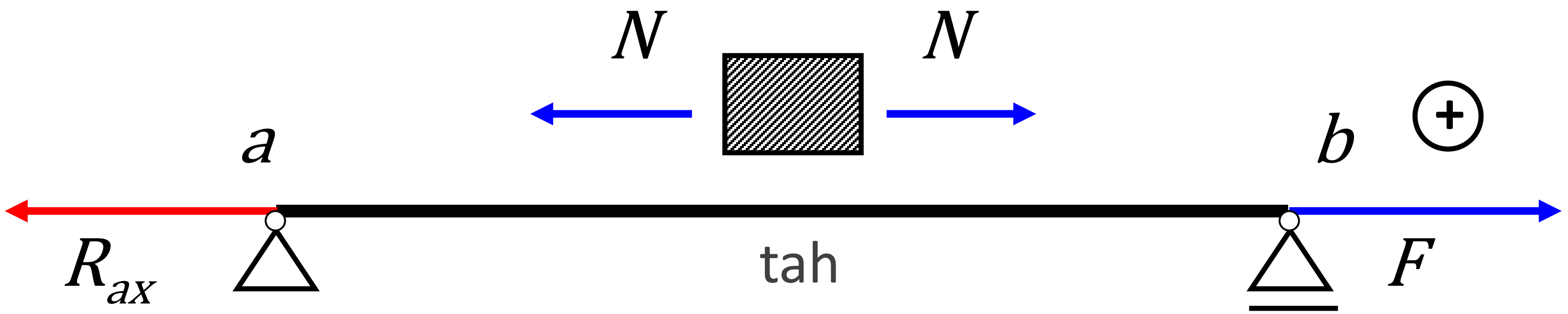
- Základní vztahy a předpoklady řešení
- Výpočet normálového napětí a přetvoření osově namáhaného prutu
- Řešení staticky neurčitých osově namáhaných konstrukcí v pružném oboru
- Řešení staticky neurčité osově namáhané soustavy v pružno-plastickém oboru

# Osové namáhání

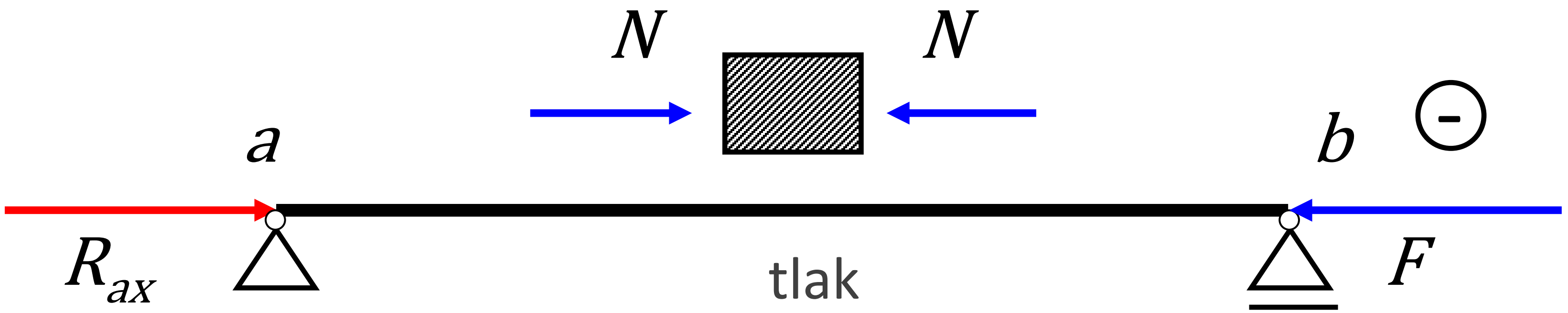
**Osové namáhání** (osový-prostý tah nebo tlak): Jedinou nenulovou složkou vnitřních sil v libovolném průřezu prutu je **normálová síla** $N$.

$\boxed{N \neq 0}$ $\boxed{T = 0}$ $\boxed{V_y = V_z = 0}$ $\boxed{M_y = M_z = 0}$

$N > 0$ … **tah**

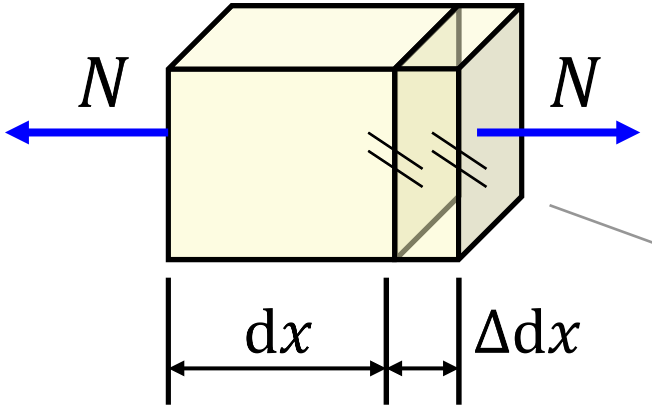


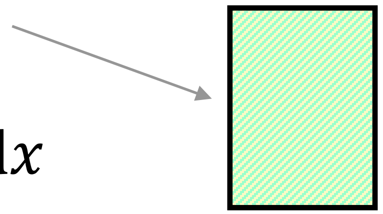

$N < 0$ … **tlak**



# Předpoklady řešení

**a)** průřezy zůstávají **rovinnými** a **kolmými k ose** i po deformaci (Bernoulliova hypotéza)



před i po deformaci

Předpoklad má povahu deformačně – geometrickou. Příčné průřezy se nezkřiví a zůstanou vzájemně rovnoběžné.

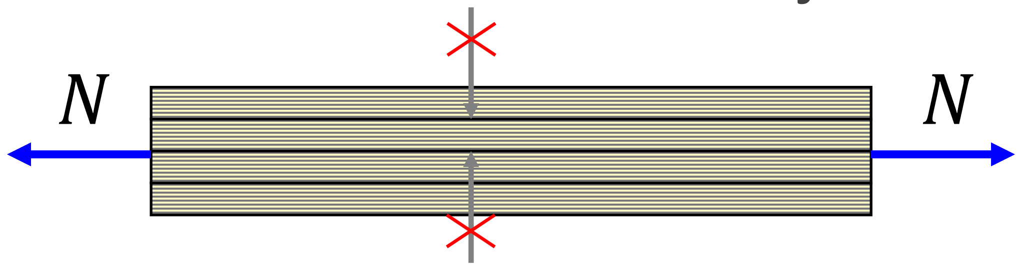
**Daniel Bernoulli**
(1700 - 1782)

**Důsledek**:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_x = \text{konst.} \ldots \text{pro } x = \text{konst.}$$

**b)** podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí




$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

# Jednoosá napjatost

Ze 6 složek napětí je pouze 1 nenulová

**Tenzor napětí**:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \neq 0 & \tau_{xy} = 0 & \tau_{xz} = 0 \\ & \sigma_y = 0 & \tau_{yz} = 0 \\ \text{sym.} & & \sigma_z = 0 \end{bmatrix}$$

**Vektor napětí**:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \neq 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

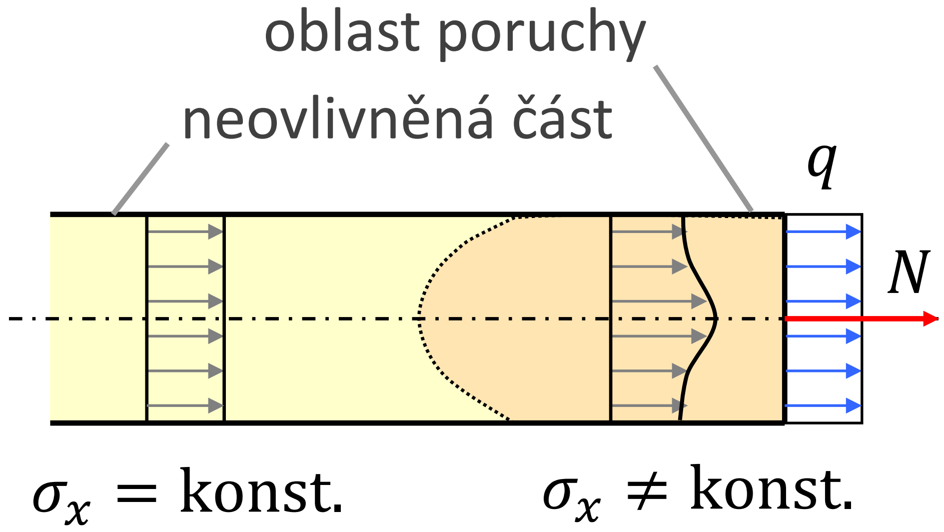
Výpočet **normálového napětí**:

$$N = \int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A = \sigma_x \int_A \mathrm{d}A = \sigma_x \cdot A \rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A}$$

# Omezená platnost předpokladů řešení

a) **Soustředěné zatížení na koncích prutu**:
V okolí konce prutu nastanou poruchy stavu napjatosti. Ze Saint-Venantova principu lokálnosti vyplývá, že tato oblast je omezená.

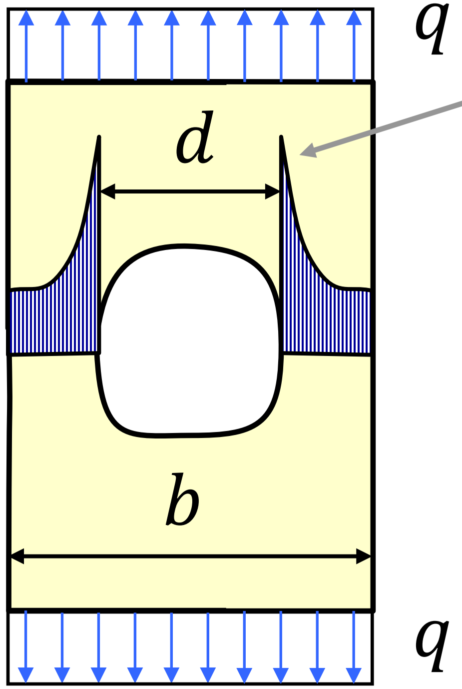
## Saint - Venantův princip lokálního účinku



# Omezená platnost předpokladů řešení

**b)** **Náhlá změna průřezu**: Pro pruty s povlovnou změnou průřezu platí odvozené předpoklady. Náhlé průřezové změny, vyvolané otvorem, vruby či zúžením způsobí neplatnost předpokladu.

**1)**



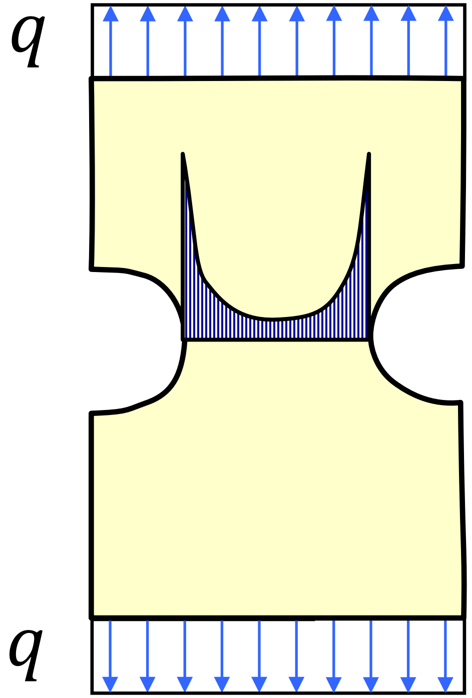

$$\sigma_{x,\max} = k \cdot \frac{N}{A_{net}}$$

$A_{net}$ … průřezová plocha v místě oslabení

$k$ … součinitel koncentrace napětí, závisí na geometrii prvku:

| | | |
|---|---|---|
| $d/b$ | 0,1 | 2,72 |
| $k$ | 0,6 | 2,11 |

**2)**



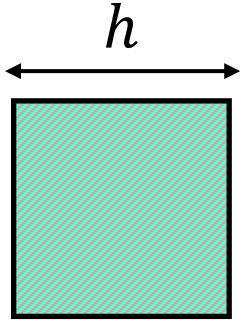
# Přetvoření osově namáhaného prutu

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \mathrm{d}x = \int_0^l \varepsilon_x \,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} \,\mathrm{d}x = \frac{N}{E \cdot A} \int_0^l \mathrm{d}x = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$N = \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l = k \cdot \Delta l$ z Hookova zákona $k = \frac{EA}{l}$ … tuhost prutu stálého průřezu v tahu/tlaku

## Příčné deformace

$$\Delta h = h \cdot \varepsilon_Z = h \cdot (-\nu \cdot \varepsilon_x) = h \cdot \left(-\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}\right) = -\nu \cdot \frac{N \cdot h}{E \cdot A}$$

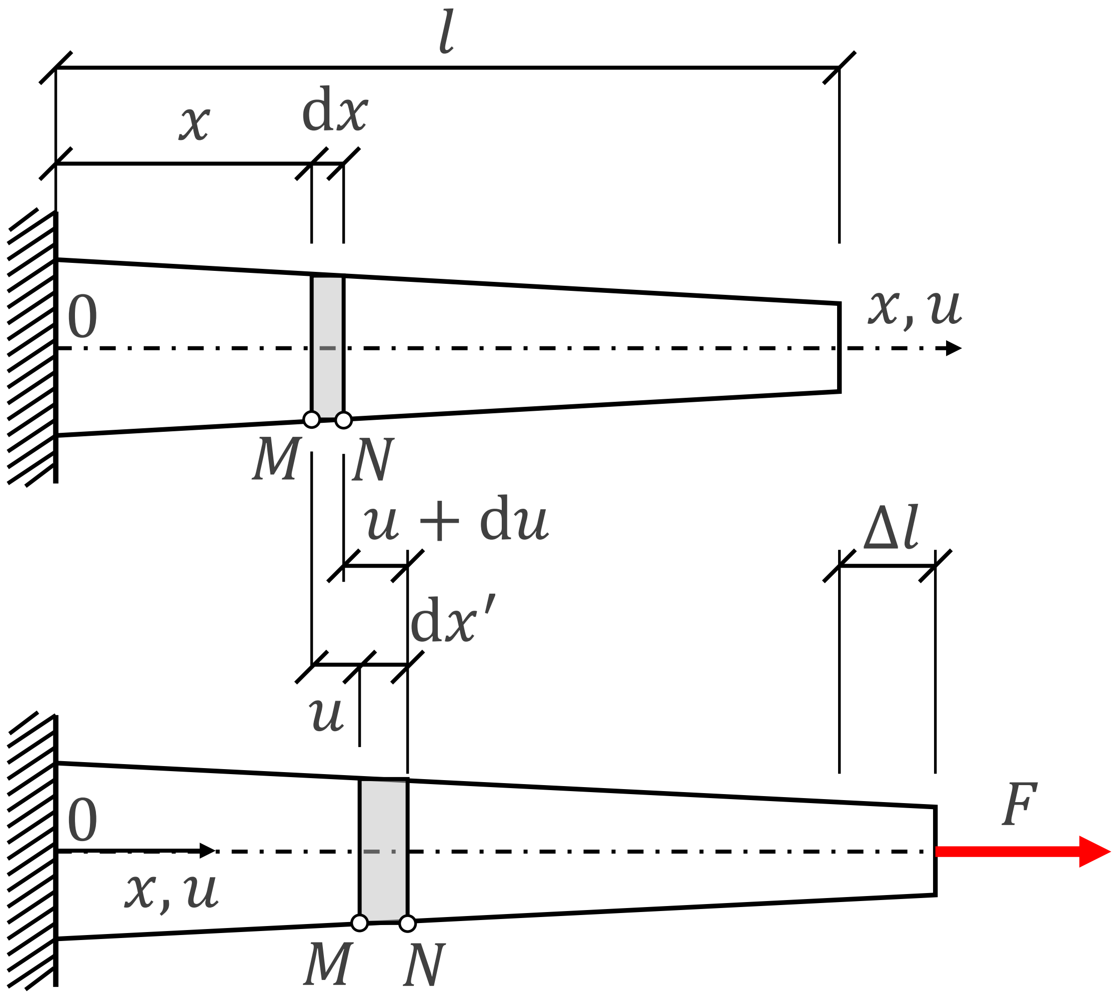



## Deformace od rovnoměrné změny teploty $\Delta T$ [°C]

$$\Delta l_T = \int_0^l \varepsilon_{x,T} \,\mathrm{d}x = \int_0^l \alpha_T \cdot \Delta T \,\mathrm{d}x = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l$$

# Přetvoření osově namáhaného prutu

Obecný případ osově zatíženého prutu s **proměnným průřezem** nebo **proměnnou normálovou silou** $N$




**Před deformací**

**Po deformaci**

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}u - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x + (u + \mathrm{d}u) - u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}u$$

# Přetvoření osově namáhaného prutu

Obecný případ osově zatíženého prutu s **proměnným průřezem** nebo **proměnnou normálovou silou** $N$

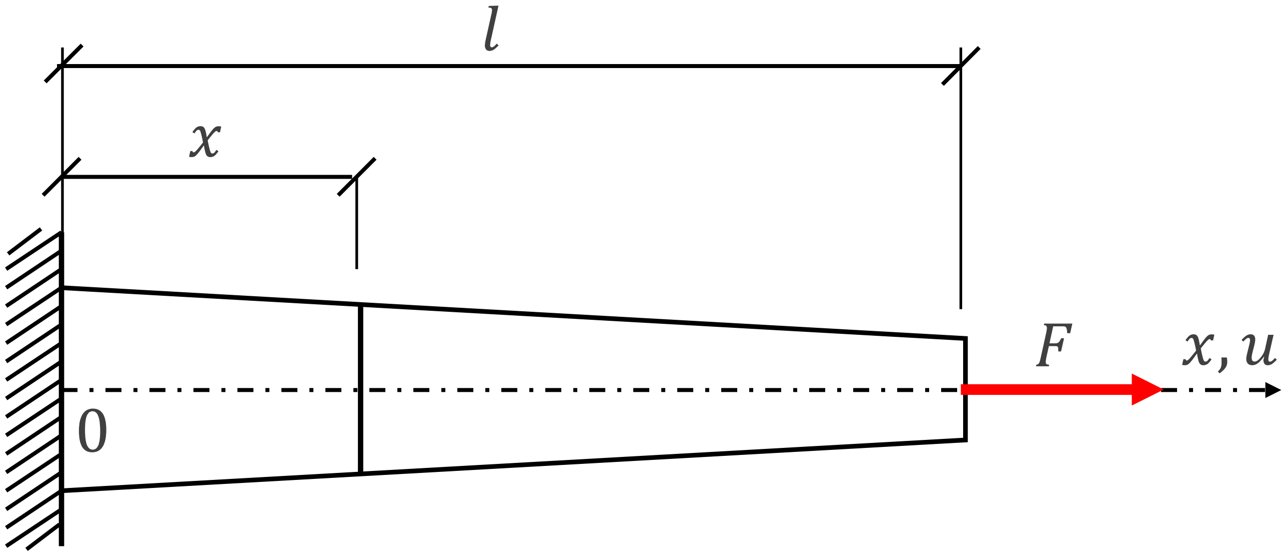
$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \frac{N_{(x)}}{A_{(x)} \cdot E} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

**Diferenciální rovnice osově namáhaného prutu**

**Řešení:**

$$u(x) = \int \frac{N_{(x)}}{E \cdot A_{(x)}} \mathrm{d}x + C$$

$C$ … integrační konstanta, kterou lze určit z tzv. okrajové podmínky

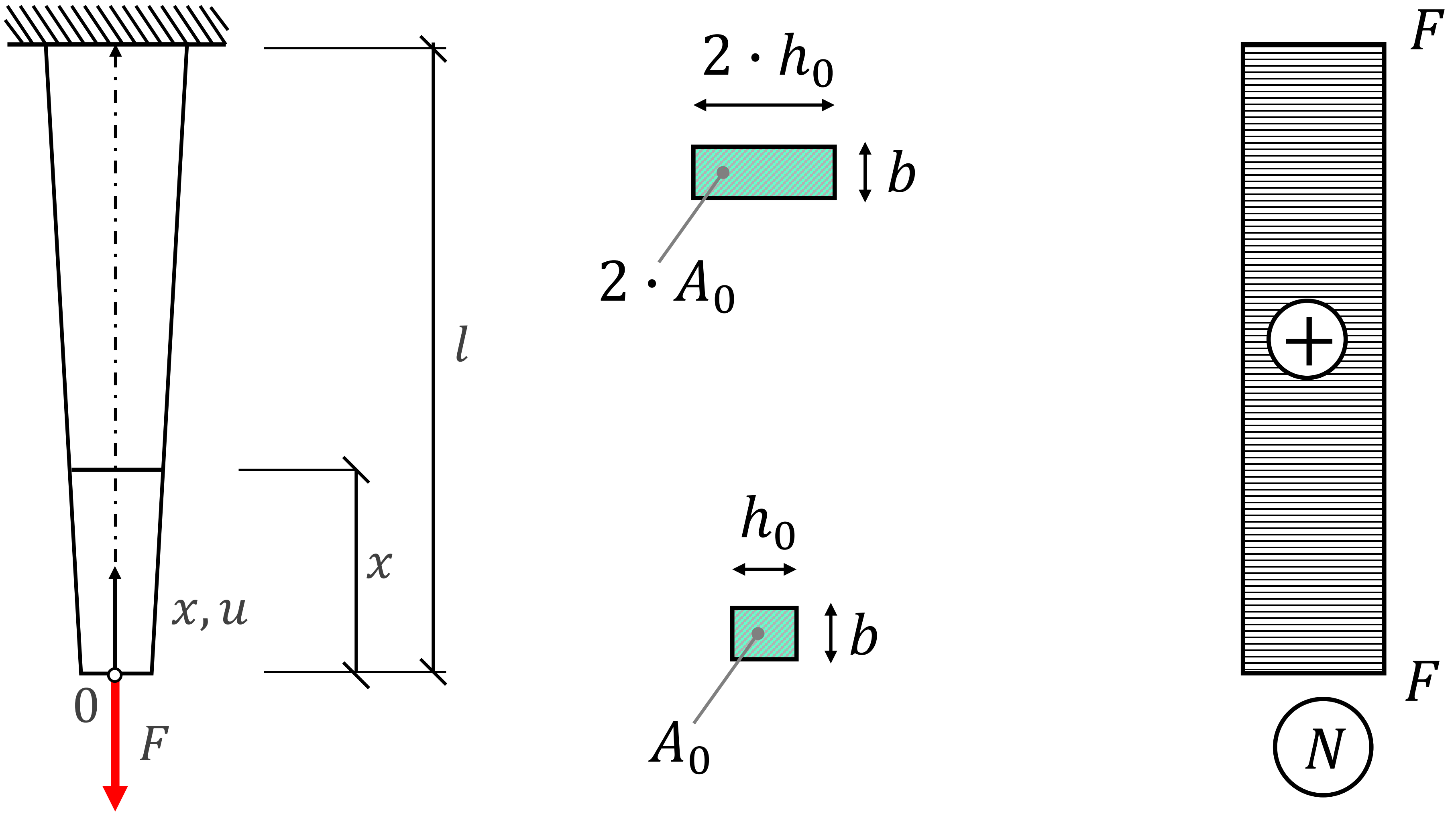



**Okrajová podmínka**

$$u_{(x=0)} = 0$$

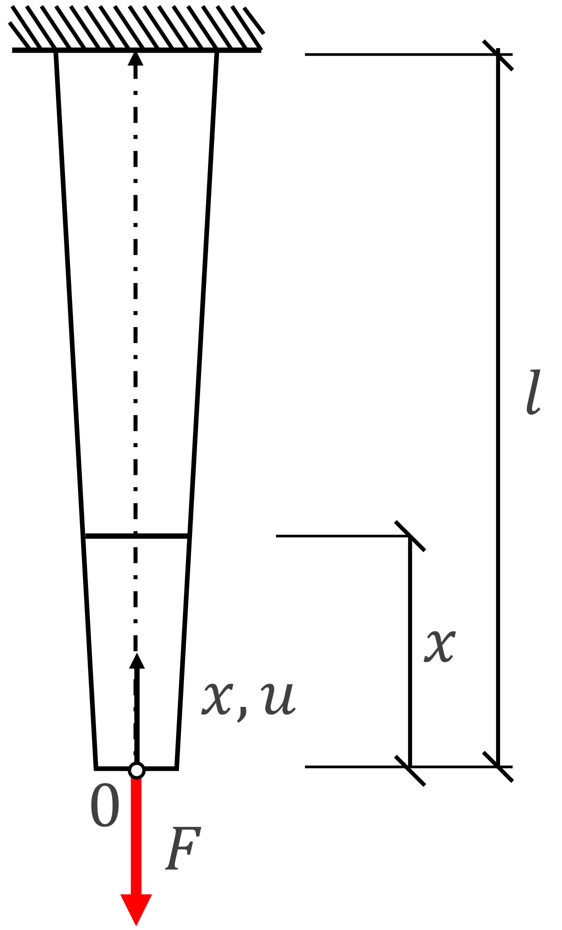
# Příklad 1 Osově namáhaný prut s **proměnnou průřezovou plochou**

**Zadání:** Protažení táhla $\Delta l$? ($N = \text{konst.}$)



# Příklad 1

## Osově namáhaný prut s **proměnnou průřezovou plochou**




$x \in \langle 0, l \rangle$

**Průřezová plocha**

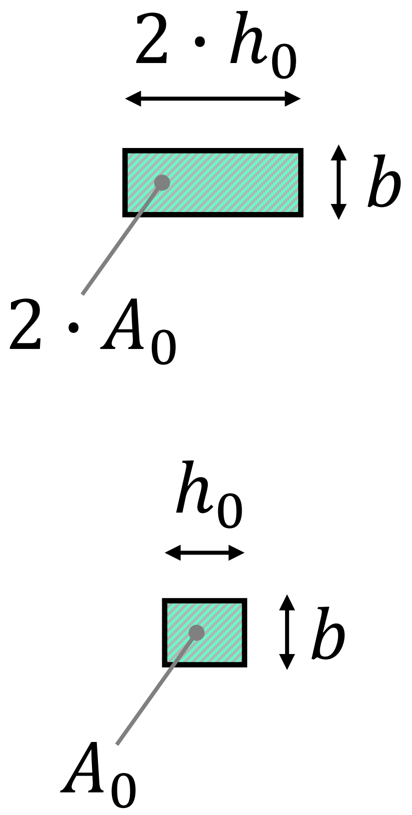
$$A_{(x=0)} = h_0 \cdot b = A_0$$

$$A_{(x=l)} = 2 \cdot h_0 \cdot b = 2 \cdot A_0$$

$$A_{(x)} = A_0 \cdot \frac{l+x}{l}$$

**Normálová síla**

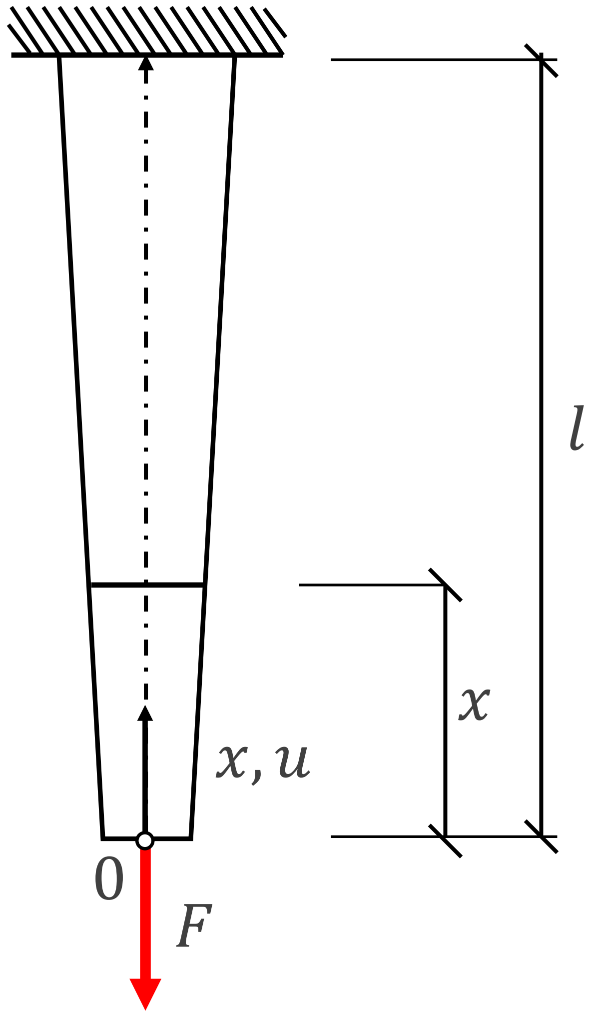
$$N_{(x)} = F = \text{konst.}$$




$$u_{(x)} = \int \frac{F}{E \cdot A_{(x)}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{F.l}{E \cdot A_0 \cdot (l+x)} \,\mathrm{d}x = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot \int \frac{l}{l+x} \,\mathrm{d}x = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(x+l) + C$$

# Příklad 1

Osově namáhaný prut s **proměnnou průřezovou plochou**




$$u_{(x)} = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(x + l) + C \qquad x \in \langle 0, l \rangle$$

**Okrajová podmínka** $\quad u_{(x=l)} = 0$

$$u_{(x=l)} = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(l + l) + C = 0$$

$$C = -\frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(2l)$$

**Rovnice protažení**

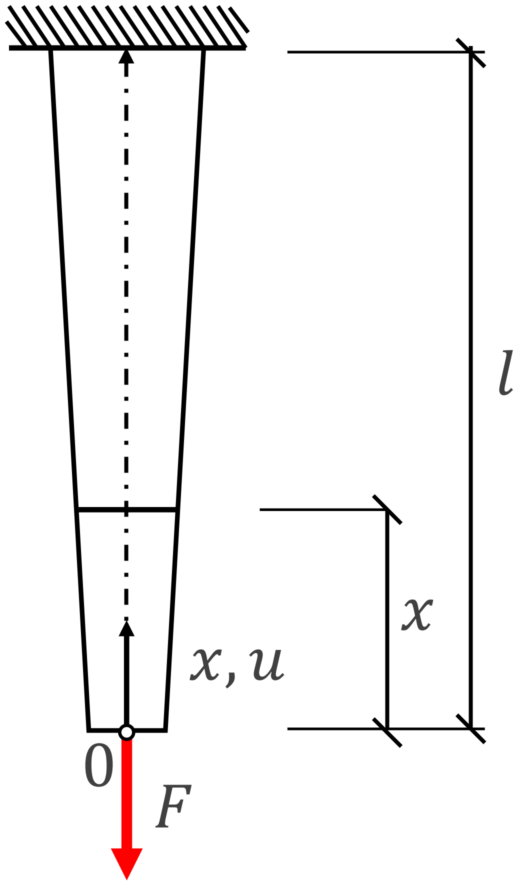
$$u_{(x)} = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(x + l) - \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(2 \cdot l)$$

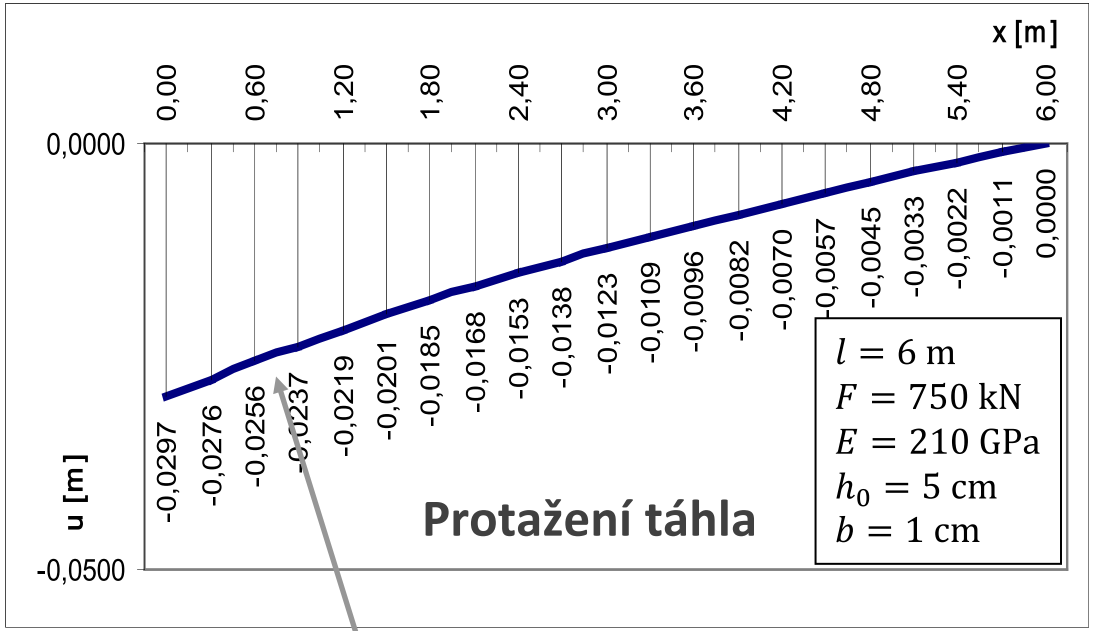
$$u_{(x)} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} \cdot [\ln(x + l) - \ln(2 \cdot l)] \qquad x \in \langle 0, l \rangle$$

# Příklad 1

Osově namáhaný prut s **proměnnou průřezovou plochou**

## Výsledky



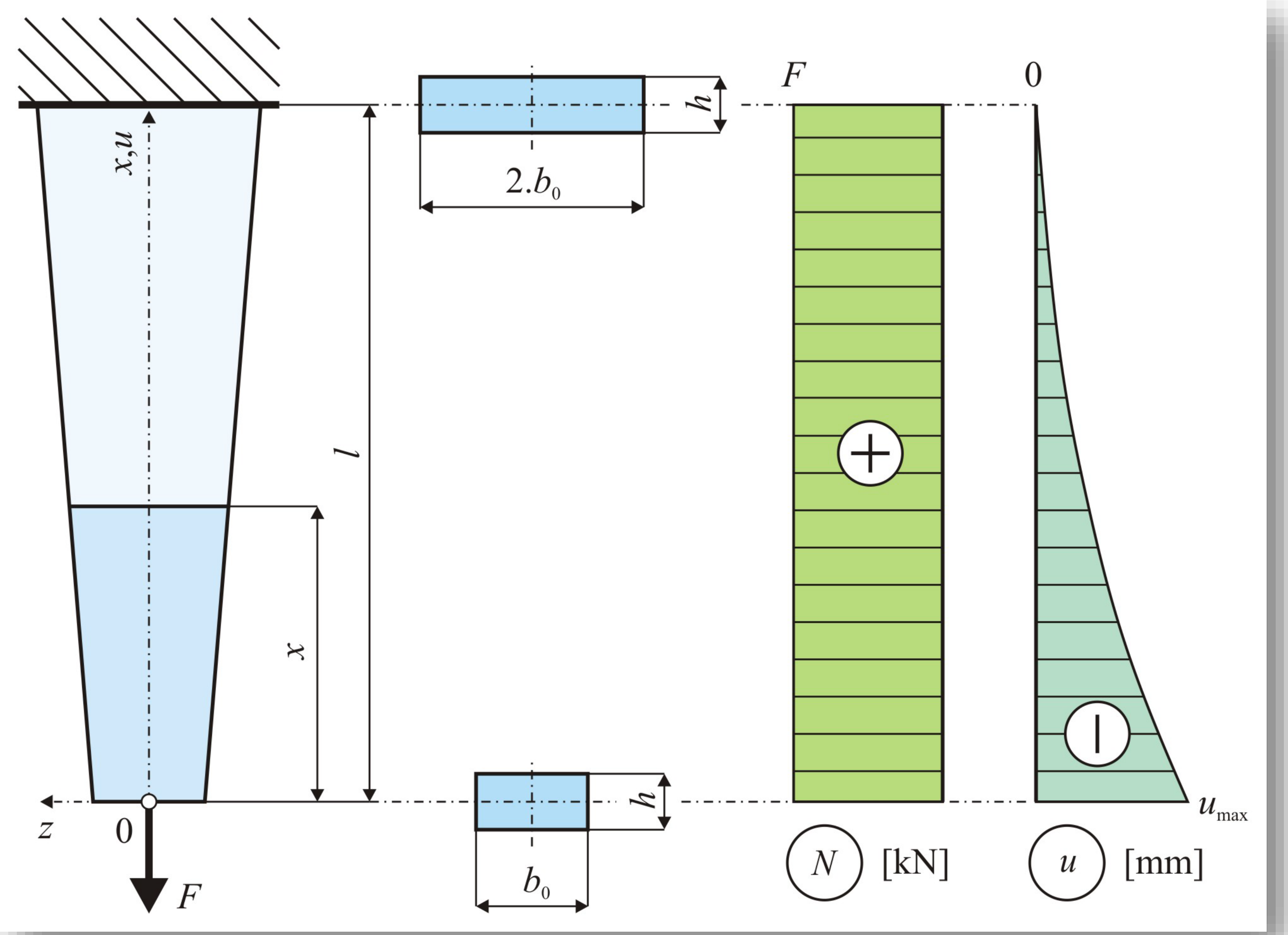

$$u_{(x)} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} \cdot [\ln(x + l) - \ln(2 \cdot l)]$$

Maximální protažení $\Delta l$: $\boxed{u_{\max} = u_{(x=0)}}$

$$\Delta l = u_{(x=0)} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} \cdot [\ln(l) - \ln(2 \cdot l)] = -\ln(2) \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} = -0{,}693147 \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0}$$

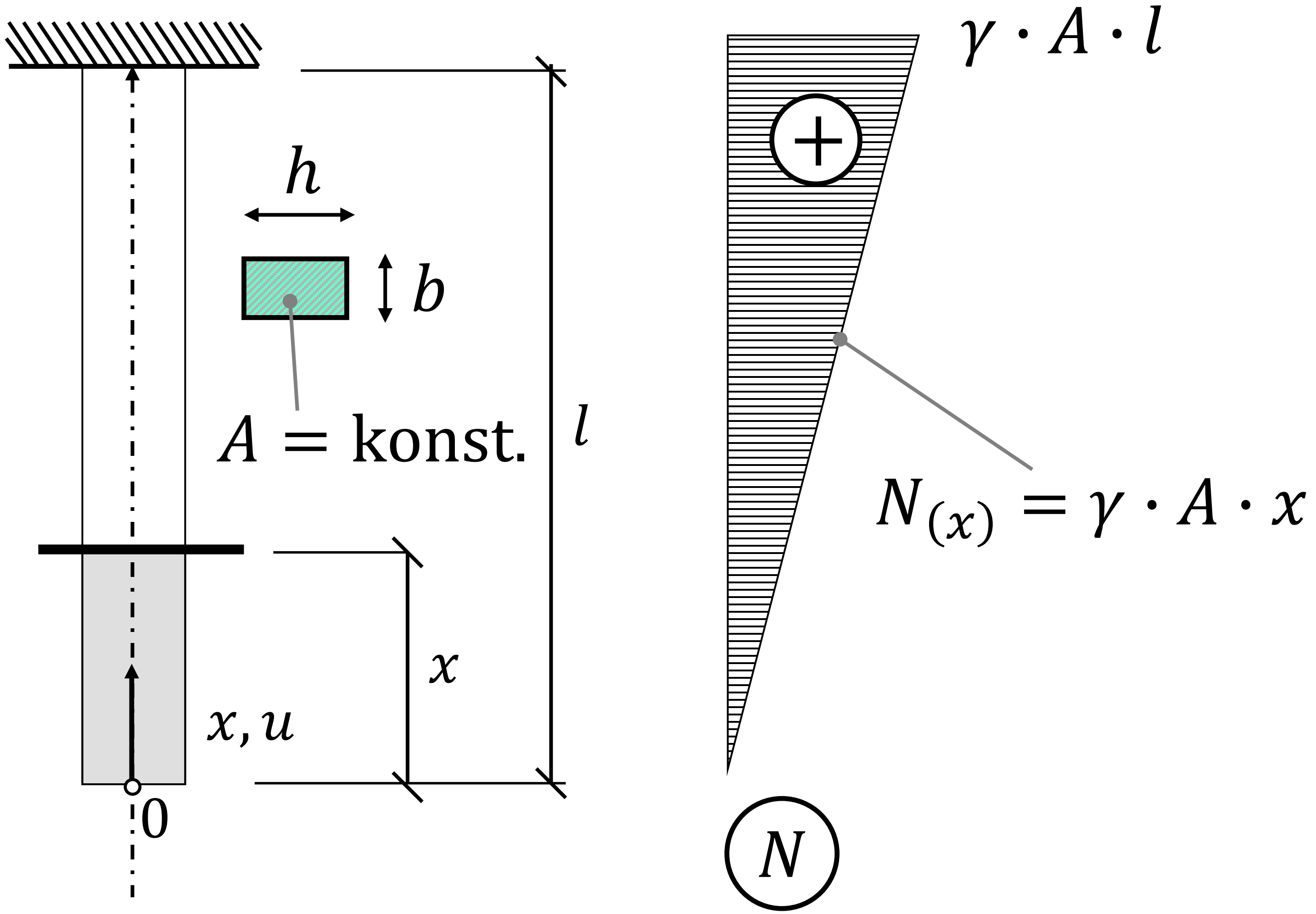
# Příklad 1 Osově namáhaný prut s **proměnnou průřezovou plochou**

## Výsledky



# Příklad 2 Osově namáhaný prut s **proměnnou normálovou silou**

**Zadání:** Protažení táhla $\Delta l$? ($A = \text{konst.}$)




**Normálová síla:**

Tíha spodní oddělené části prutu.

$$N_{(x=0)} = 0$$

$$N_{(x=l)} = \gamma \cdot A \cdot l$$

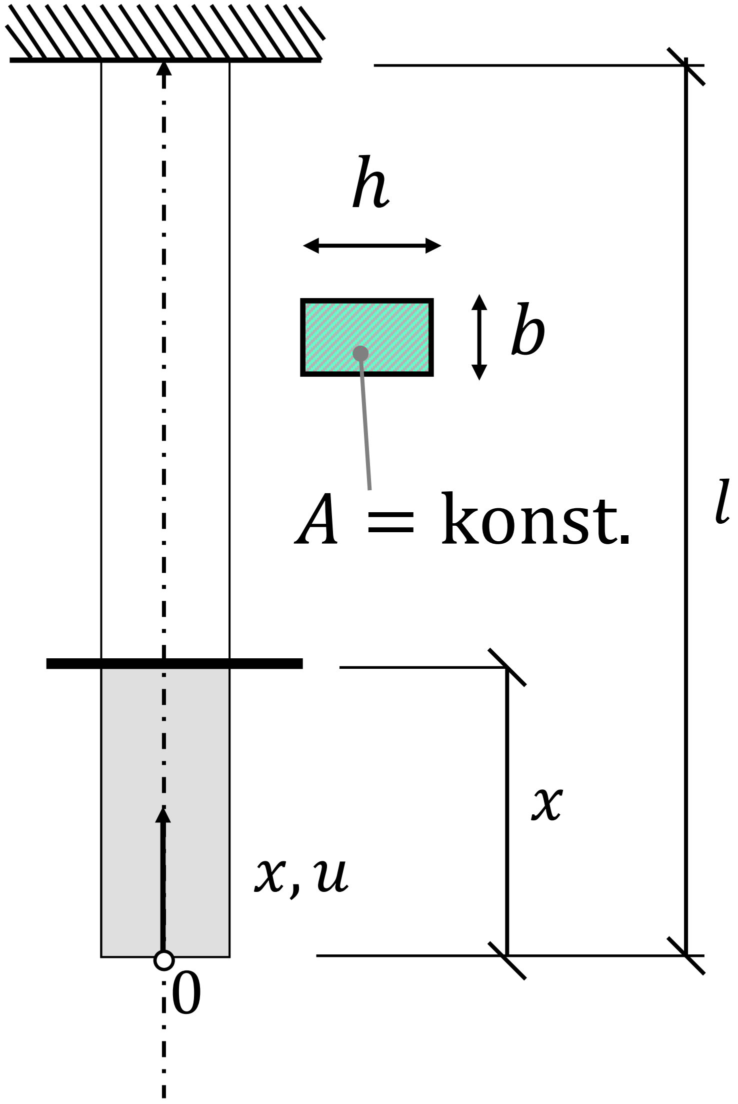
$\gamma = \rho \cdot g$ … měrná tíha

$$u_{(x)} = \int \frac{\gamma \cdot A \cdot x}{E \cdot A} \mathrm{d}x$$

$$u_{(x)} = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

# Příklad 2

Osově namáhaný prut s **proměnnou normálovou silou**




$$u_{(x)} = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{x^2}{2} + C \qquad x \in \langle 0; l \rangle$$

**Okrajová podmínka** $\quad u_{(x=l)} = 0$

$$u_{(x=l)} = \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} + C = 0 \qquad C = -\frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E}$$

**Rovnice protažení**

$$u_{(x)} = \frac{\gamma \cdot x^2}{2 \cdot E} - \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} = \frac{\gamma}{2 \cdot E} \cdot (x^2 - l^2)$$

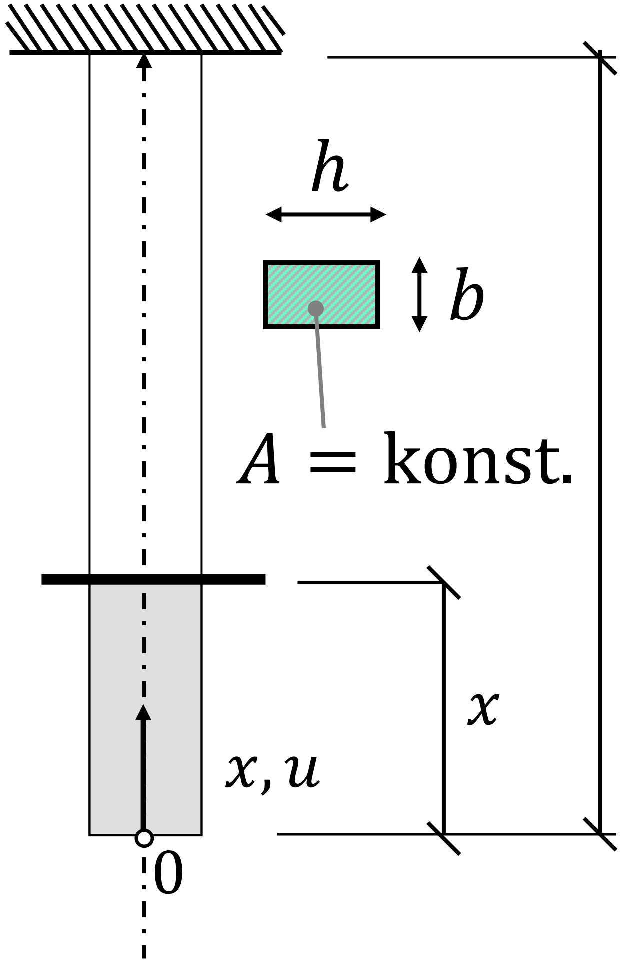
$$u_{(x)} = -\frac{\gamma}{2 \cdot E} \cdot (l^2 - x^2) \qquad x \in \langle 0; l \rangle$$

# Příklad 2

Osově namáhaný prut s **proměnnou normálovou silou**

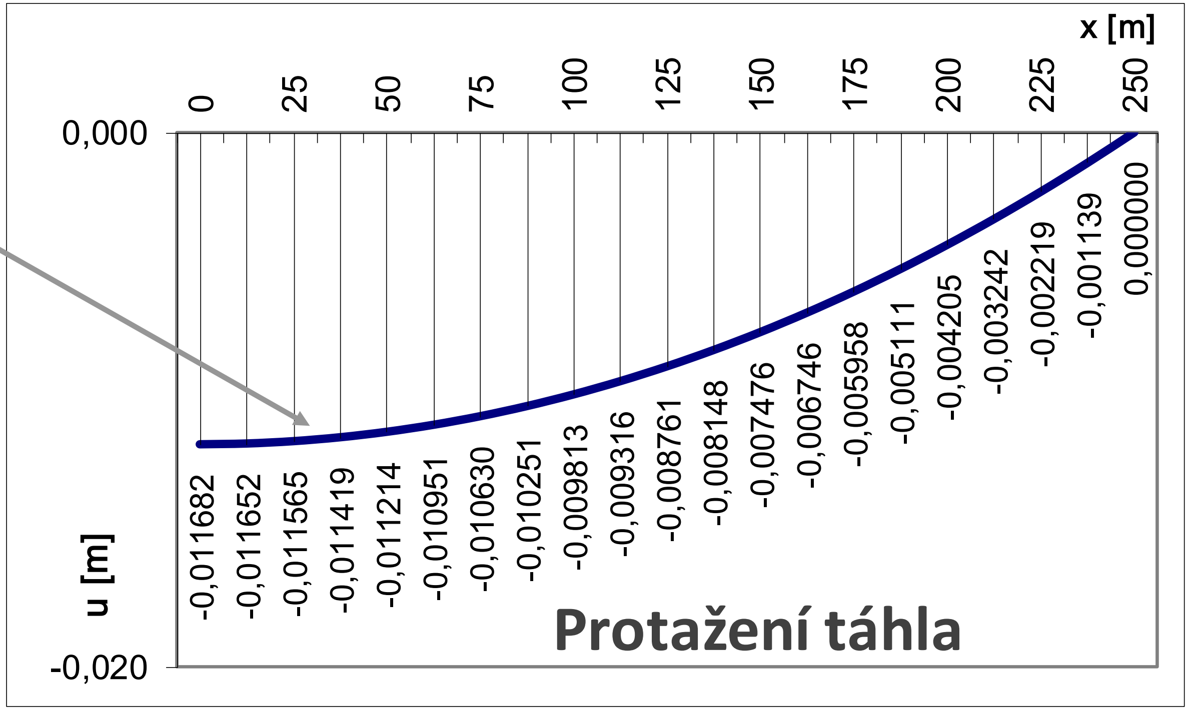
$l = 250$ m
$E = 210$ GPa
$\gamma = 78{,}5\ \mathrm{kN \cdot m^{-3}}$

## Výsledky




### Protažení táhla

$$u_{(x)} = -\frac{\gamma}{2 \cdot E} \cdot (l^2 - x^2)$$




Maximální protažení $\Delta l$:

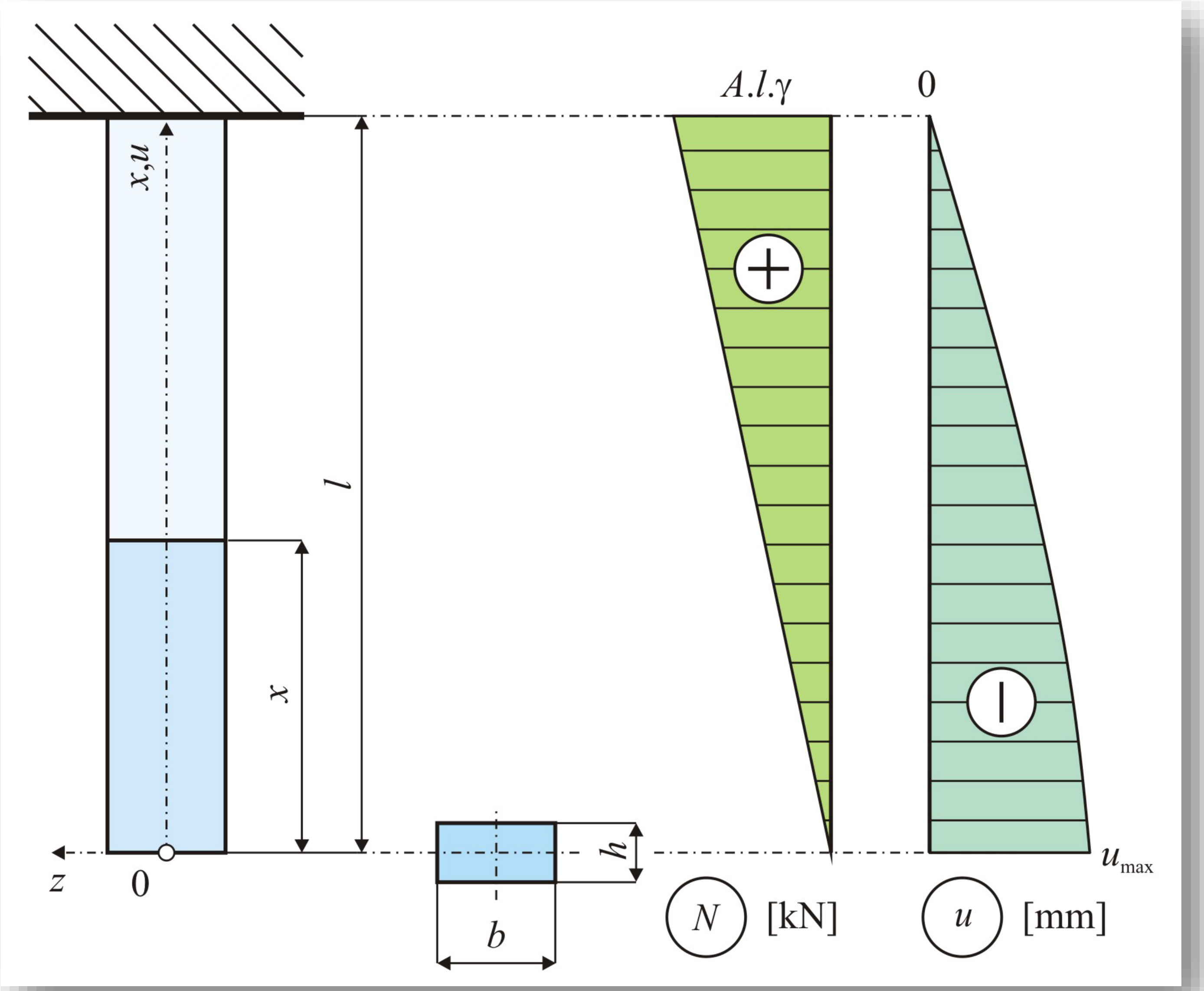
$$u_{\max} = u_{(x=0)}$$

$$\Delta l = u_{(x=0)} = -\frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E}$$

# Příklad 2

Osově namáhaný prut s **proměnnou normálovou silou**

## Výsledky



# Dimenzování osově namáhaného prvku podle MSÚ

Návrh nosné konstrukce

Zvýšit $N_{Rd}$

Posouzení

Realizace

Dimenzování

$N_{Ed}, A_{\min}, f_d$

$$A_{\min} = \frac{N_{Ed}}{f_d} \qquad f_d = \frac{f_k}{\gamma_M}$$

$$N_{Ed} \leq N_{Rd} = A \cdot f_d$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \leq 1$$

# Příklad 3 Dimenzování nosného osově namáhaného prvku

## Vstupní údaje

$g_k = 60\ \mathrm{kN/m}$ $\gamma_G = 1{,}35$

$q_k = 140\ \mathrm{kN/m}$ $\gamma_Q = 1{,}5$

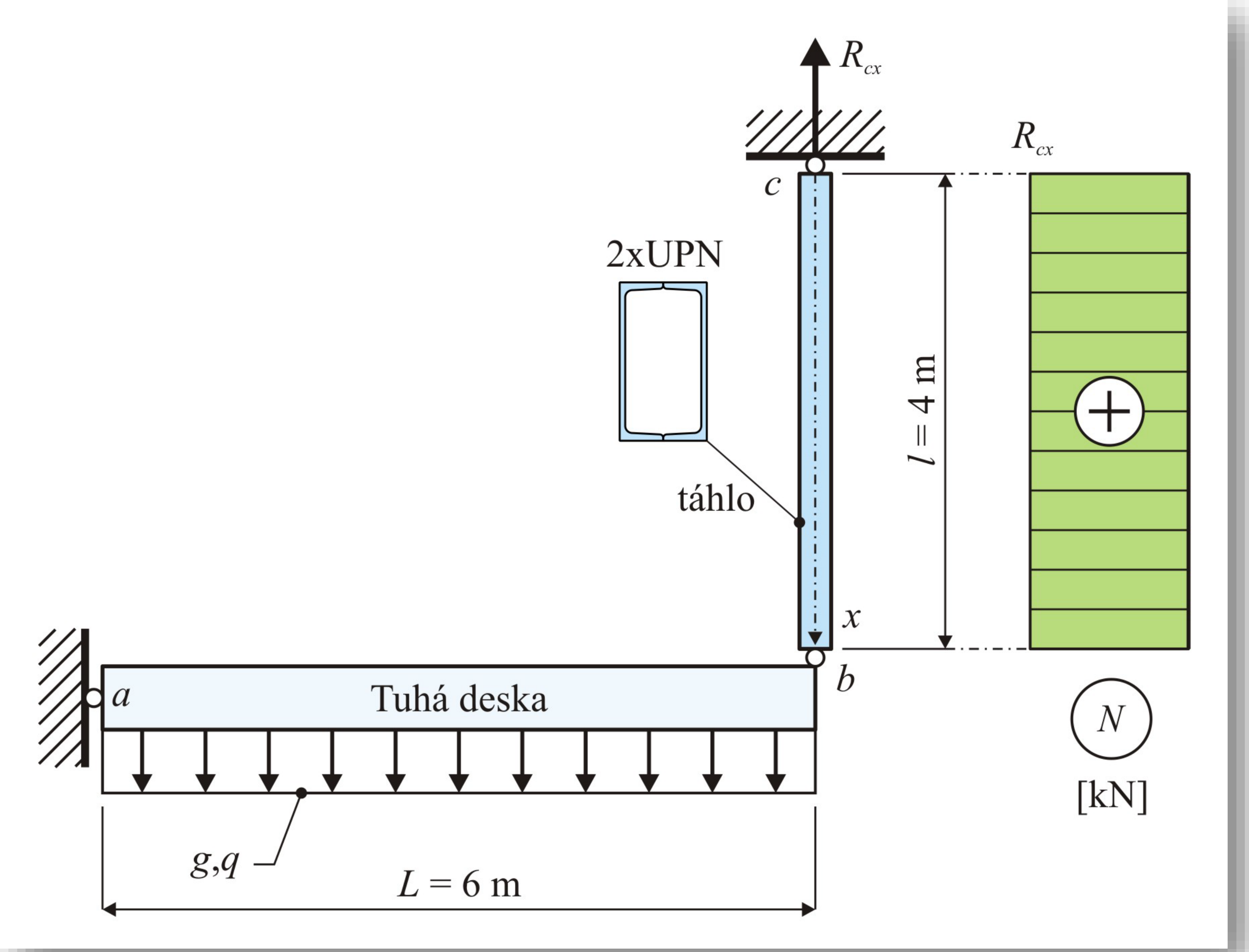
Ocel S275

$f_{yk} = 275\ \mathrm{MPa}$ $\gamma_M = 1{,}0$

$E = 210\ \mathrm{GPa}$

$\delta_{\max} = 5\ \mathrm{mm}$

**Nadimenzujte**
osově namáhaný nosný prvek
z profilu **2xUPN**



# Příklad 3 Dimenzování nosného osově namáhaného prvku

## Normálová síla

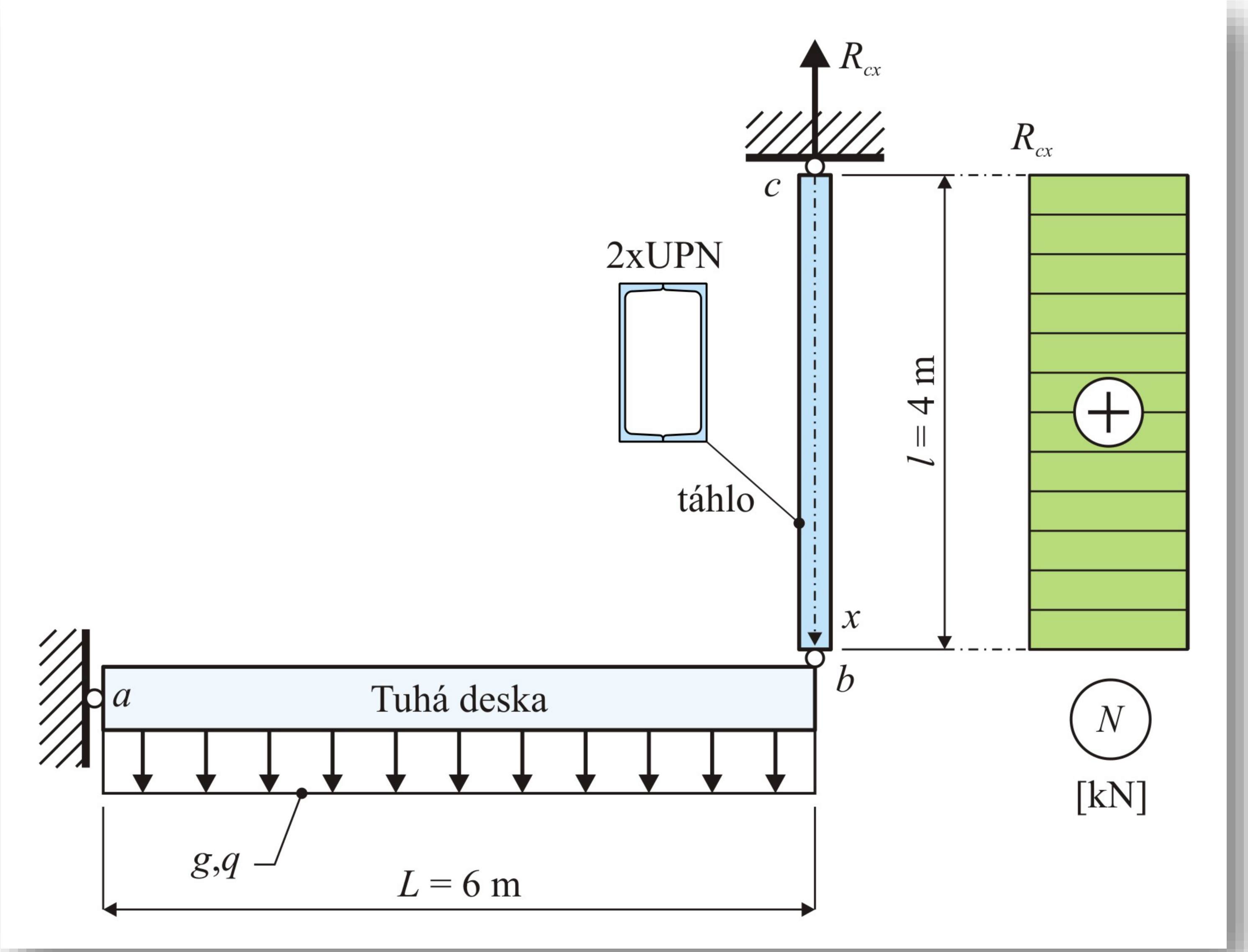
$$p_k = g_k + q_k = 60 + 140 = $$
$$= 200\ \mathrm{kN/m}$$

$$\boxed{\sum M_a = 0:}$$

$$-\frac{p_k \cdot L^2}{2} + R_{cx,k} \cdot L = 0$$

$$R_{cx,k} = N_{Ek} = \frac{p_k \cdot L}{2} =$$

$$= \frac{200 \cdot 6}{2} = \boxed{600\ \mathrm{kN}}$$



# Příklad 3 Dimenzování nosného osově namáhaného prvku

## Normálová síla

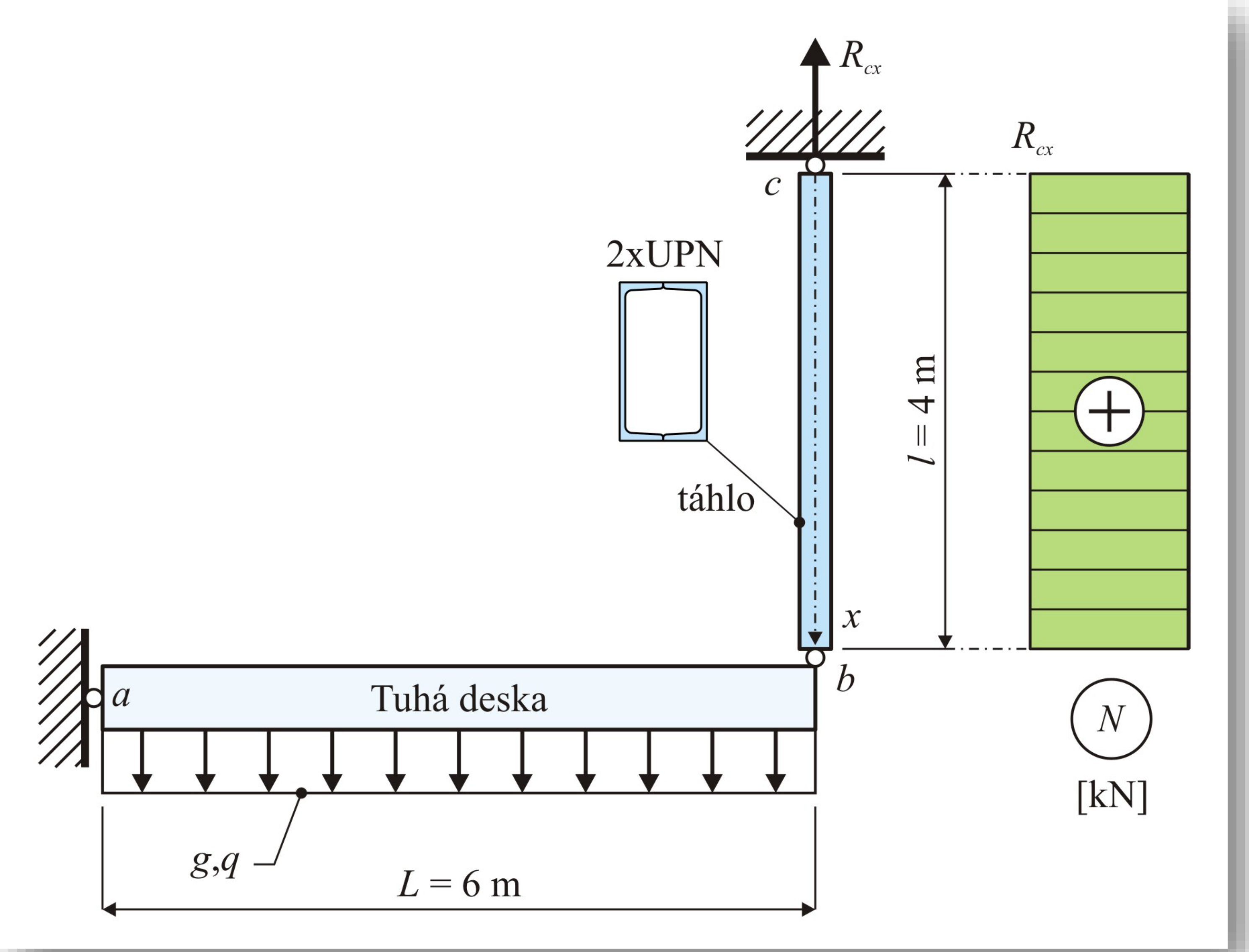
$$p_d = g_k \cdot \gamma_G + q_k \cdot \gamma_Q =$$
$$= 60 \cdot 1{,}35 + 140 \cdot 1{,}5 =$$
$$= 291\ \mathrm{kN/m}$$

$$\boxed{\sum M_a = 0:}$$

$$-\frac{p_d \cdot L^2}{2} + R_{cx,d} \cdot L = 0$$

$$R_{cx,d} = N_{Ed} = \frac{p_d \cdot L}{2} =$$

$$= \frac{291 \cdot 6}{2} = \boxed{873\ \mathrm{kN}}$$



# Příklad 3 Dimenzování nosného osově namáhaného prvku

Návrh podle **mezního stavu únosnosti**:

$$A_{\min} = \frac{N_{Ed}}{\left(\frac{f_{yk}}{\gamma_M}\right)} = \frac{873 \cdot 10^3}{\left(\frac{275 \cdot 10^6}{1{,}0}\right)} =$$

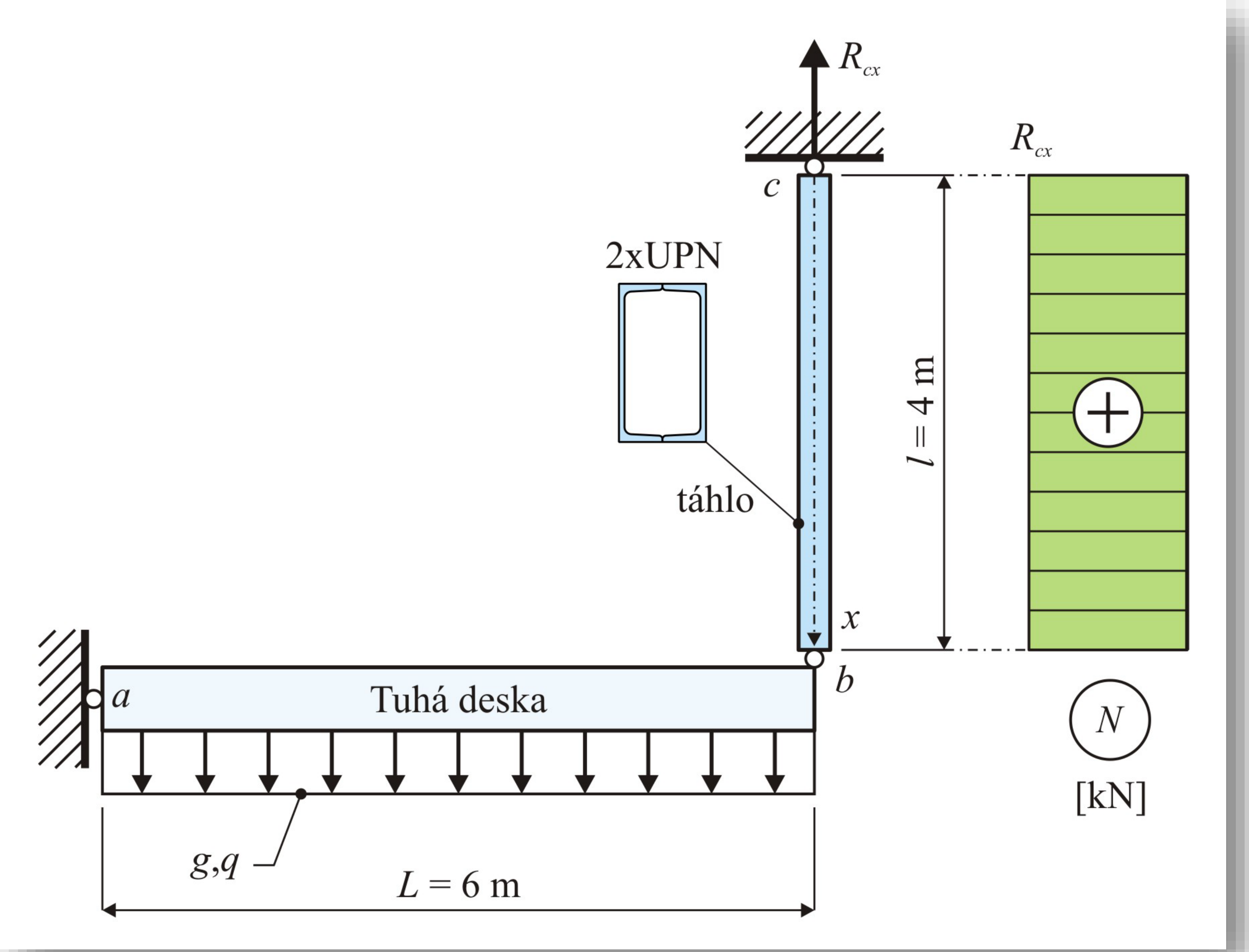
$$= 3{,}174545 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 \cong$$

$$\cong 3174{,}55\ \mathrm{mm}^2$$

$$A_{1,\min}(1 \times \mathrm{UPN}) = \frac{A_{\min}}{2} =$$

$$= \frac{3174{,}55}{2} \cong \boxed{1587{,}27\ \mathrm{mm}^2}$$

$$A(\mathrm{UPN120}) = 1700\ \mathrm{mm}^2$$



# Příklad 3 Dimenzování nosného osově namáhaného prvku

Návrh podle **mezního stavu použitelnosti**:

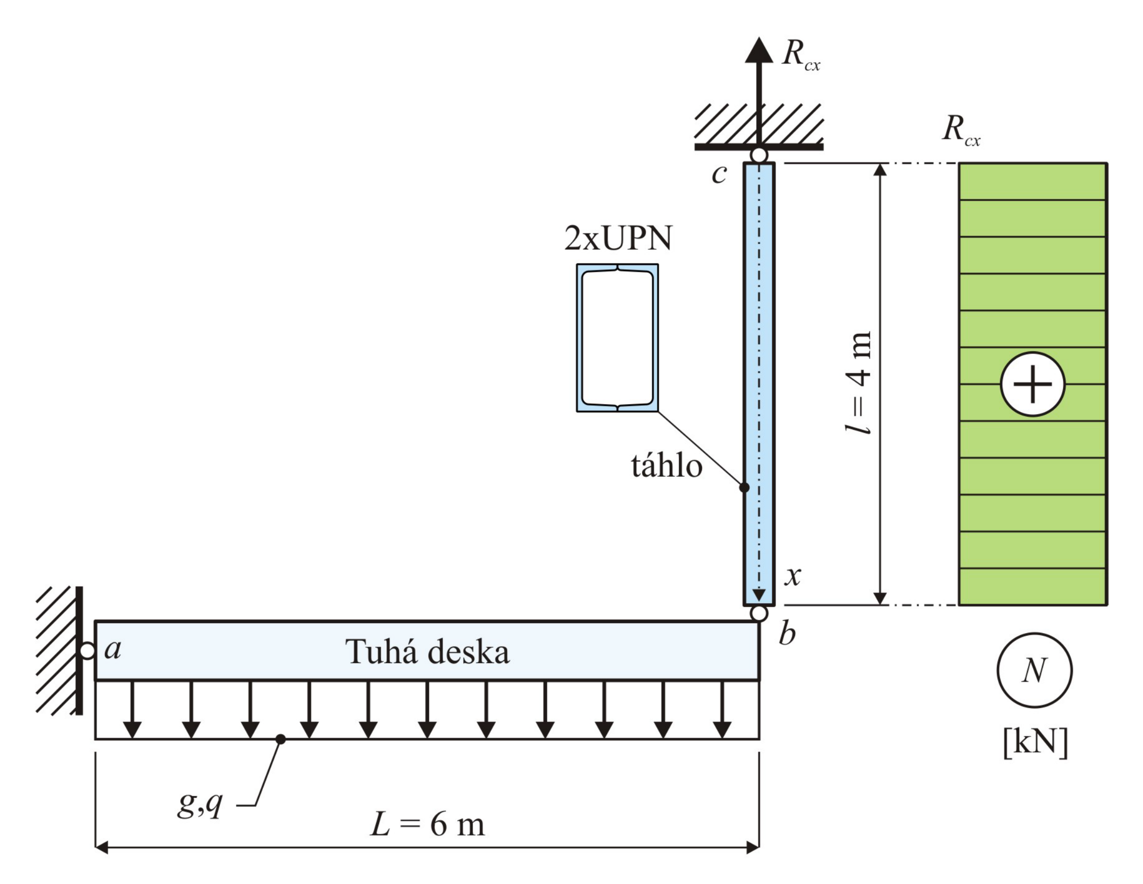
$$A_{\min} = \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot \delta_{\max}} = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 4}{210 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^3} =$$

$$= 2{,}285714 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2 \cong 2285{,}71\ \mathrm{mm}^2$$

$$A_{1,\min}(1 \times \mathrm{UPN}) = \frac{A_{\min}}{2} =$$

$$= \frac{2285{,}71}{2} \cong \boxed{1142{,}86\ \mathrm{mm}^2}$$

$$A(\mathrm{UPN100}) = 1350\ \mathrm{mm}^2$$




**Výsledný návrh** podle obou mezních stavů: **2xUPN120**
$(A = 2 \cdot 1700 = 3400\ \mathrm{mm}^2)$

# Příklad 3 Dimenzování nosného osově namáhaného prvku

**Výsledný návrh** podle obou mezních stavů: **2xUPN120** ($A = 2 \cdot 1700 = 3400\ \mathrm{mm}^2$)

**Posudek spolehlivosti**:

## Mezní stav únosnosti

$$N_{Rd} = f_{yd} \cdot A = 275 \cdot 10^6 \cdot 3400 \cdot 10^{-6} = 935 \cdot 10^3\ \mathrm{N} = 935\ \mathrm{kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} = \frac{873}{935} \cong 0{,}9337 \leq 1.0$$

**Vyhovuje podle mezního stavu únosnosti** pro osové namáhání - rezerva 6,63 %.

## Mezní stav použitelnosti

$$\Delta l = \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot A} = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 4}{210 \cdot 10^9 \cdot 3400 \cdot 10^{-6}} =$$
$$= 3{,}3613 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cong 3{,}36\ \mathrm{mm}$$

$$\Delta l \cong 3{,}36\ \mathrm{mm} \leq \delta_{\max} = 5\ \mathrm{mm}$$

**Vyhovuje podle mezního stavu použitelnosti** pro osové namáhání.

# Vstupní prostor nádraží v Sofii, Bulharsko

# Vstupní prostor nádraží v Sofii, Bulharsko

# Vstupní prostor nádraží v Sofii, Bulharsko

# Vstupní prostor nádraží v Sofii, Bulharsko

# Loděnice Slavia, Praha

# Pavilon V z roku 2000, Výstaviště, Brno

# Pavilon V z roku 2000, Výstaviště, Brno

# Pavilon V z roku 2000, Výstaviště, Brno

# Pavilon V z roku 2000, Výstaviště, Brno

# Ivančický viadukt, výstavba 1887 a 1976

# Dálničně-železniční most přes Dunaj, Bratislava

# Dálničně-železniční most přes Dunaj, Bratislava

# Dálničně-železniční most přes Dunaj, Bratislava

# Pavilon G1 z roku 1996, Výstaviště, Brno

# Pavilon G1 z roku 1996, Výstaviště, Brno

# Pavilon G1 z roku 1996, Výstaviště, Brno

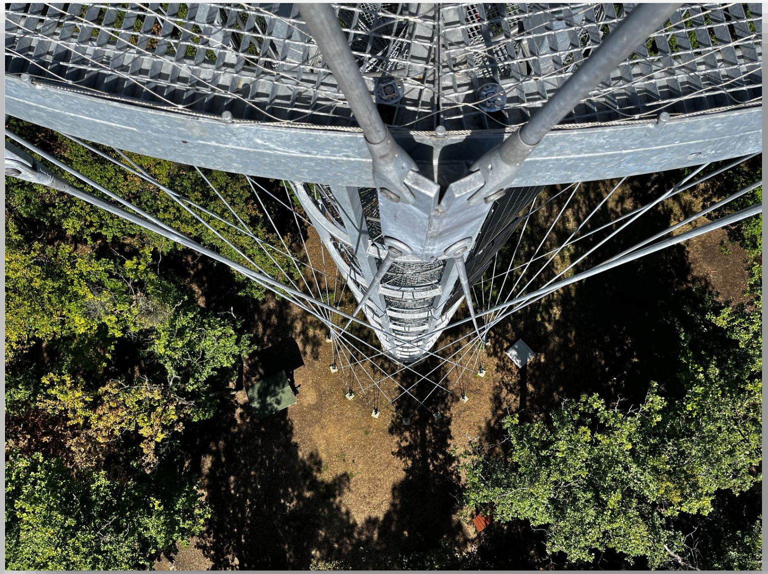
# Klenba s táhlem v Chrámu sv.Víta, Praha

# Klenba s táhlem v Chrámu sv.Víta, Praha

# Zastřešení hangáru F, Praha - Ruzyně

# Zastřešení hangáru F, Praha - Ruzyně

# Rozhledna Holedná, výstavba 2020, výška 35 m, Brno



# Most Miloše Sýkory, Ostrava

Ocelový příhradový oblouk o rozpětí 60 m a vzepětí 7 m, celková délka 92 m, šířka 16 m, vyrobeno 1913.

# Most Miloše Sýkory, Ostrava

Ocelový příhradový oblouk o rozpětí 60 m a vzepětí 7 m, celková délka 92 m, šířka 16 m, vyrobeno 1913.

# Most Miloše Sýkory, Ostrava

Ocelový příhradový oblouk o rozpětí 60 m a vzepětí 7 m, celková délka 92 m, šířka 16 m, vyrobeno 1913.

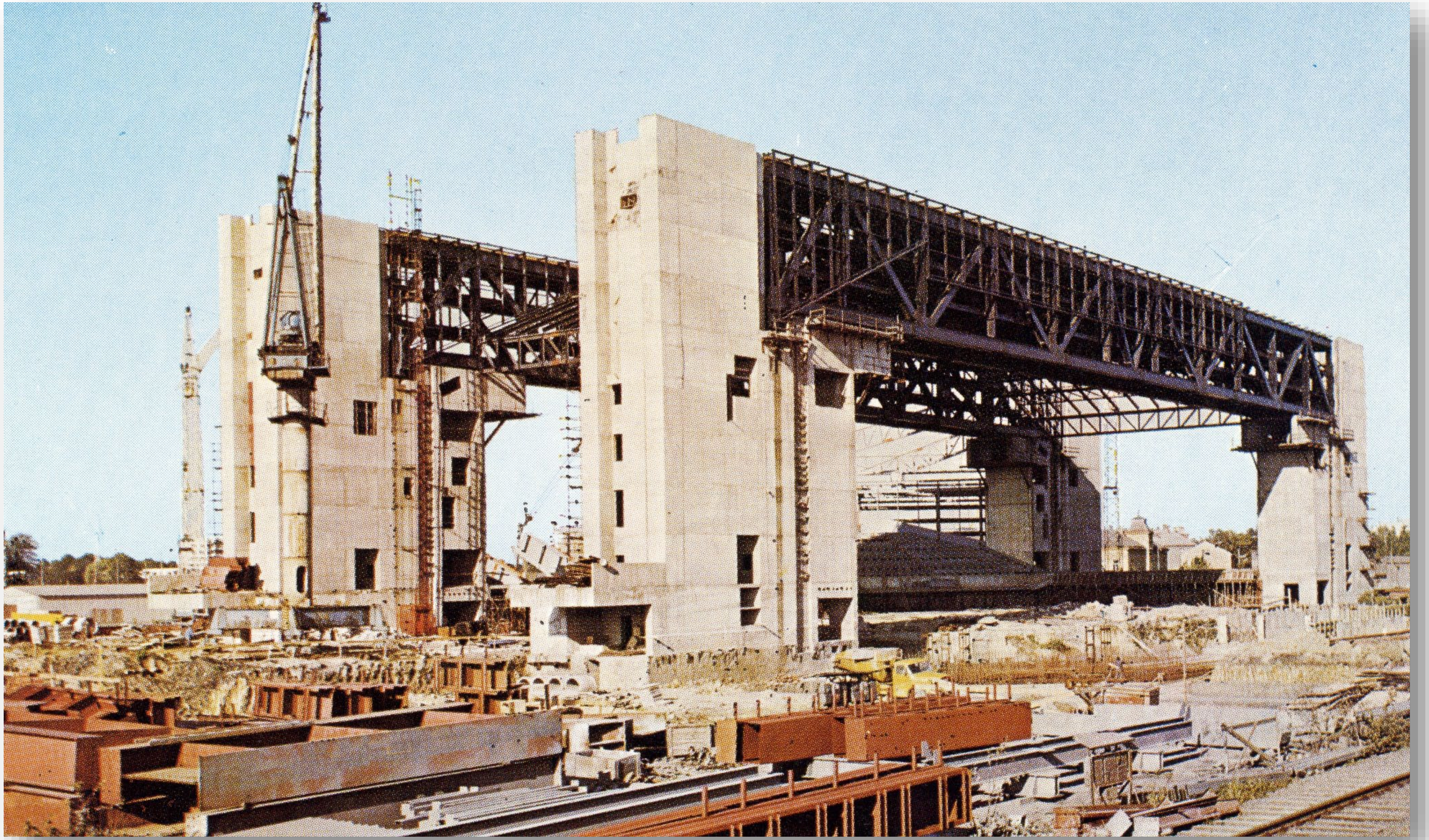
# Most Miloše Sýkory, Ostrava

Ocelový příhradový oblouk o rozpětí 60 m a vzepětí 7 m, celková délka 92 m, šířka 16 m, vyrobeno 1913.

# Ostravar Aréna, výstavba 1980, Ostrava - Vítkovice

Půdorys 125x109 m,
výška 31 m

# Ostravar Aréna, výstavba 1980, Ostrava - Vítkovice



Půdorys 125x109 m, výška 31 m

# Železniční most, výstavba 1964, Ostrava - Zábřeh

# Železniční most, tzv. Polanecká spojka, výstavba 1964, Ostrava-Zábřeh

# Železniční most, výstavba 1964, Ostrava - Zábřeh

# Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Konstrukce střechy tvořená soustavou dřevěných příhradových vazníků

# Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Konstrukce střechy tvořená soustavou dřevěných příhradových vazníků

# Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Konstrukce obloukové nosné konstrukce s táhlem

# Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Konstrukce obloukové nosné konstrukce s táhlem

# Výzkumné energetické centrum, VŠB-TU Ostrava

Konstrukce
obloukové nosné
konstrukce s táhlem

# Avion Shopping Park Ostrava


Zavěšení podhledů systémem táhel

# Avion Shopping Park Ostrava

Zavěšení podhledů systémem táhel

# Avion Shopping Park Ostrava

Zavěšení podhledů systémem táhel

# Avion Shopping Park Ostrava

Zavěšení podhledů systémem táhel

# Avion Shopping Park Ostrava

Zavěšení podhledů systémem táhel

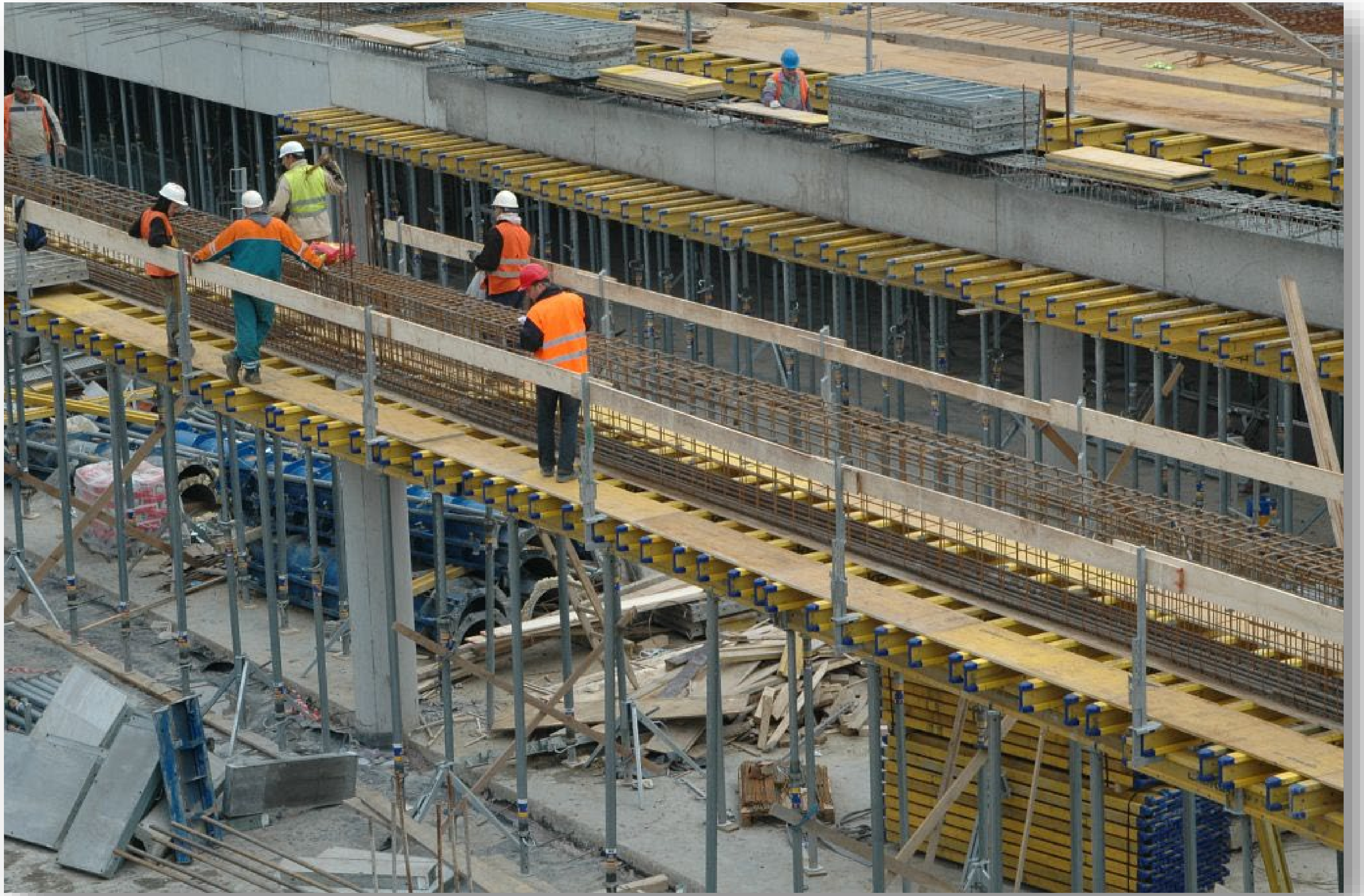
# Avion Shopping Park Ostrava

Zavěšení podhledů systémem táhel

# Avion Shopping Park Ostrava


Stojkování
betonového stropu

# Avion Shopping Park Ostrava

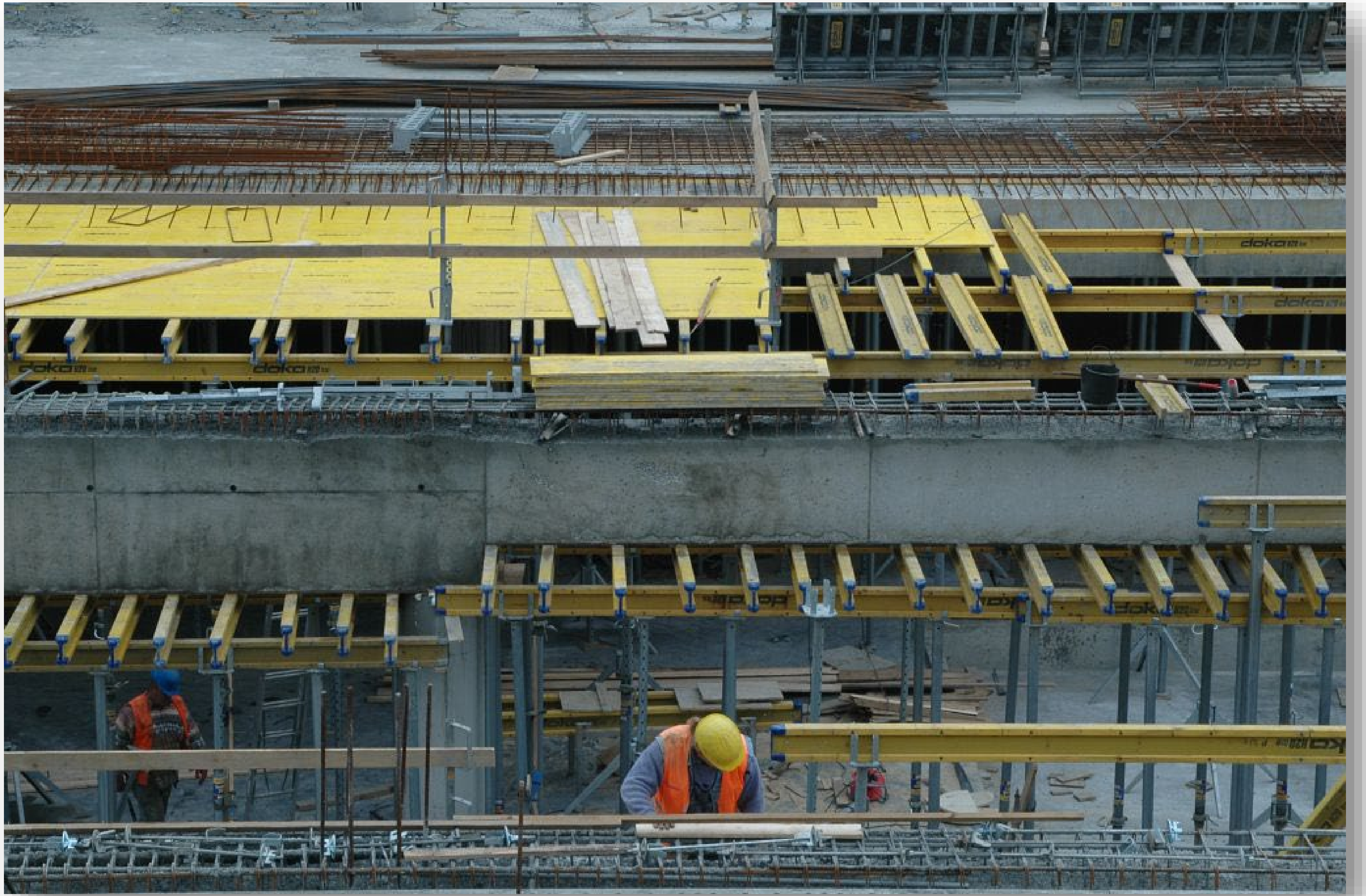


Stojkování betonového stropu

# Avion Shopping Park Ostrava

Stojkování betonového stropu

# Avion Shopping Park Ostrava



Stojkování
betonového stropu

# Staticky neurčité osově namáhané konstrukce

**Předpoklad řešení:** Pružné chování materiálu

**Staticky neurčité úlohy:**

Počet neznámých > Počet **podmínek rovnováhy**

**Řešení:**

Počet neznámých = **Podmínky rovnováhy** + **Podmínky deformační**

# **Úloha 1:** Oboustranně vetknutý prut

**Předpoklad:** Pružné chování materiálu

Neznámé v úloze:

$$R_a(= -N_1); R_b(= N_2)$$

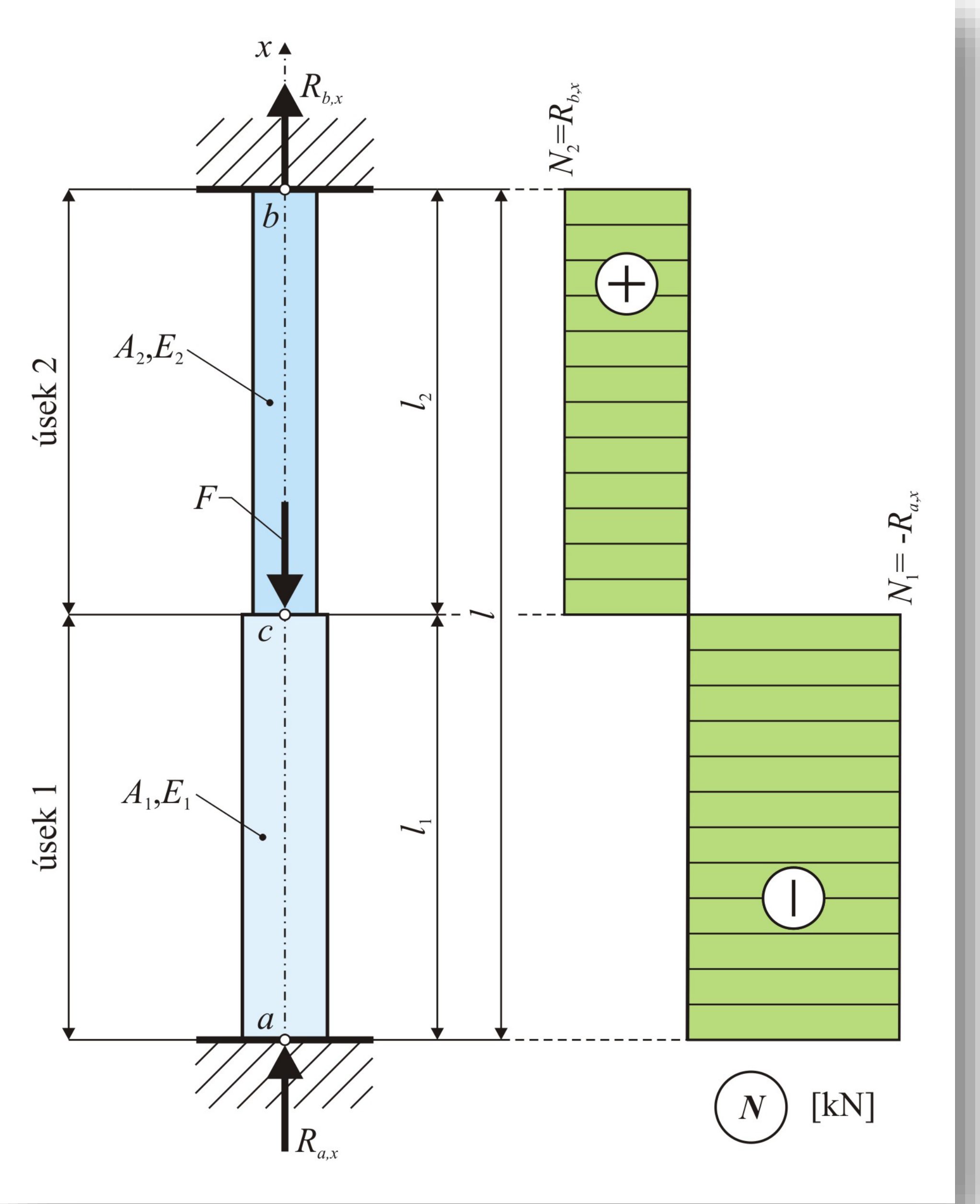
**Podmínka rovnováhy**:

$$\boxed{R_z = 0:} \qquad R_a + R_b - F = 0$$

**Deformační podmínka**:

$$\boxed{\Delta l = 0:}$$

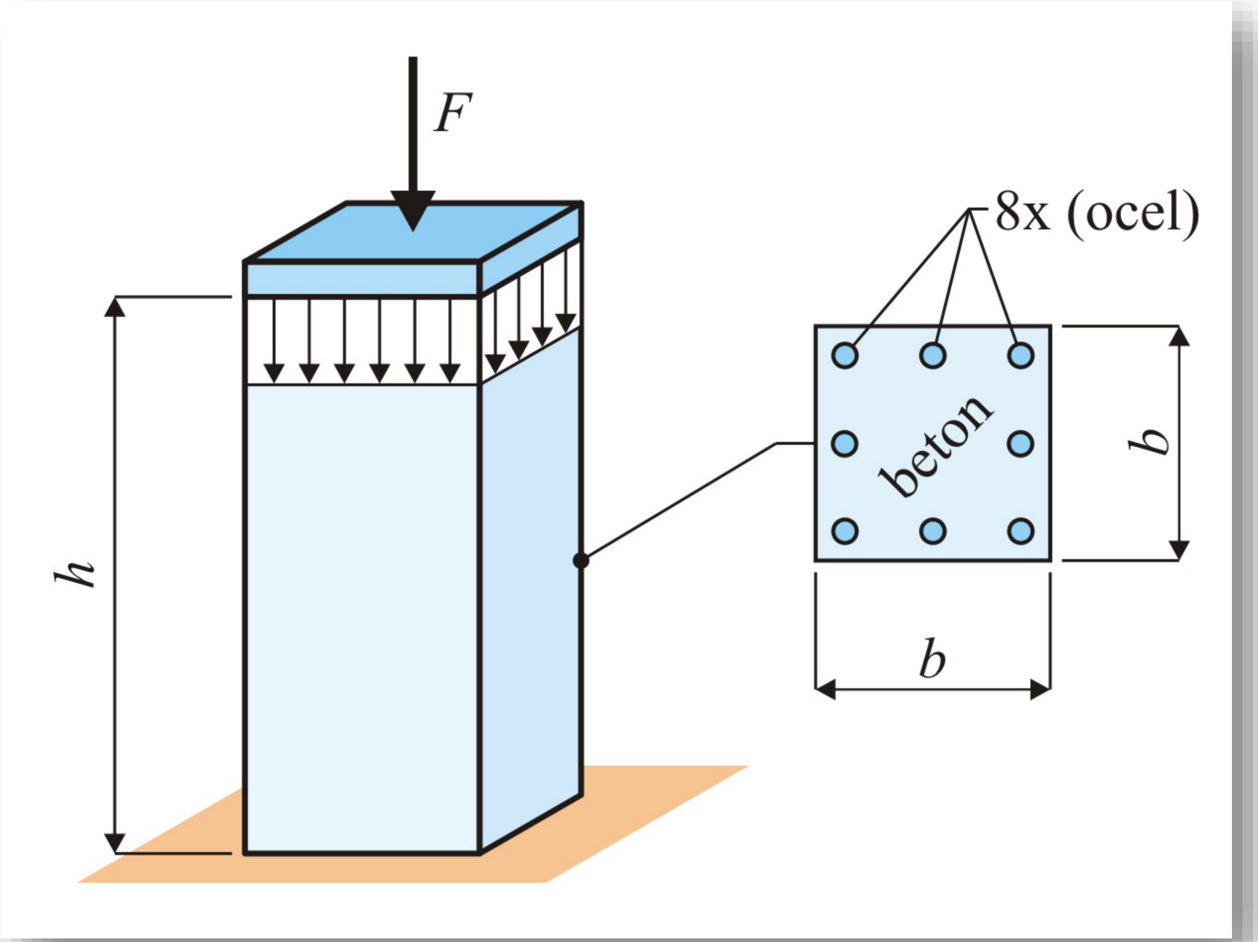
$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{E_1 . A_1} + \frac{N_2 l_2}{E_2 . A_2} = 0$$



# Úloha 2: Železobetonový sloup

**Předpoklad:**

Pružné chování materiálu, rovnoměrné roznesení zatížení do průřezu sloupu.




Neznámé v úloze:

$N_s; N_c$ ocel (<u>s</u>teel), beton (<u>c</u>oncrete)

## Podmínka rovnováhy:

$\boxed{R_z = 0:} \quad F = N_s + N_c$

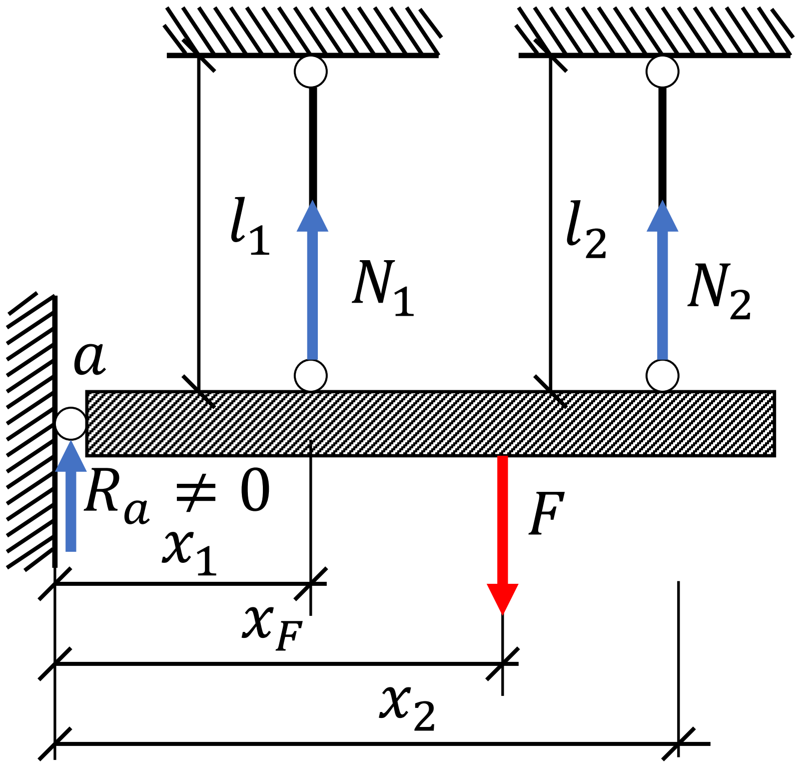
## Deformační podmínka:

$\boxed{\Delta l_s = \Delta l_c}$

$$\frac{N_s \cdot l}{E_s \cdot A_s} = \frac{N_c \cdot l}{E_c \cdot A_c}$$

# **Úloha 3:** Tuhá deska zavěšená na soustavě táhel

**Předpoklad:** Pružné chování materiálu táhel, tuhá deska.




Neznámé v úloze: $N_1; N_2 \dots N_n$

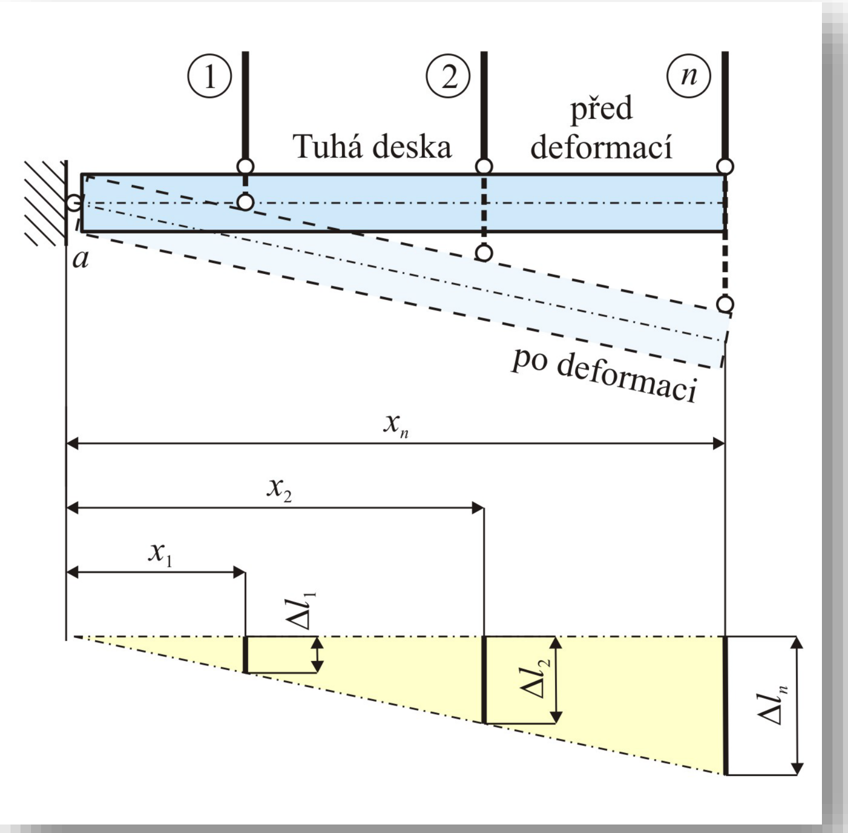
**Podmínka rovnováhy**:

$$\boxed{\sum M_a = 0:}$$

$$N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F = 0$$

**Deformační podmínka**:

$$\boxed{\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2}}$$



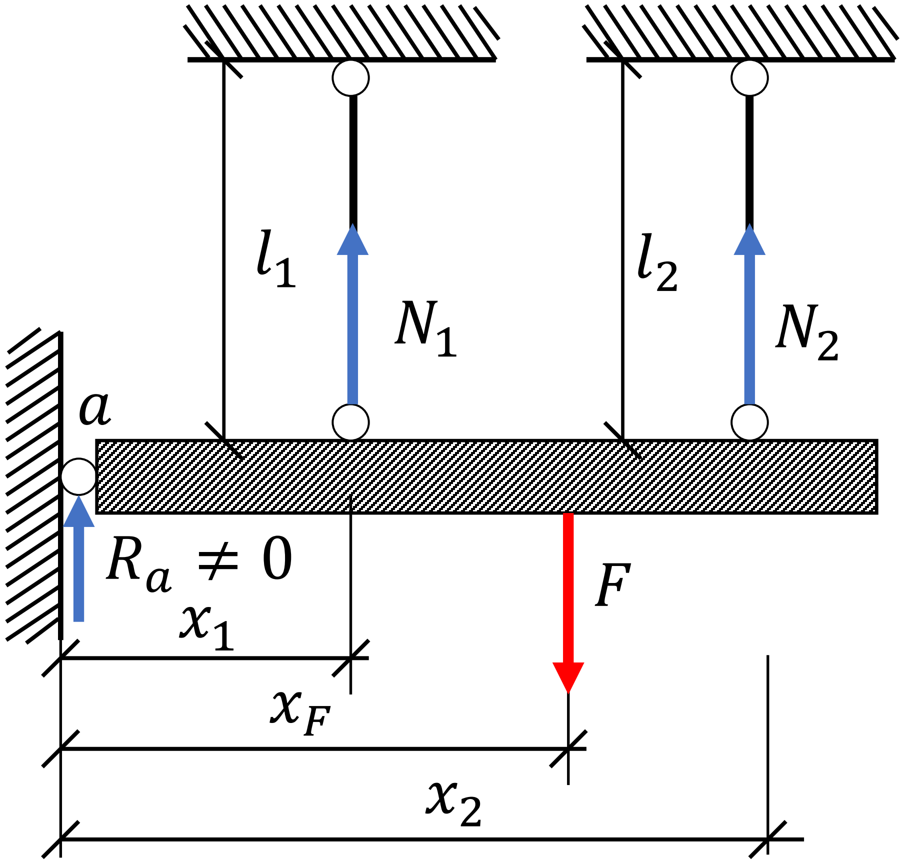

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

# **Úloha 3:** Tuhá deska zavěšená na soustavě táhel

**Předpoklad:** Pružné chování materiálu táhel, tuhá deska.

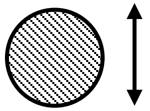
**Zadání:**




**Geometrie:** $l_1 = l_2 = 2\ \mathrm{m}$

$x_1 = 3\ \mathrm{m}$
$x_2 = 5\ \mathrm{m}$
$x_F = 4\ \mathrm{m}$

**Průřez táhel:**



$d_1 = d_2 = 20\ \mathrm{mm}$

$A_1 = A_2 = 3{,}14 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$

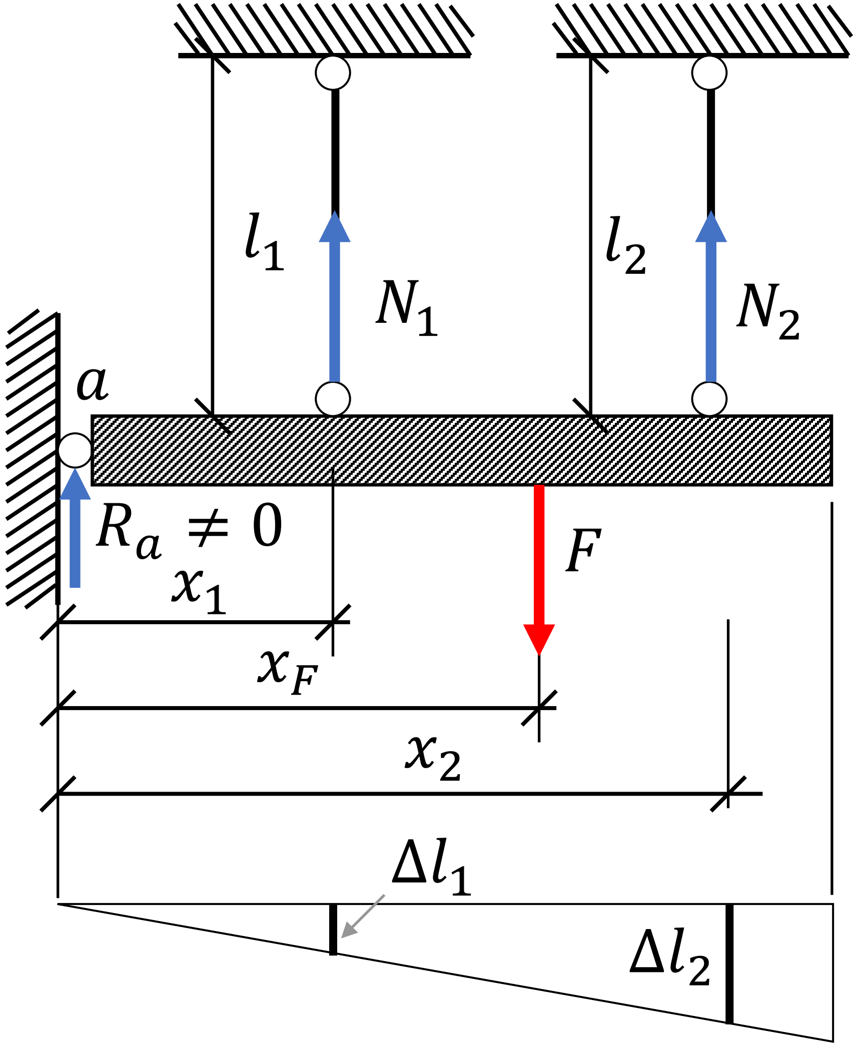
**Zatížení:** $F = 80\ \mathrm{kN}$

**Materiál:** Ocel S235 $\gamma_M = 1{,}15$

$E = 210\ \mathrm{GPa}$

# **Úloha 3:** Tuhá deska zavěšená na soustavě táhel

**Předpoklad:** Pružné chování materiálu táhel, tuhá deska.




## Podmínka rovnováhy:

$$\boxed{\sum M_a = 0:}$$

$$N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F = 0$$

$$N_1 = \frac{F \cdot x_F - N_2 \cdot x_2}{x_1}$$

## Deformační podmínka:

$$\boxed{\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2}}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

$$\frac{N_1 . l}{E . A} = \frac{N_2 . l}{E . A} . \frac{x_1}{x_2}$$

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

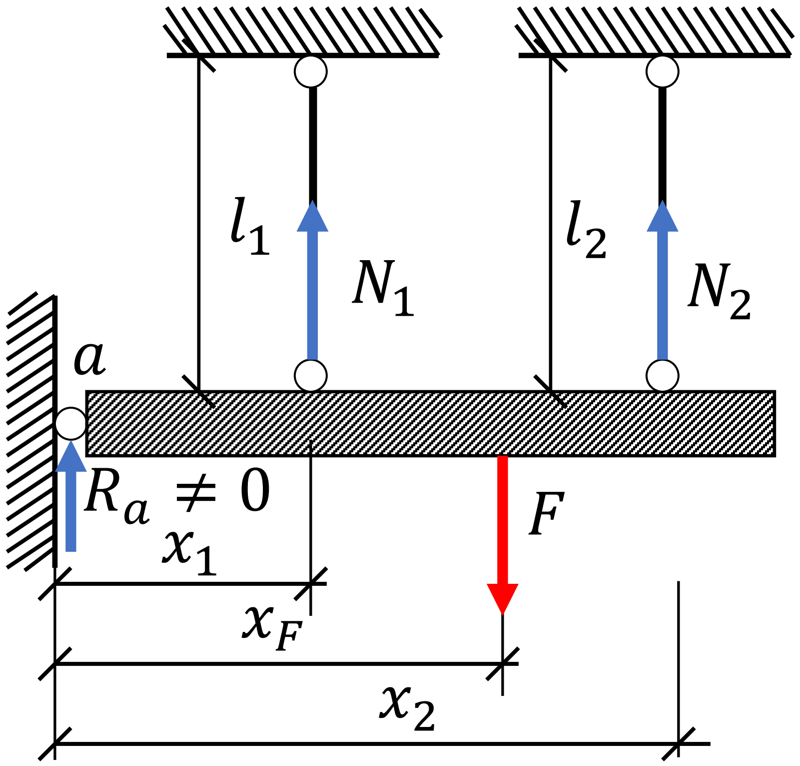
## Výsledky:

$$N_1 = F \cdot x_F \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$N_2 = F \cdot x_F \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

# **Úloha 3:** Tuhá deska zavěšená na soustavě táhel

**Předpoklad:** Pružné chování materiálu táhel, tuhá deska.




**Konkrétně:**

$$N_1 = F \cdot x_F \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = 28{,}235\ \text{kN}$$

$$N_2 = F \cdot x_F \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 47{,}059\ \text{kN}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = 0{,}856\ \text{mm} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = 1{,}427\ \text{mm}$$

**Kontrola výsledku:**

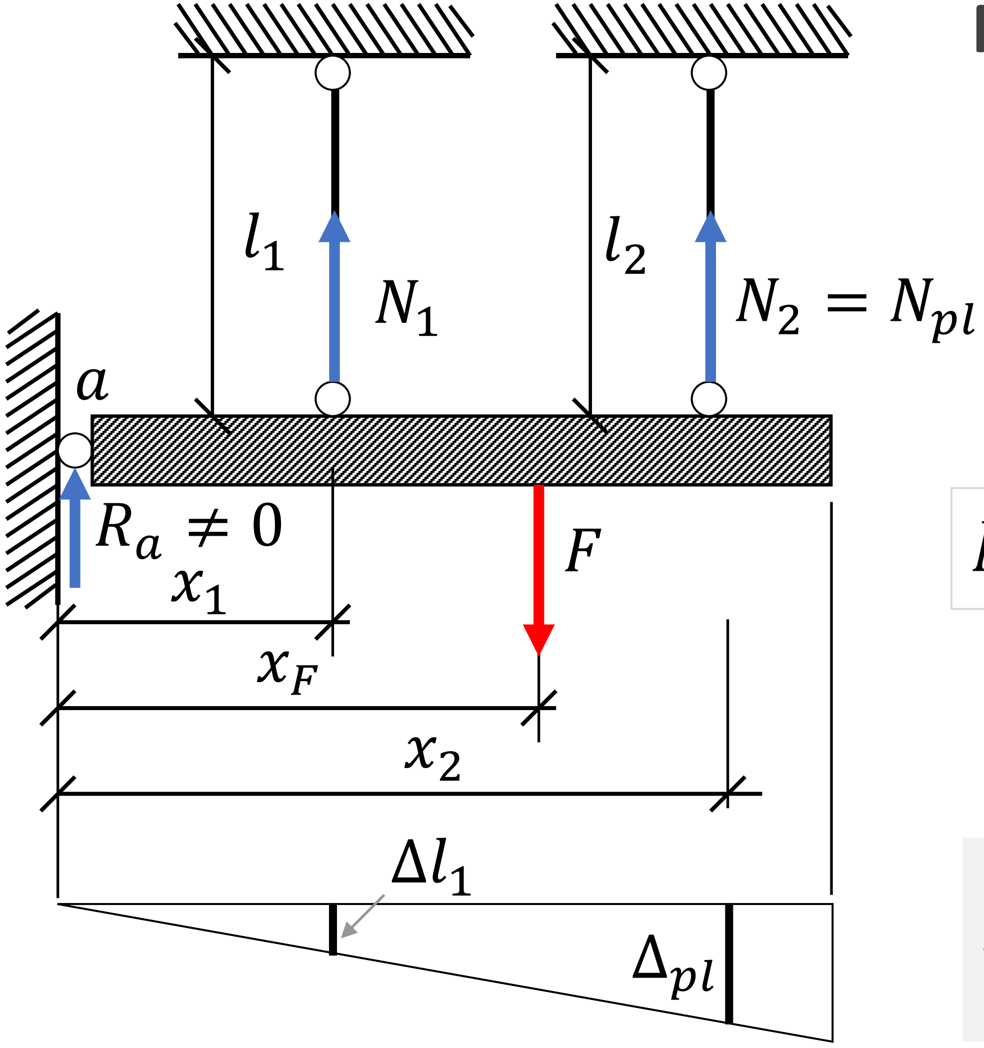
$$R_z = 0:$$

$$\sum M_c = 0: \quad R_a = \frac{F \cdot (x_2 - x_F) - N_1 \cdot (x_2 - x_1)}{x_2} = 4{,}706\ \text{kN}$$

$$R_a + N_1 + N_2 = F = 80\ \text{kN}$$

# Staticky neurčité soustavy v pružno-plastickém oboru

**Předpoklad:** Ideálně pružno-plastické chování materiálu táhel, tuhá deska.




## Mezní plastická únosnost v tahu

$$N_{pl} = f_{yd} \cdot A = 64{,}198 \text{ kN}$$

$$\Delta_{pl} = \frac{N_{pl} \cdot l}{E \cdot A} = 1{,}946 \text{ mm}$$

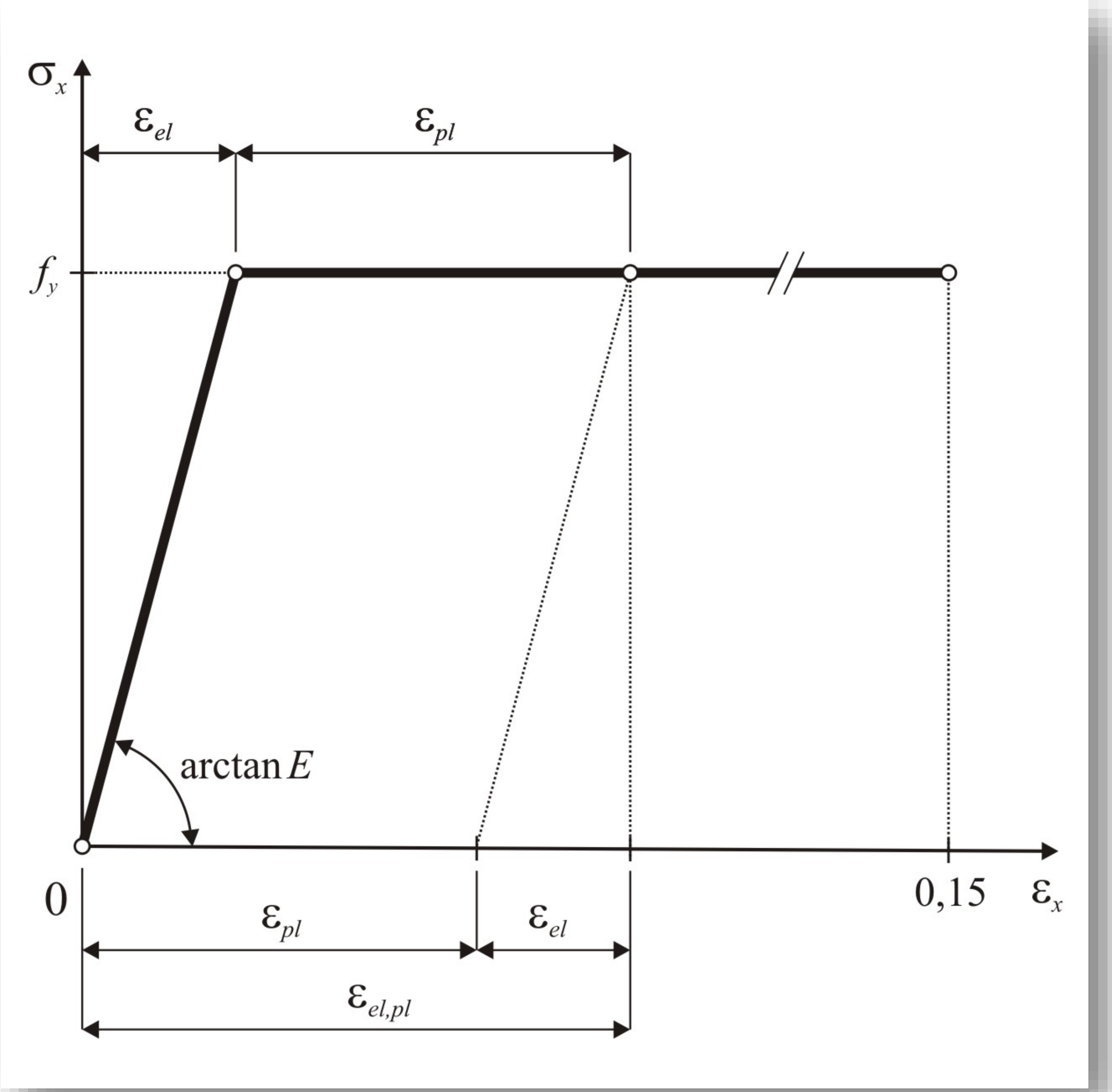
a) **Zplastizování prutu 2**:

$$\boxed{N_2 = N_{pl}} \quad \boxed{\Delta l_2 = \Delta_{pl}} \quad \Delta l_1 = \Delta_{pl} \cdot \frac{x_1}{x_2} = 1{,}168 \text{ mm}$$

$$N_1 = \Delta l_1 \cdot \frac{E \cdot A}{l} = 38{,}519 \text{ kN}$$

$$F = \frac{N_1 \cdot x_1 + N_{pl} \cdot x_2}{x_F} = 109{,}136 \text{ kN}$$

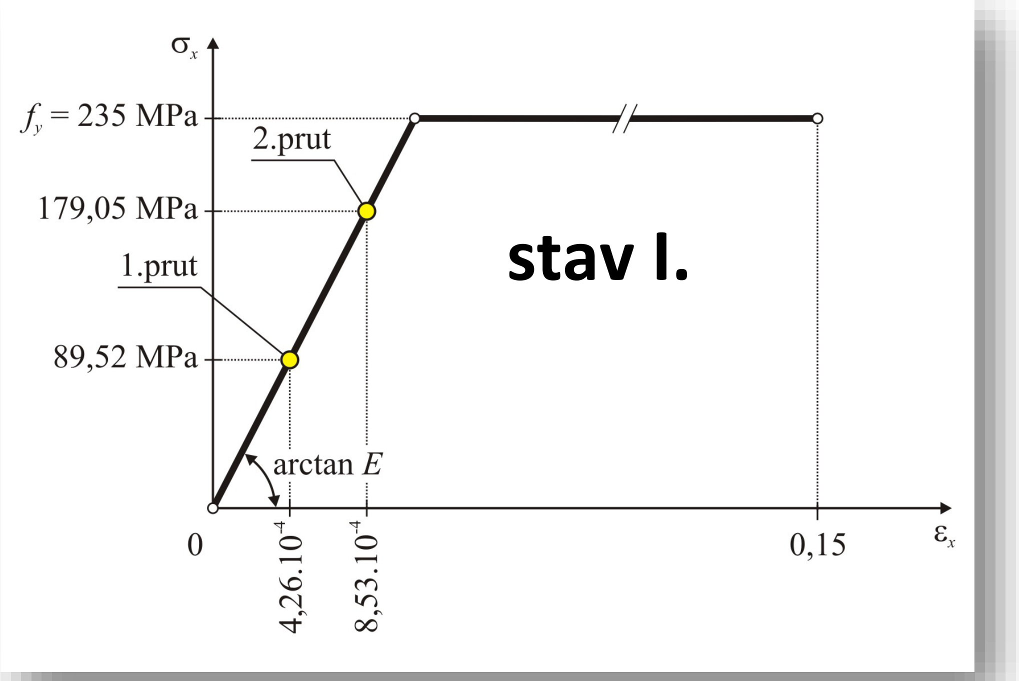
# Ideálně pružno-plastický materiál

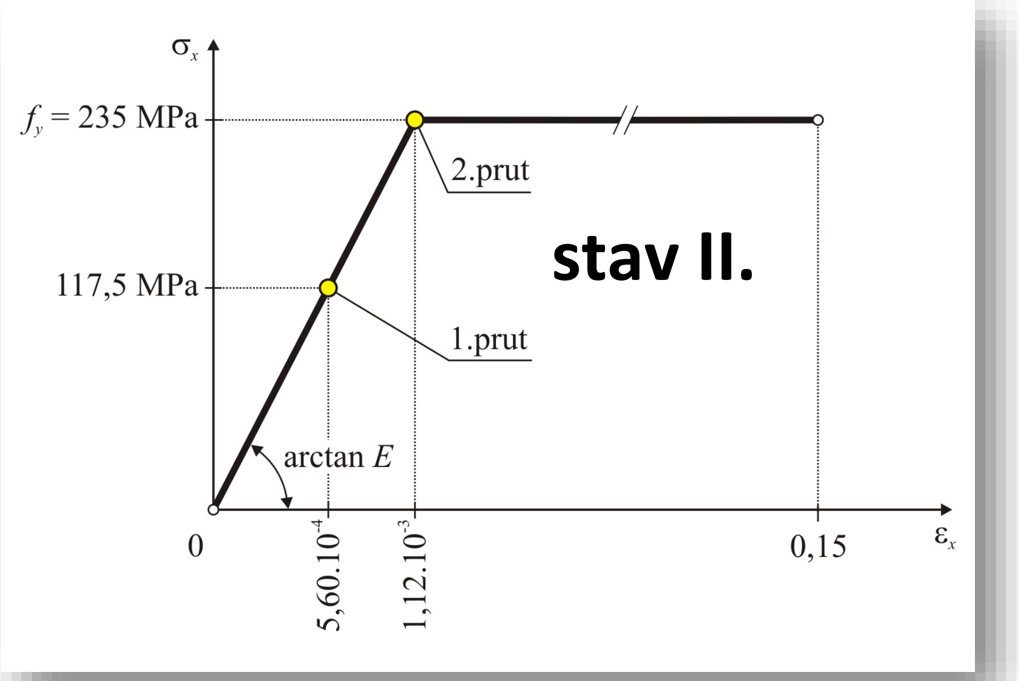



Pracovní diagram **ideálně pružno-plastického materiálu**

# Staticky neurčité soustavy v pružno-plastickém oboru

## Ideálně pružno-plastické chování materiálu táhel

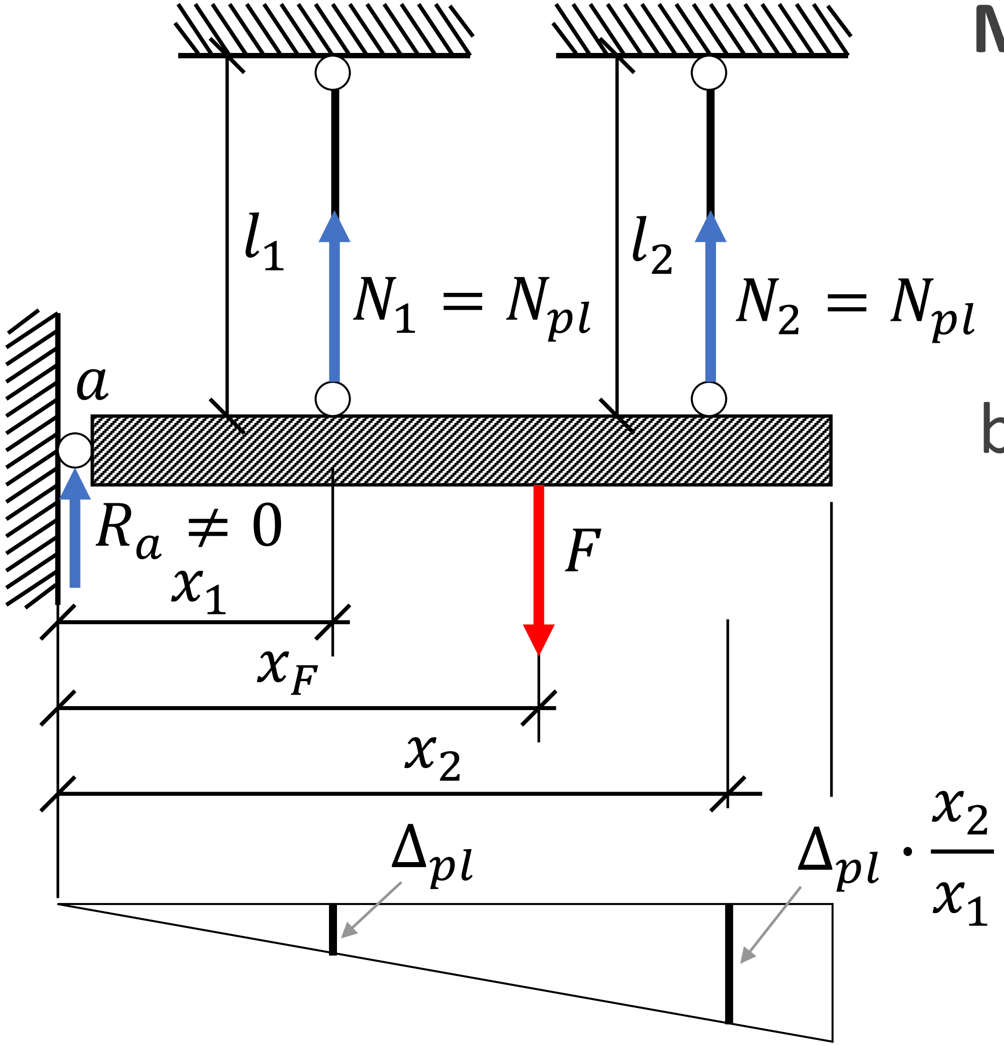



| stav | $F$ [kN] | $N_1$ [kN] | $\Delta l_1$ [mm] | $N_2$ [kN] | $\Delta l_2$ [mm] |
|---|---|---|---|---|---|
| **I.** | 80 | 28,235 | 0,856 | 47,059 | 1,427 |
| **II.** | 109,136 | 38,519 | 1,168 | 64,198 | 1,946 |

# Staticky neurčité soustavy v pružno-plastickém oboru

**Předpoklad:** Ideálně pružno-plastické chování materiálu táhel, tuhá deska.




## Mezní plastická únosnost v tahu

$$N_{pl} = f_{yd} \cdot A = 64{,}198 \text{ kN}$$

$$\Delta_{pl} = \frac{N_{pl} \cdot l}{E \cdot A} = 1{,}946 \text{ mm}$$

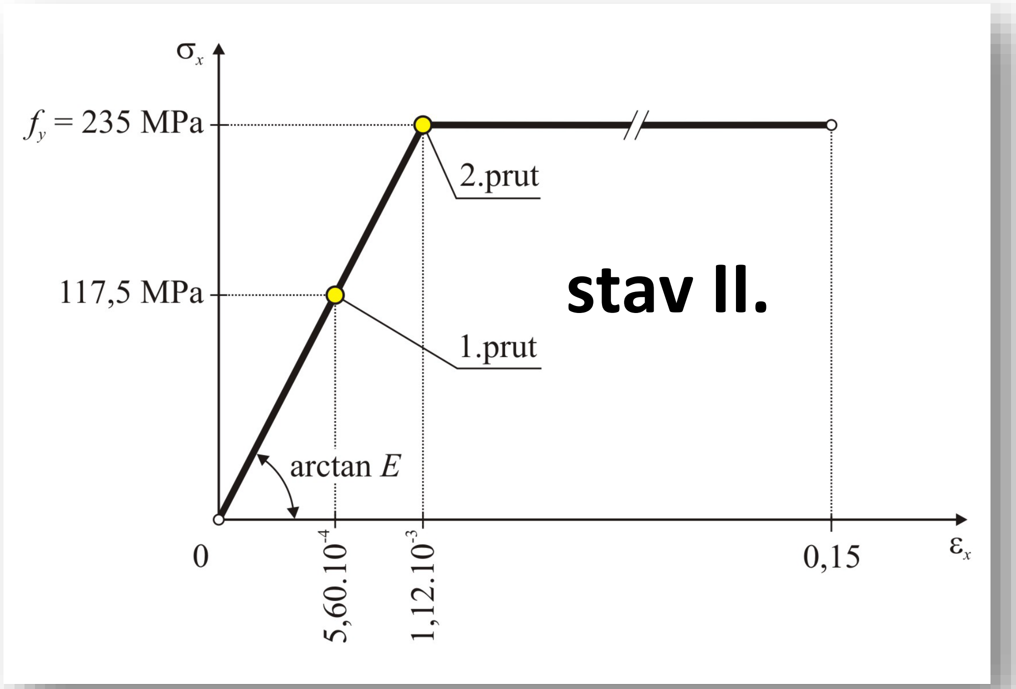
b) **Zplastizování prutů 1 i 2**:

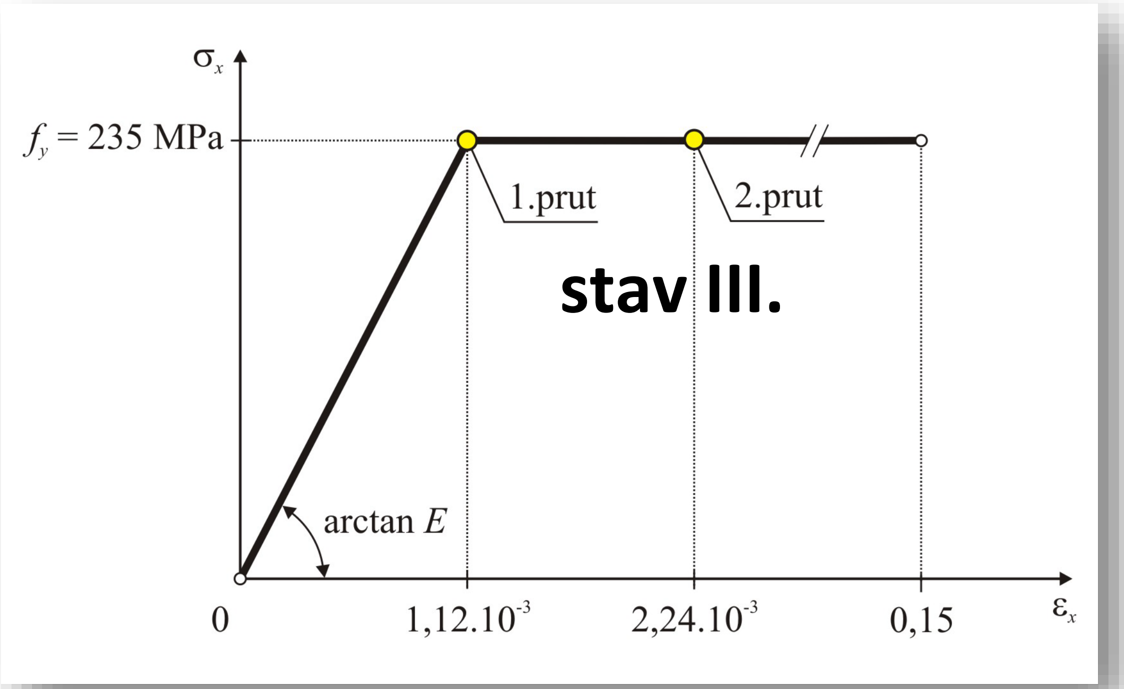
$$\boxed{N_1 = N_{pl}} \quad \boxed{N_2 = N_{pl}} \quad \Delta l_1 = \Delta_{pl} = 1{,}946 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \Delta_{pl} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 3{,}244 \text{ mm}$$

$$F = \frac{N_{pl} \cdot x_1 + N_{pl} \cdot x_2}{x_F} = 128{,}396 \text{ kN}$$

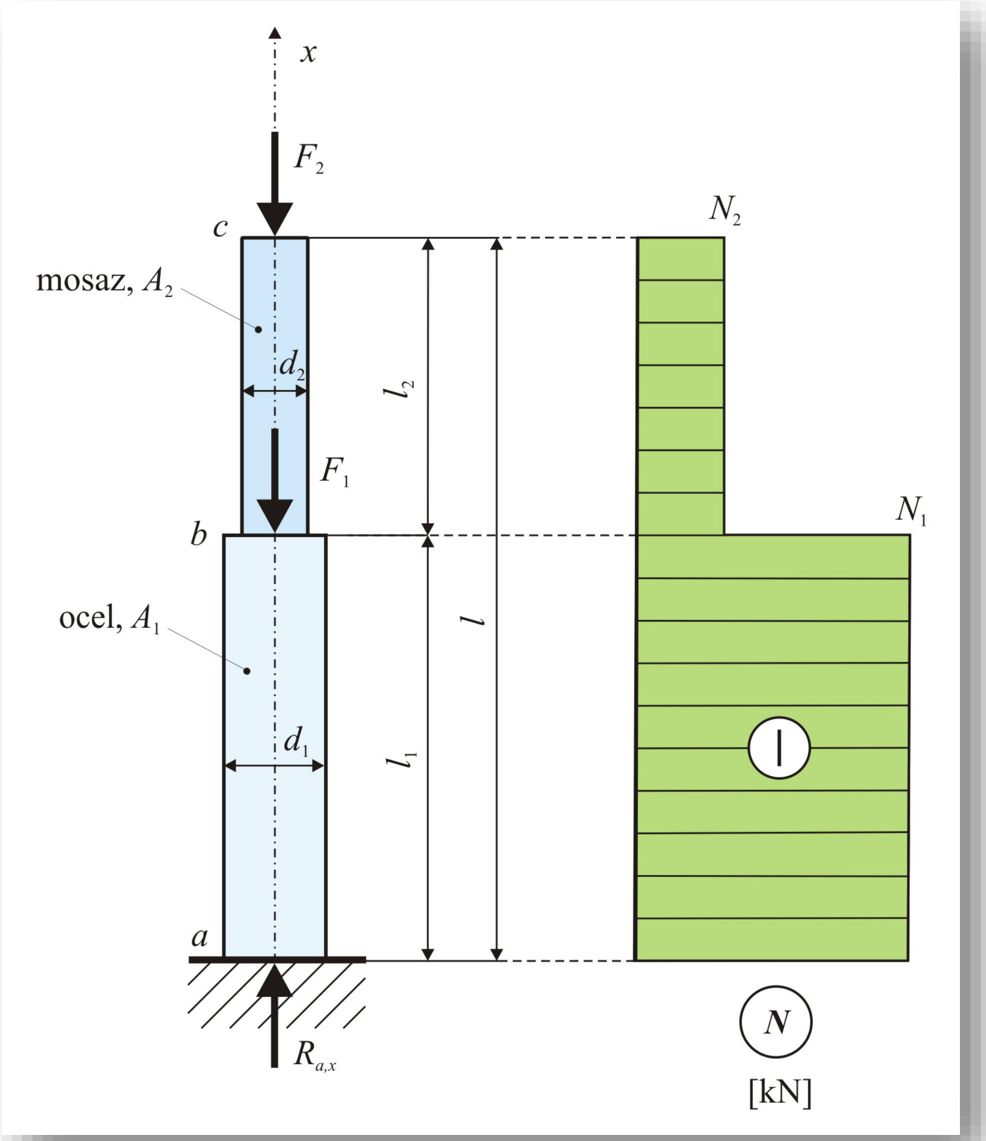
# Staticky neurčité soustavy v pružno-plastickém oboru

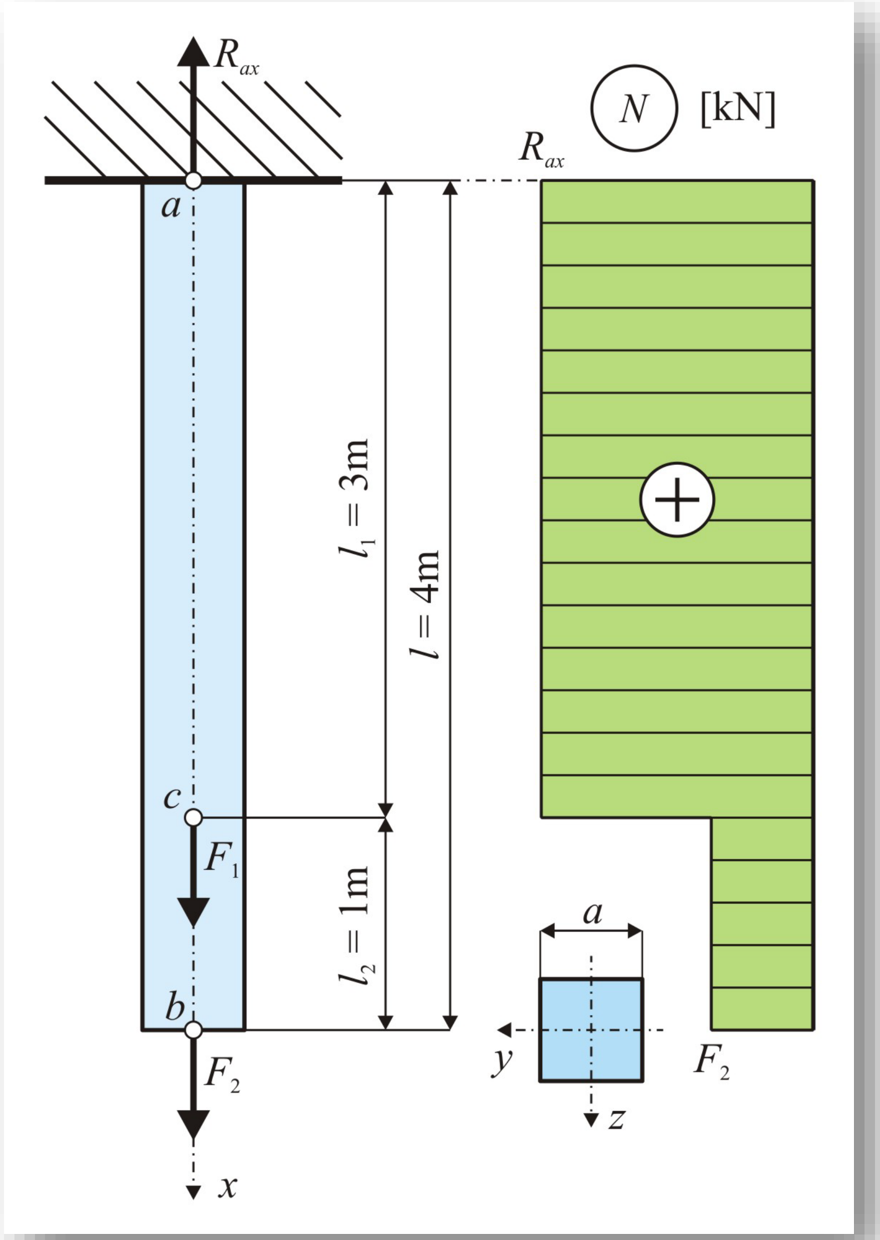



| stav | $F$ [kN] | $N_1$ [kN] | $\Delta l_1$ [mm] | $N_2$ [kN] | $\Delta l_2$ [mm] |
|---|---|---|---|---|---|
| **I.** | 80 | 28,235 | 0,856 | 47,059 | 1,427 |
| **II.** | 109,136 | 38,519 | 1,168 | 64,198 | 1,946 |
| **III.** | 128,396 | 64,198 | 1,946 | 64,198 | 3,244 |

# Příklady k procvičení



# Příklady k procvičení