

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ | KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY

## Téma 4: Deformace

- Deformace a posuny v tělese
- Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon
- Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů
- Deformace od rovnoměrné změny teploty

5/10/22 Průžnost a plasticita 0

0

---

---

---

---

---

---

---

---

### Deformace a posuny

Vlivem zatížení nebo změny teploty se tělesa deformují, což lze popsat pomocí **poměrných deformací** nebo složek **posunutí**.

**Poměrné deformace: délkové  $\varepsilon$**  (poměrné prodloužení nebo zkrácení)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

5/10/22 Deformace a posuny v tělese 1

1

---

---

---

---

---

---

---

---

### Deformace a posuny

**Poměrné deformace: úhlové  $\gamma$**  (zkosení)

**Teorie malých deformací:**  $\varepsilon \ll 1 \quad \gamma \ll 1$

**Matematická zjednodušení:**  $\tan \gamma \approx \gamma$

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta x}{dy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\Delta y}{dz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\Delta z}{dx}$$

5/10/22 Deformace a posuny v tělese 2

2

---

---

---

---

---

---

---

---

### Poměrné deformace

**Délkové** (poměrné délkové deformace, poměrné zkrácení nebo prodloužení):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

**Úhlové** (poměrné úhlové deformace, zkosení):

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta x}{dy} \quad \gamma_{yz} = \frac{\Delta y}{dz} \quad \gamma_{zx} = \frac{\Delta z}{dx}$$

5/10/22 Deformace a posuny v tělese 3

3

---

---

---

---

---

---

---

---

### Stav přetvoření tělesa

Stav přetvoření tělesa lze popsat tenzorem, definovaném v pravouhlé soustavě.

**Tenzor deformace tělesa:** Pouze 6 složek přetvoření

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \text{sym.} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

**Vektor deformace:**

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\}^T$$

Geometrii deformovatelného tělesa lze popsat jednoznačně pomocí složek **posunů** libovolného bodu:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + u(x, y, z) \\ \bar{y} &= y + v(x, y, z) \\ \bar{z} &= z + w(x, y, z) \end{aligned}$$

5/10/22 Deformace a posuny v tělese 4

4

---

---

---

---

---

---

---

---

### Geometrické rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{dx + u(b) - u(a) - dx}{dx} = \frac{u(x+dx, y) - u(x, y)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

5/10/22 Deformace a posuny v tělese 5

5

---

---

---

---

---

---

---

---

### Geometrické rovnice

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \frac{u(c) - u(a)}{dy} + \frac{v(b) - v(a)}{dx} = \frac{u(x, y + dy) - u(x, y)}{dy} + \frac{v(x + dx, y) - v(x, y)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Deformace a posuny v tělese 6

6

---

---

---

---

---

---

---

---

### Geometrické rovnice

Geometrické rovnice vyjadřují vztahy mezi složkami **poměrných deformací** v tělese a složkami **posunů** libovolných bodů v tělese.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Deformace a posuny v tělese 7

7

---

---

---

---

---

---

---

---

### Pracovní diagram

Vztah **napětí** vs. **deformace** vyjadřuje tzv. **pracovní diagram**. Závisí na fyzikálních a mechanických vlastnostech materiálů.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta \vec{A}} \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon 8

8

---

---

---

---

---

---

---

---

### Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



Tahová zkouška oceli

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

5/10/22 9

---

---

---

---

---

---



---

---

9

### Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



Tahová zkouška oceli

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

5/10/22 10

---

---

---

---

---

---



---

---

10

### Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



Tahová zkouška oceli

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

5/10/22 11

---

---

---

---

---

---

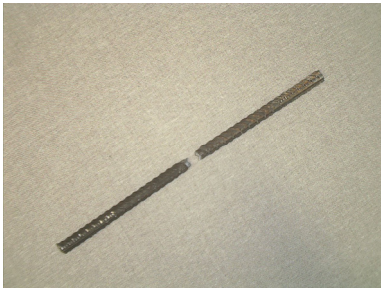
---

---

11

### Základní typy namáhání

1. Osové namáhání - tah



Přetržený vzorek oceli po tahové zkoušce

5/10/22

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

12

12

---

---

---

---

---

---

---

---

### Základní typy namáhání

1. Osové namáhání - tah



Přetržené vzorky oceli po tahové zkoušce

5/10/22

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

13

13

---

---

---

---

---

---

---

---

### Výchozí předpoklady klasické teorie lineární pružnosti



Tahová zkouška oceli, experimentální určení pracovního diagramu

5/10/22

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

14

14

---

---

---

---

---

---

---

---

### Výchozí předpoklady klasické teorie lineární pružnosti

Tahová zkouška oceli, experimentální určení pracovního diagramu

5/10/22 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon 15

15

---

---

---

---

---

---

---

---

### Výchozí předpoklady klasické teorie lineární pružnosti

Nelineární pružnost, fyzikální nelinearita

5/10/22 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon 16

16

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lineárně pružný materiál, Hookův zákon

**Tah**

**Hookův zákon**

$$\tan \varphi = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = E \rightarrow \sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

Platí:  $\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad \sigma_x = \frac{N}{A}$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = E \cdot \epsilon_x = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$\sigma_x$  ... Normálové napětí [Pa]  
 $\epsilon_x$  ... Poměrná délková deformace [-]  
 $E$  ... Modul pružnosti v tahu a tlaku [Pa]

5/10/22 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon 17

17

---

---

---

---

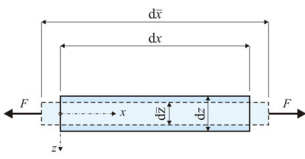
---

---

---

---

### Lineárně pružný materiál, Hookův zákon



$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \cdot \epsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

$\nu$  ... **Poissonův součinitel příčné deformace** [-] (ný)

$$\nu \leq 0.5$$

Při současném působení  $\sigma_x, \sigma_y$  a  $\sigma_z$ :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

Fyzikální rovnice – 1. část

Obdobně:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

5/10/22

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

18

18

---

---

---

---

---

---

---

---

### Historické osobnosti



**Robert Hooke** (1635 - 1703)

Anglický fyzik, přírodovědec a architekt, který jako první vyslovil v roce 1676 zákon o úměrnosti mezi napětím a přetvořením.



**Thomas Young** (1773 - 1829)

Anglický učenec, v roce 1807 definoval matematicky **Hookův zákon** (modul pružnosti  $E$ ).



**Simeon Denis Poisson** (1781 - 1840)

Francouzský matematik, zabývající se chováním materiálů a matematickou teorií pružnosti.

5/10/22

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

19

19

---

---

---

---

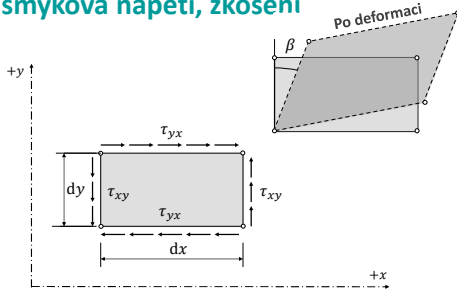
---

---

---

---

### Smyk, smyková napětí, zkosení



5/10/22

Fyzikální vztahy mezi napětím a deformací, Hookův zákon

20

20

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lineárně pružný materiál, Hookův zákon ve smyku

**Smyk**

**Hookův zákon ve smyku**

$$\tan \varphi = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = G \rightarrow \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

obdobně  $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$      $\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$

$G$  ... **modul pružnosti ve smyku** [Pa]  
 $\tau_{xy}$  ... smykové napětí [Pa]  
 $\gamma_{xy}$  ... poměrná úhlová deformace (zkosení) [-]

**Fyzikální rovnice – 2. část**

5/10/22 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon 21

21

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fyzikální rovnice

Fyzikální rovnice vyjadřují vztahy mezi složkami **poměrných deformací** a složkami **napětí** v tělese.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

5/10/22 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon 22

22

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fyzikální konstanty

Fyzikální (materiálové) konstanty  $E$ ,  $G$  a  $\nu$  (ný) **nejsou** u izotropního materiálu vzájemně **nezávislé**.

$$\frac{E}{G} = 2 \cdot (1 + \nu) \quad 0 \leq \nu \leq 0,5 \rightarrow \frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}$$

Orientační hodnoty fyzikálních konstant některých materiálů:

Materiál	$E$	$G$	$\nu$
Ocel	210 000 MPa	81 000 MPa	0,3
Sklo	70 000 MPa	28 000 MPa	0,25
Žula	40 000 až 100 000 MPa	-	0,2
Jehličnaté dřevo	$E_{  } = 10\,000$ MPa, $E_{\perp} = 300$ MPa	600 MPa	-

5/10/22 Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů 23

23

---

---

---

---

---

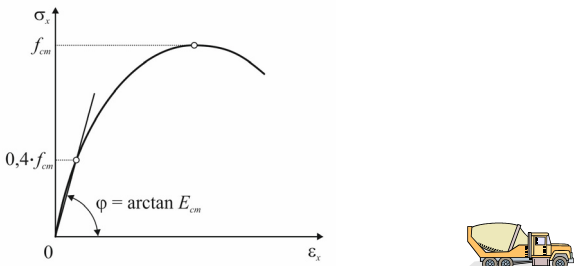
---

---

---



### Pracovní diagram betonu v tlaku



24

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fyzikální konstanty betonu

Třída betonu	$E_{cm}$	$G$	$\nu$
C12/15	27 000 MPa	0,42 · E	0,2
C16/20	29 000 MPa		
C20/25	30 000 MPa		
C25/30	31 000 MPa		
C30/37	33 000 MPa		
C35/45	34 000 MPa		
C40/50	35 000 MPa		
C45/55	36 000 MPa		
C50/60	37 000 MPa		

25

---

---

---

---

---

---

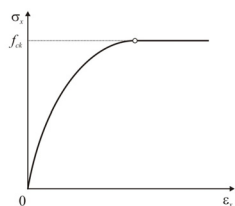
---

---

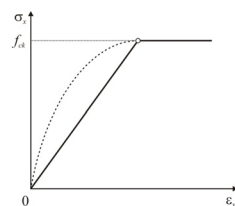
### Návrhový pracovní diagram betonu v tlaku

Návrhové pracovní diagramy betonu v tlaku

**Parabolicko-rektangulární**



**Bilineární**



26

---

---

---

---

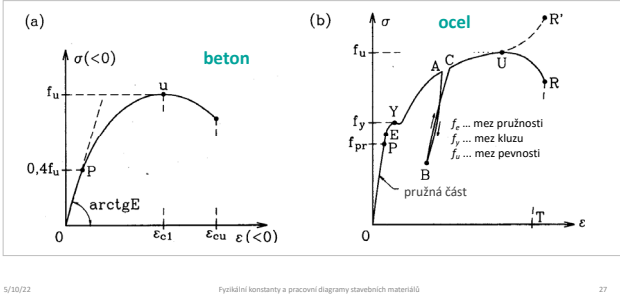
---

---

---

---

### Pracovní diagramy betonu a oceli



27

---

---

---

---

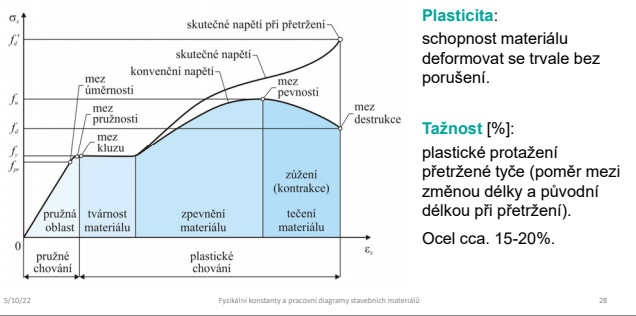
---

---

---

---

### Pracovní diagram oceli



**Plasticita:**  
schopnost materiálu deformovat se trvale bez porušení.

**Tažnost [%]:**  
plastické protažení přetřžené tyče (poměr mezi změnou délky a původní délkou při přetržení).  
Ocel cca. 15-20%.

28

---

---

---

---

---

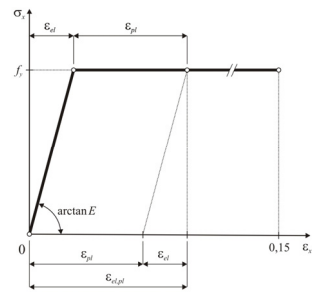
---

---

---

### Pracovní diagram ideálně pružno-plastického materiálu

Pracovní diagram ideálně pružno-plastického materiálu



29

---

---

---

---

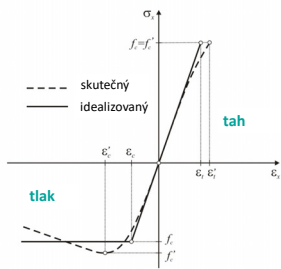
---

---

---

---

### Pracovní diagram dřeva



5/10/22

Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů

30

30

---

---

---

---

---

---

---

---

### Příklad 1:

#### Zadání:

Určete prodloužení ocelové tyče délky  $l = 2$  m, ve které nabývá tahové normálové napětí hodnotu  $\sigma_x = 120$  MPa. Ocel považujte za lineárně pružný materiál, který se řídí Hookovým zákonem.

#### Řešení:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{120 \text{ MPa}}{210\,000 \text{ MPa}} = 5,7143 \cdot 10^{-4} [-]$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon_x \cdot l = 5,7143 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \text{ m} = 1,1429 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong 1,14 \text{ mm}$$

5/10/22

Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů

31

31

---

---

---

---

---

---

---

---

### Příklad 2:

#### Zadání:

Ocelová tyč o délce  $l = 3,6$  m byla protažena o  $\Delta l_{el,pl} = 18$  mm. Určete trvalou deformaci  $\Delta l_{pl}$  po odlehčení, pokud je modul pružnosti v tahu a tlaku  $E = 200\,000$  MPa a napětí na mezi kluzu oceli  $f_y = 355$  MPa.

#### Řešení:

Celková poměrná deformace:

$$\varepsilon_{x,el,pl} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,018 \text{ m}}{3,6 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-3} [-]$$

Mezní pružná poměrná deformace:

$$\varepsilon_{x,el} = \frac{f_y}{E} = \frac{355 \text{ MPa}}{200\,000 \text{ MPa}} = 1,775 \cdot 10^{-3} [-]$$

Poměrná deformace v plastické oblasti:

$$\varepsilon_{x,el} = 1,775 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{x,el,pl} = 5 \cdot 10^{-3} \ll 0,15$$

5/10/22

Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů

32

32

---

---

---

---

---

---

---

---

**Příklad 2:**

Platí:

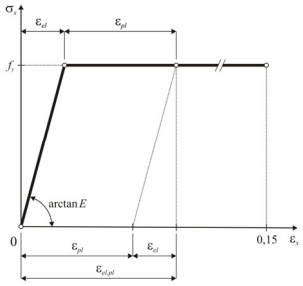
$$\epsilon_{x,el,pl} = \epsilon_{x,el} + \epsilon_{x,pl} \rightarrow$$

$$\epsilon_{x,pl} = \epsilon_{x,el,pl} - \epsilon_{x,el} =$$

$$= (5 - 1,775) \cdot 10^{-3} = 3,225 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{x,pl} = \frac{\Delta l_{pl}}{l} \rightarrow \Delta l_{pl} = \epsilon_{x,pl} \cdot l$$

$$\Delta l_{pl} = 3,225 \cdot 10^{-3} \cdot 3,6 \text{ m}$$

$$= 11,61 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \mathbf{11,61 \text{ mm}}$$


5/10/22 Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů 33

33

---

---

---

---

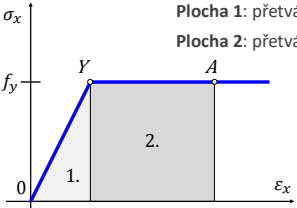
---

---

---

---

**Přetvárná energie, ideálně pružno-plastický materiál**




Plocha 1: přetvárná energie pružného materiálu  $E_{n,el}$

Plocha 2: přetvárná energie plastického materiálu  $E_{n,pl}$

$W \leq E_n$

**Namáhání nárazem:** Kinetická energie nárazu  $W = \frac{m \cdot v^2}{2}$



5/10/22 Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů 34

34

---

---

---

---

---

---

---


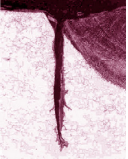
---

**Omezené využití plastických vlastností materiálu**

**Důležité poznámky:**

- Pracovní diagram každého materiálu závisí na rychlosti zatěžování a teplotě.
- Porušení – ztráta pevnosti, je mnohotvárný jev, při kterém někdy vznikají tvárně-plastické deformace, jindy je povaha křehkého lomu (při nízkých teplotách, koncentraci napětí), který vzniká náhle.
- Při proměnném napětí opakujícím se v mnoha cyklech se uplatní tzv. únavové porušení při napětích podstatně nižších než je  $f_y$ .

Příklady únavového porušení ocelových konstrukcí

5/10/22 Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů 35

35

---

---

---

---

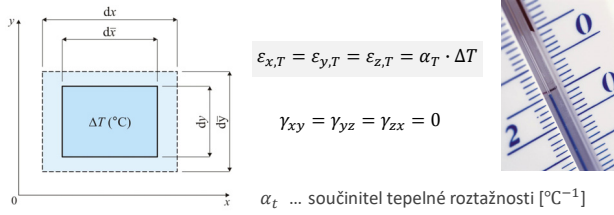
---

---

---

---

## Deformace od rovnoměrné změny teploty



<b>Ocel</b>	$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$	<b>Dřevo</b>	$\alpha_t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$
<b>Beton</b>	$\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$	<b>Zdivo</b>	$\alpha_t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$

5/10/22

Deformace od rovnoměrné změny teploty

36

36

---



---



---



---



---



---



---



---

### Příklad 3:

#### Zadání:

Ocelový most o délce 80 m je rovnoměrně zahřátý na teplotu 25 °C. O kolik se díky tomuto oteplení prodlouží jeho délka?

#### Řešení:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{x,T} = \alpha_T \cdot \Delta T \rightarrow \Delta l = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l$$

$$\Delta l = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot 25 \text{ } ^{\circ}\text{C} \cdot 80 \text{ m} = 0,024 \text{ m} = 24 \text{ mm}$$

5/10/22

Deformace od rovnoměrné změny teploty

37

37

---



---



---



---



---



---



---



---