

Téma 4: Deformace

- Deformace a posuny v tělese
- Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi, Hookův zákon
- Fyzikální konstanty a pracovní diagramy stavebních materiálů
- Deformace od rovnoměrné změny teploty

Deformace a posuny

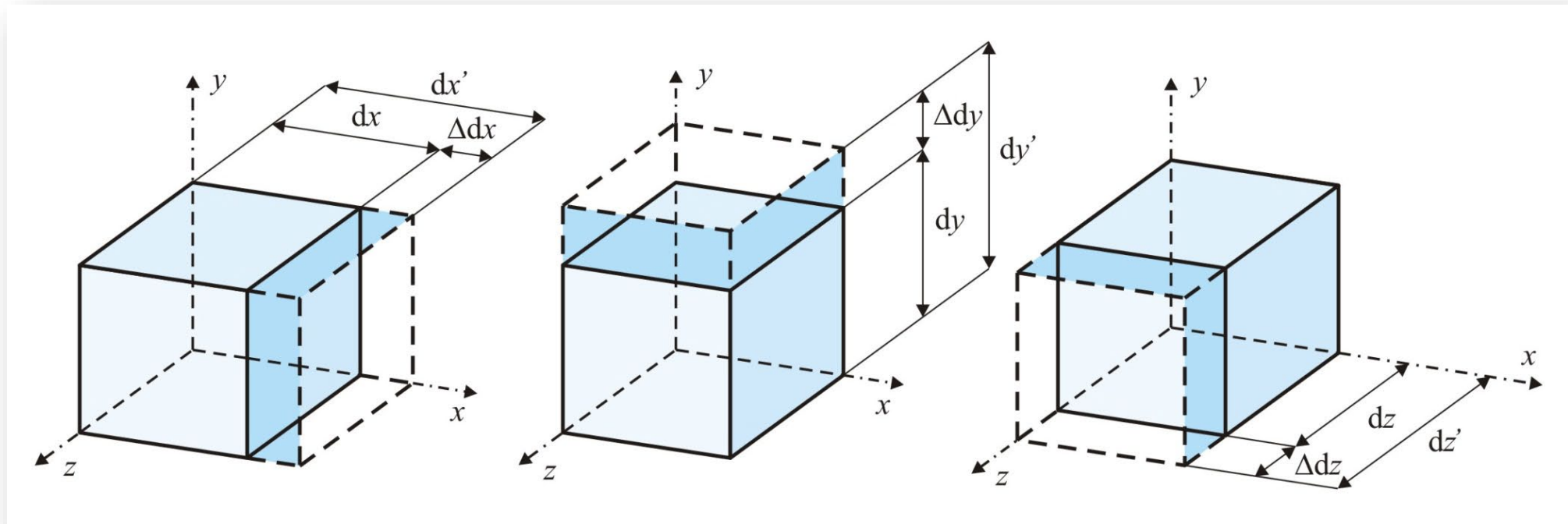
Vlivem zatížení nebo změny teploty se tělesa deformují, což lze popsat pomocí **poměrných deformací** nebo složek **posunutí**.

Poměrné deformace: délkové ε (poměrné prodloužení nebo zkrácení)

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$



Deformace a posuny

Poměrné deformace:
úhlové γ (zkosení)

Teorie malých deformací:

$$\varepsilon \ll 1 \quad \gamma \ll 1$$

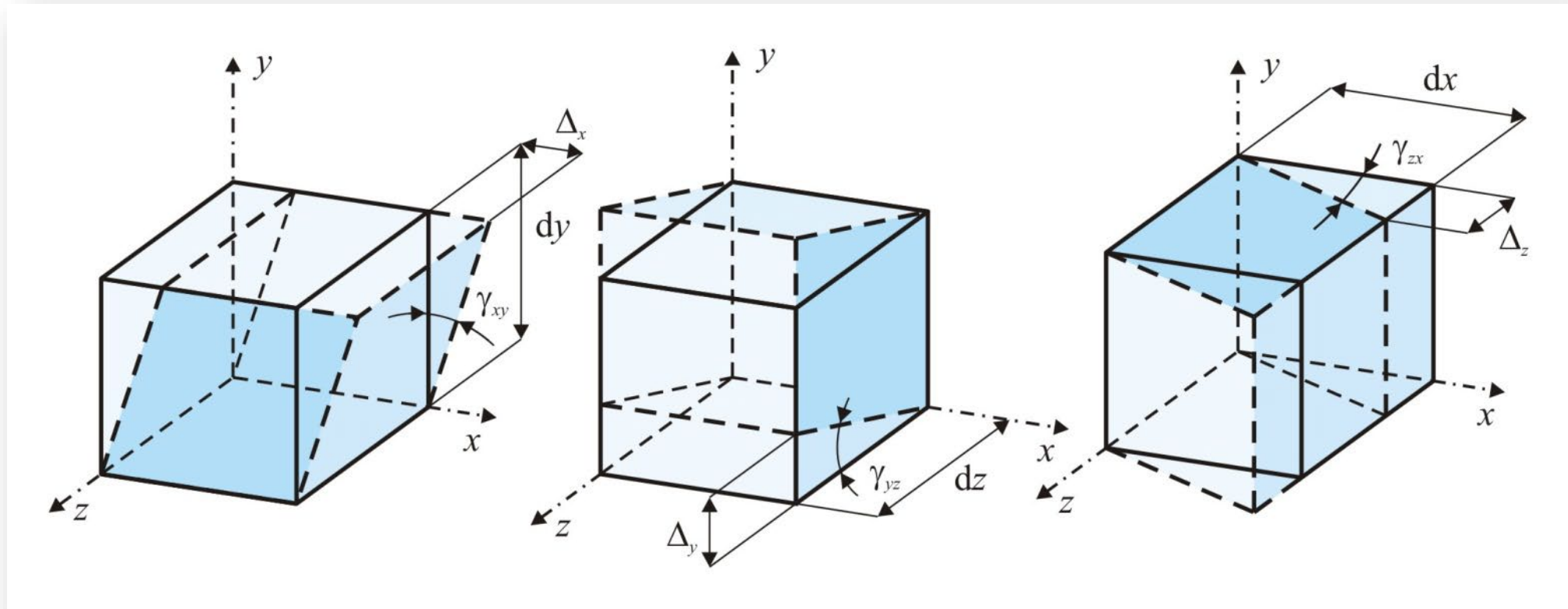
Matematická zjednodušení:

$$\tan \gamma \approx \gamma$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta_x}{dy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\Delta_y}{dz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\Delta_z}{dx}$$



Poměrné deformace

Délkové (poměrné délkové deformace, poměrné zkrácení nebo prodloužení):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

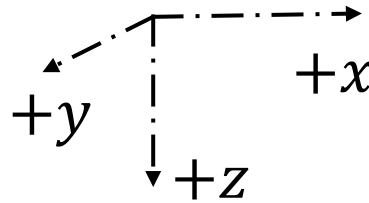
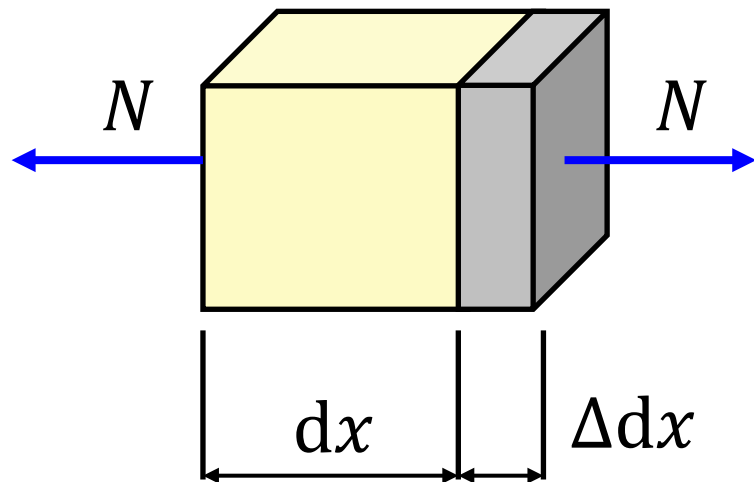
Úhlové (poměrné úhlové deformace, zkosení):

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta_x}{dy}$$

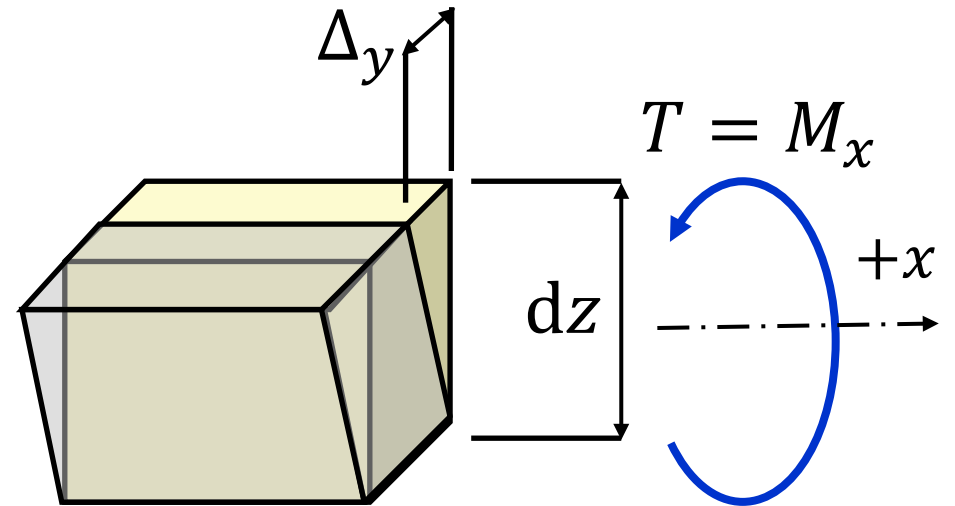
$$\gamma_{yz} = \frac{\Delta_y}{dz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\Delta_z}{dx}$$

Prostý tah



Kroucení



Stav přetvoření tělesa

Stav přetvoření tělesa lze popsat tenzorem, definovaném v pravoúhlé soustavě.

Tenzor deformace tělesa:

Pouze 6 složek přetvoření

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Geometrii deformovatelného tělesa lze popsat jednoznačně pomocí složek

posunů libovolného bodu:

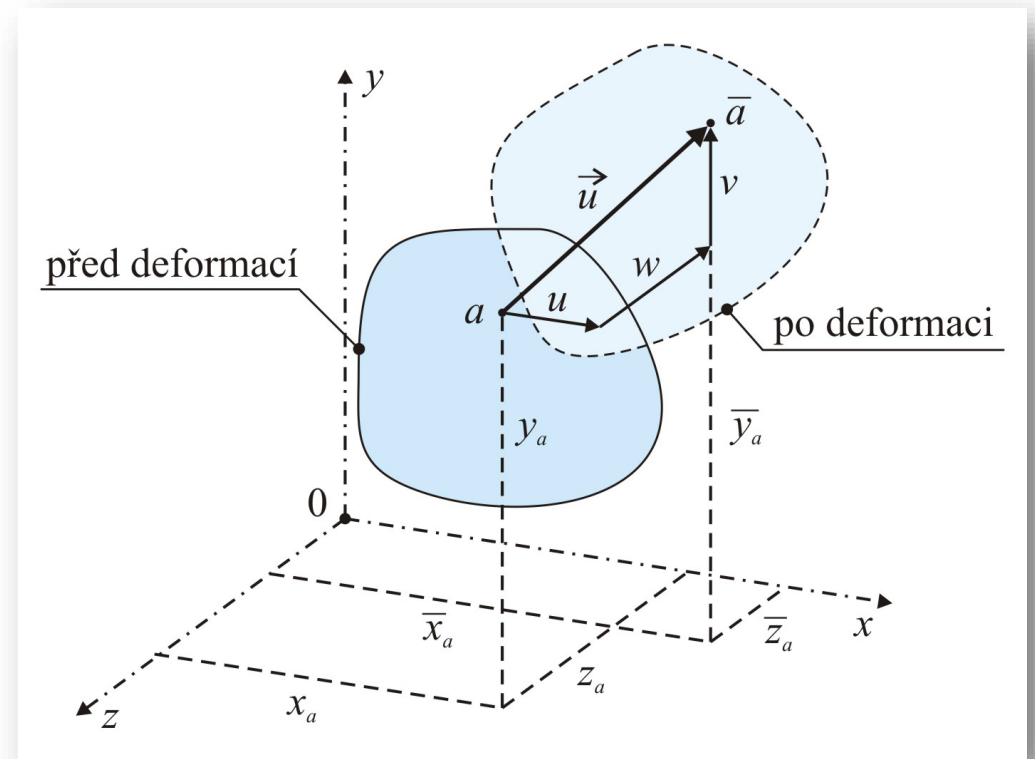
$$\bar{y} = y + v(x, y, z)$$

$$\bar{x} = x + u(x, y, z)$$

$$\bar{z} = z + w(x, y, z)$$

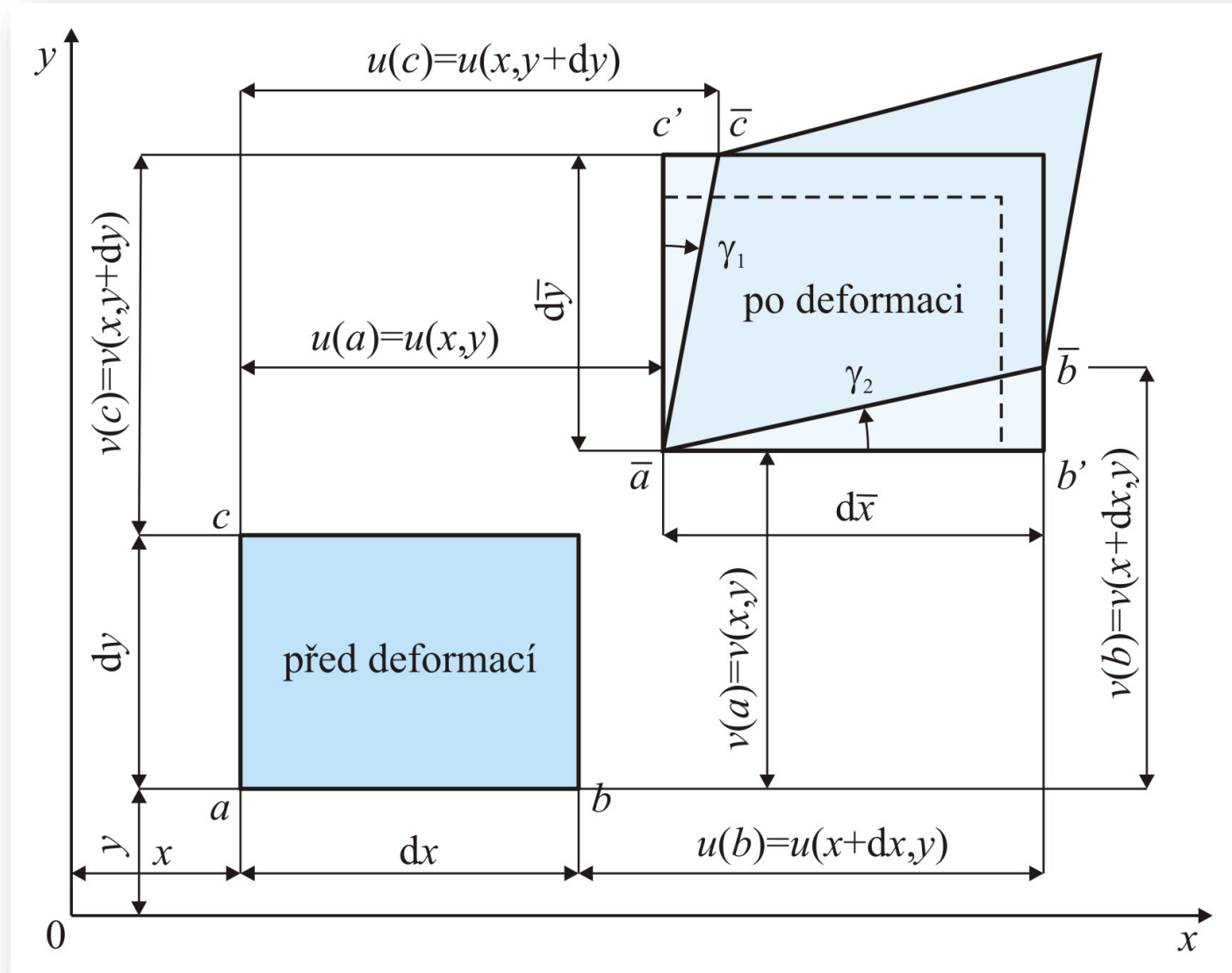
Vektor deformace:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\}^T$$



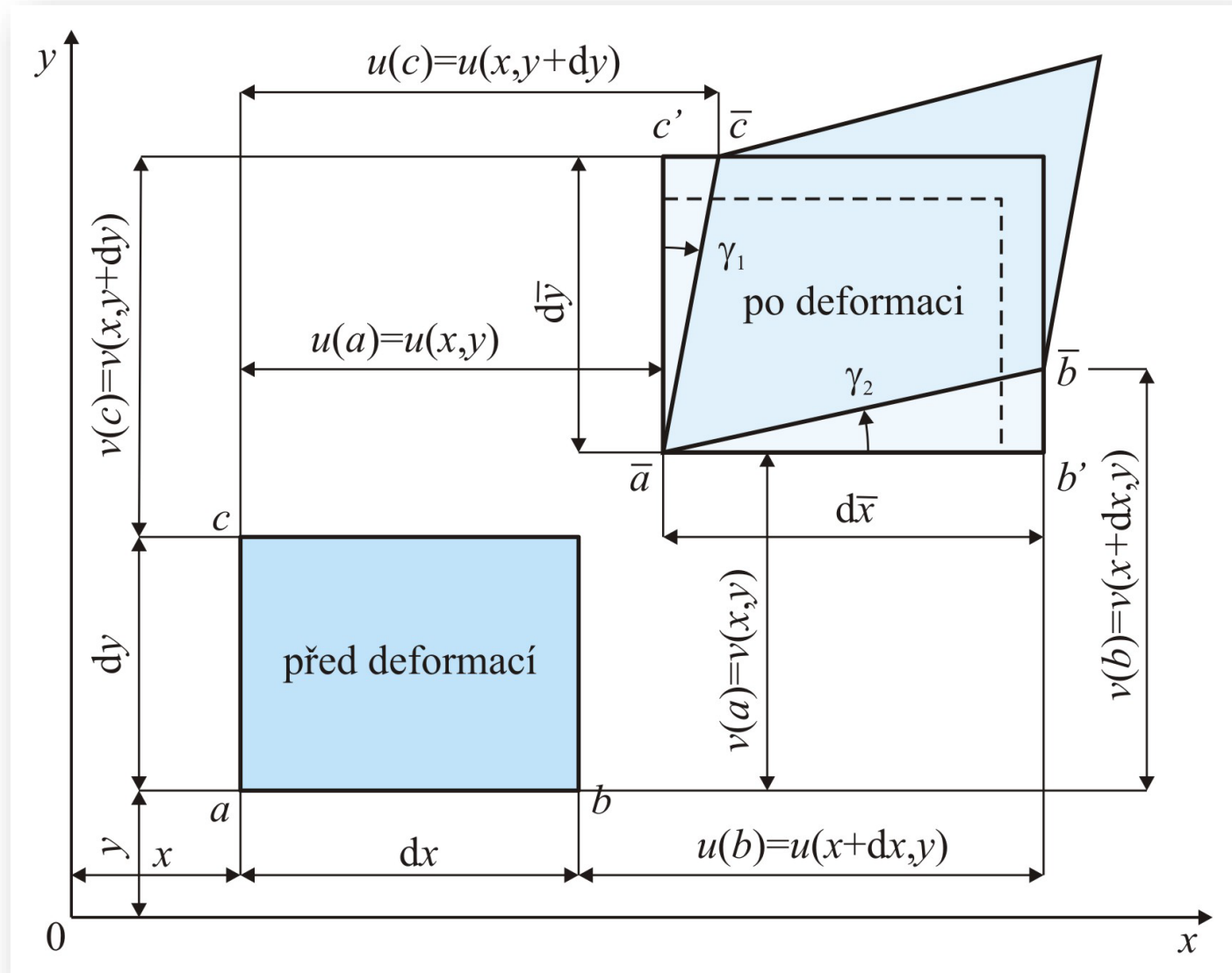
Geometrické rovnice

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \\
 &= \frac{dx + u(b) - u(a) - dx}{dx} = \\
 &= \frac{u(x + dx, y) - u(x, y)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}
 \end{aligned}$$



Geometrické rovnice

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \gamma_1 + \gamma_2 \approx \\
 &\approx \frac{u(c) - u(a)}{dy} + \frac{v(b) - v(a)}{dx} = \\
 &= \frac{u(x, y + dy) - u(x, y)}{dy} + \\
 &\frac{v(x + dx, y) - v(x, y)}{dx} = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned}$$



Geometrické rovnice

Geometrické rovnice vyjadřují vztahy mezi složkami **poměrných deformací** v tělese a složkami **posunů** libovolných bodů v tělese.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

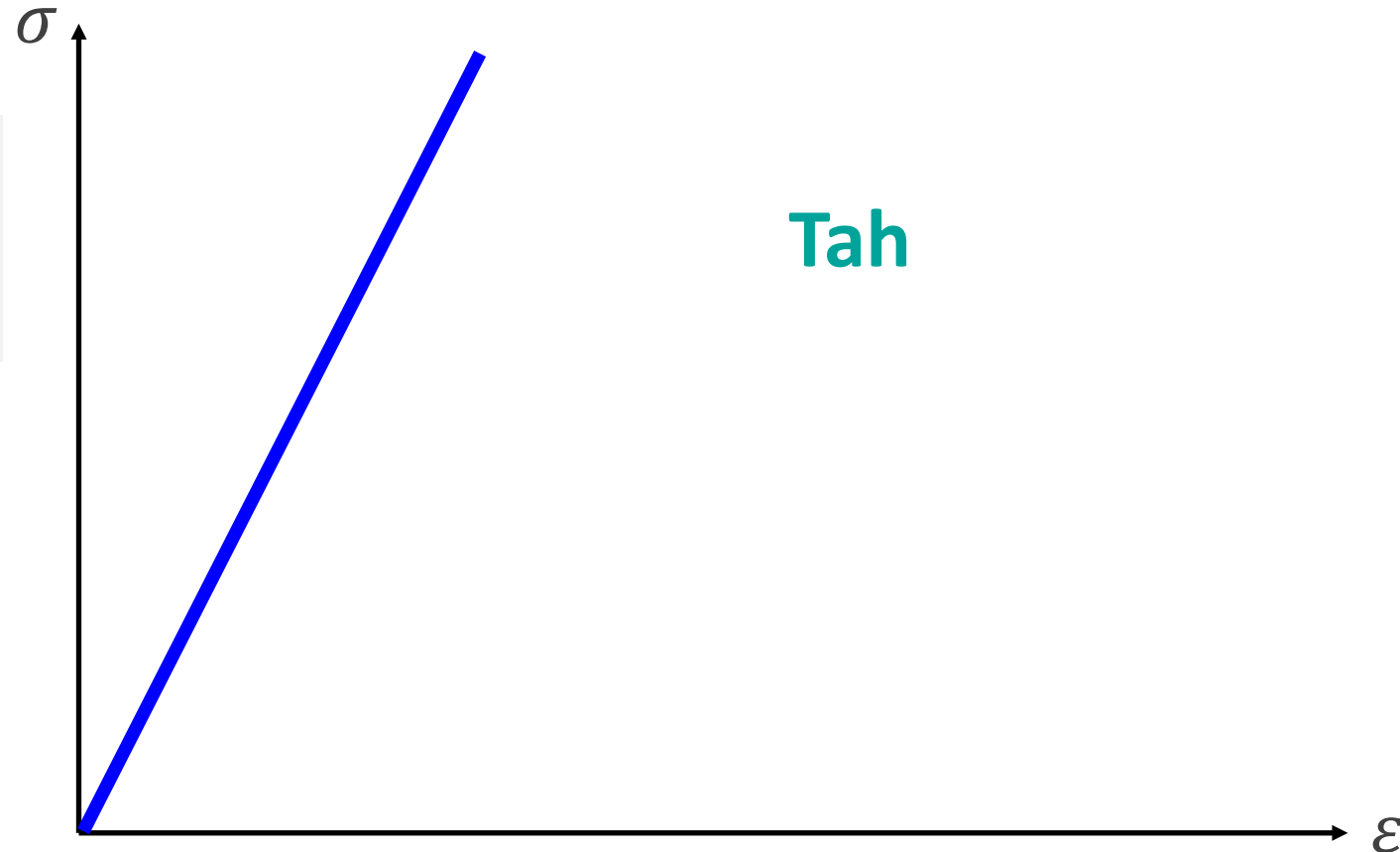
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Pracovní diagram

Vztah **napětí** vs. **deformace** vyjadřuje tzv. **pracovní diagram**. Závisí na **fyzikálních a mechanických vlastnostech** materiálů.

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta \vec{A}}$$

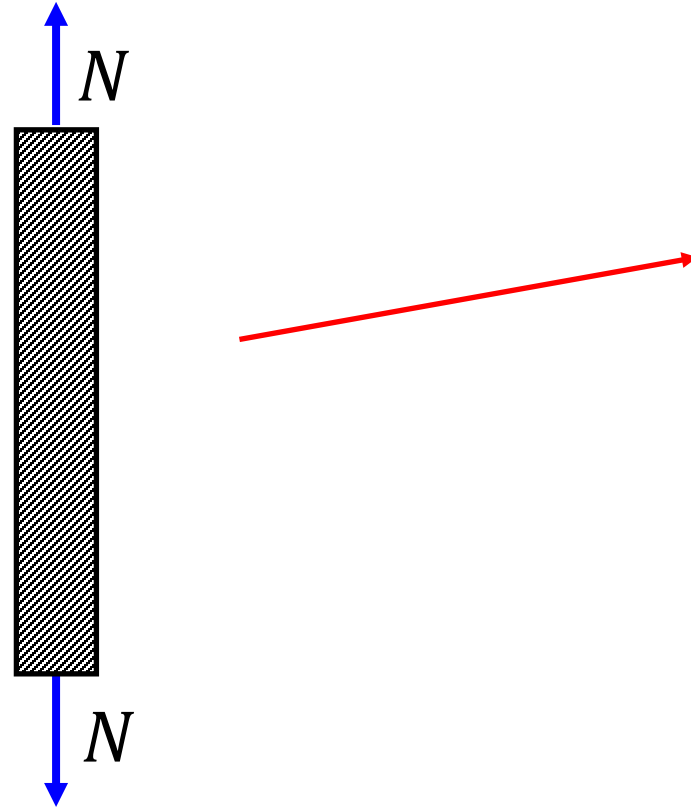
$$\sigma = \frac{N}{A}$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

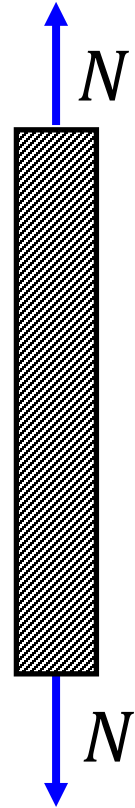


Tahová zkouška oceli



Základní typy namáhání

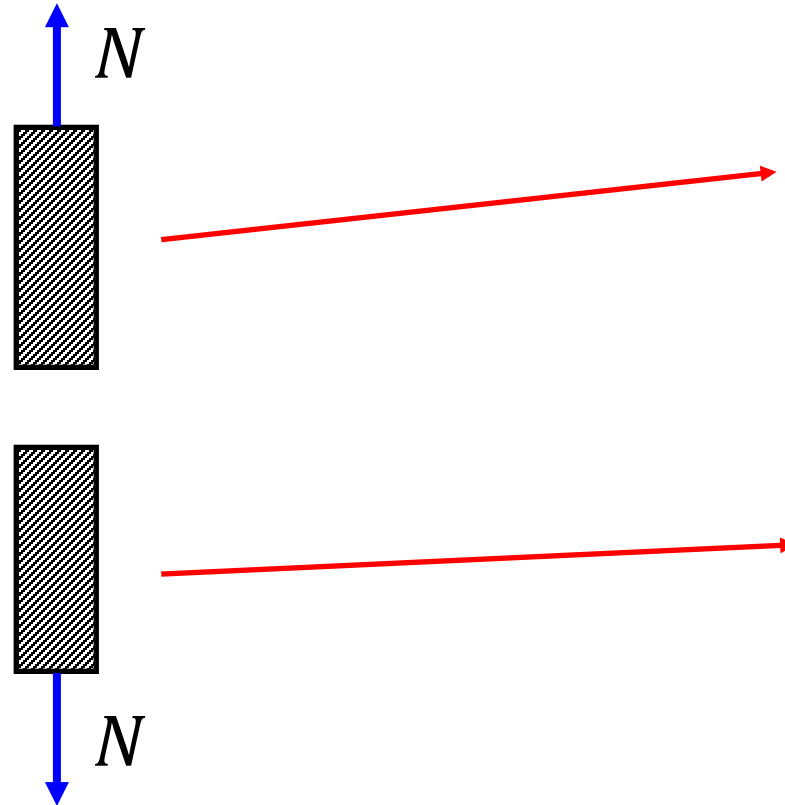
1. Osově namáhání - tah



Tahová zkouška oceli

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



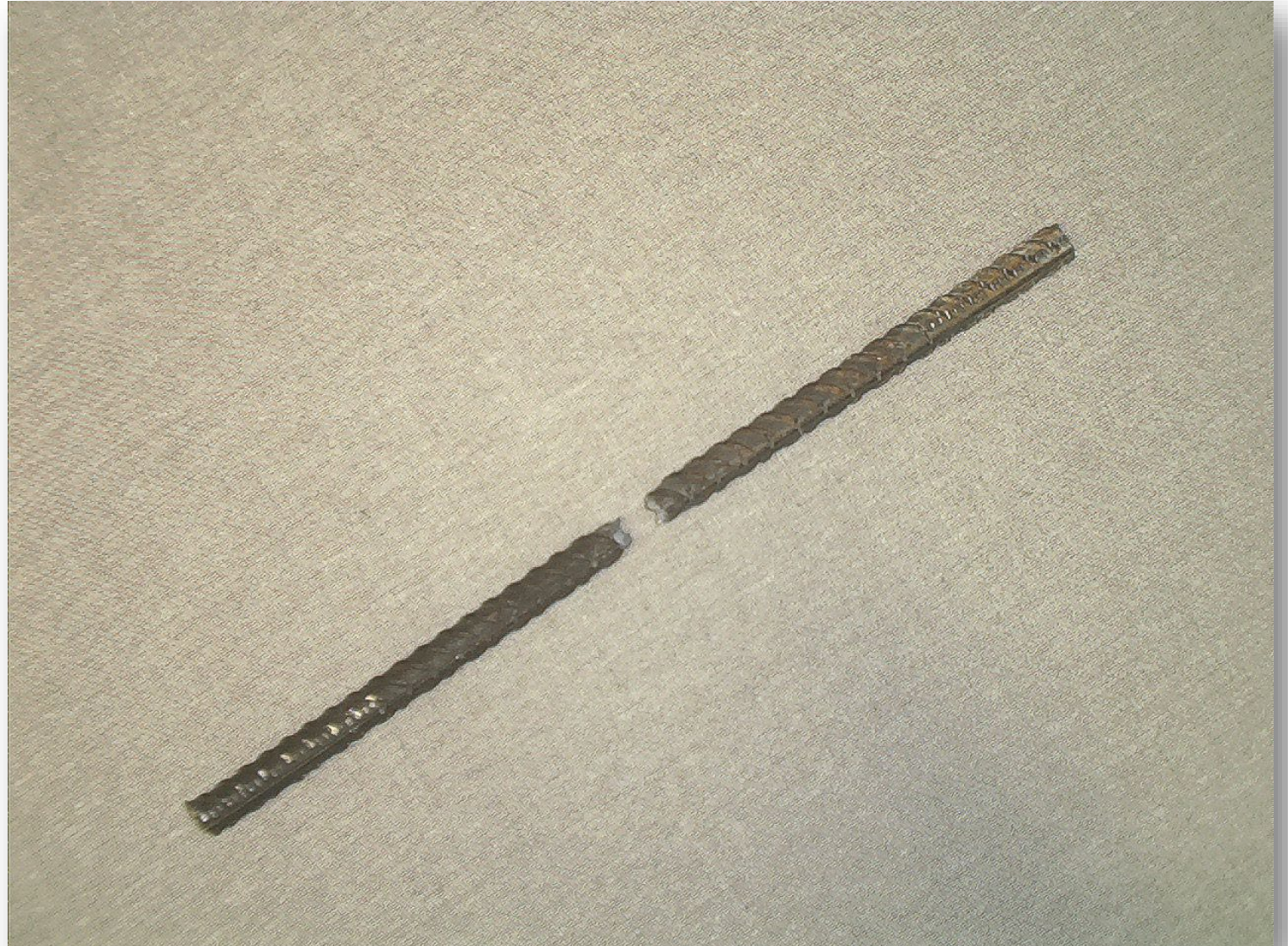
Tahová zkouška oceli



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

Přetržený
vzorek oceli
po tahové zkoušce



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

Přetržené
vzorky oceli
po tahové zkoušce



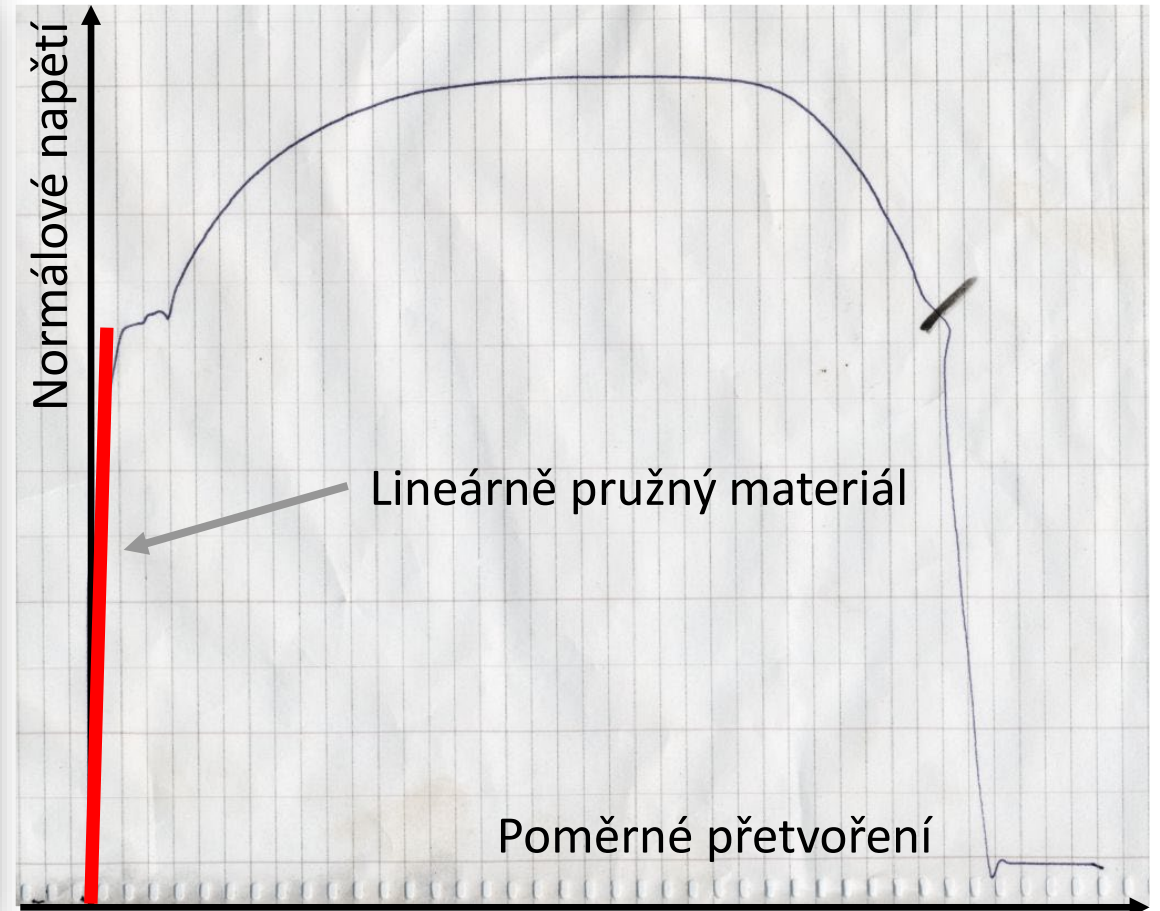
Výchozí předpoklady klasické teorie lineární pružnosti

Tahová zkouška oceli,
experimentální určení
pracovního diagramu



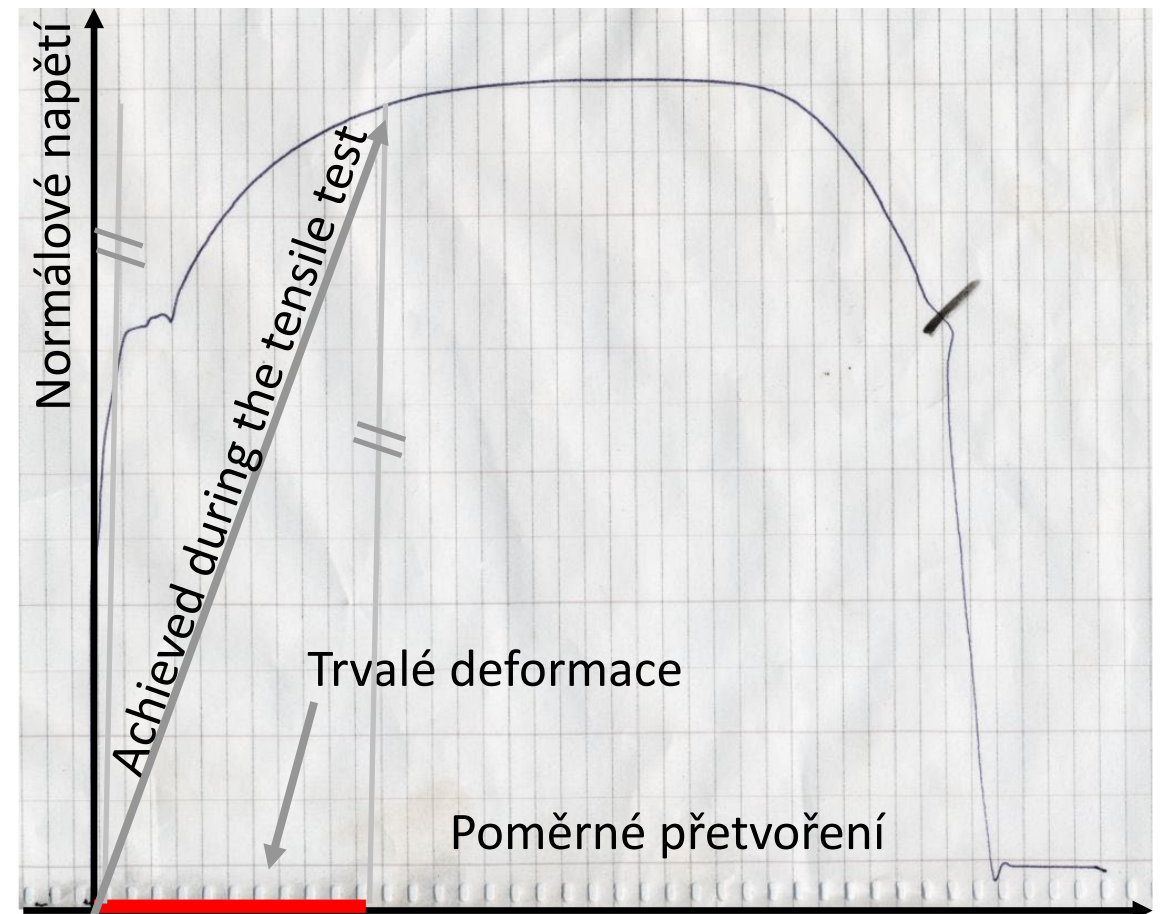
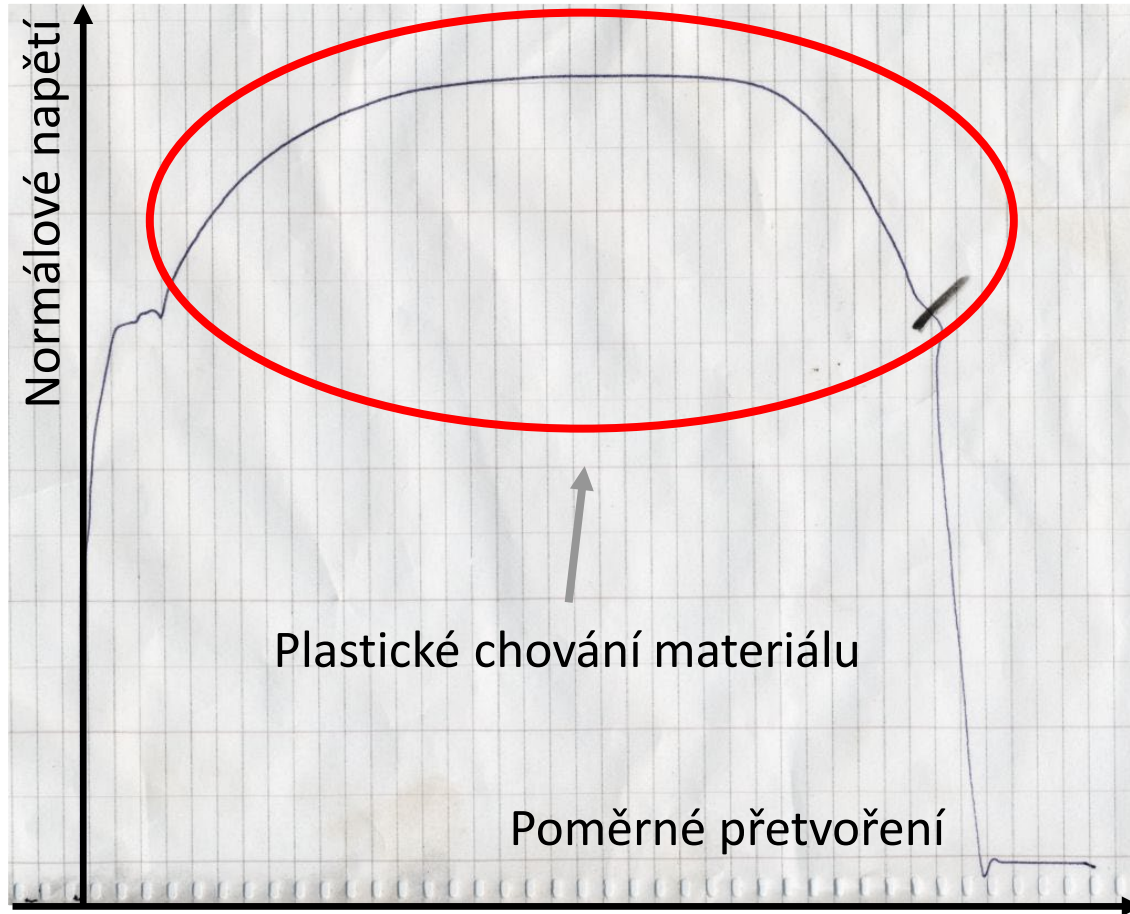
Výchozí předpoklady klasické teorie lineární pružnosti

Tahová zkouška oceli, experimentální určení pracovního diagramu

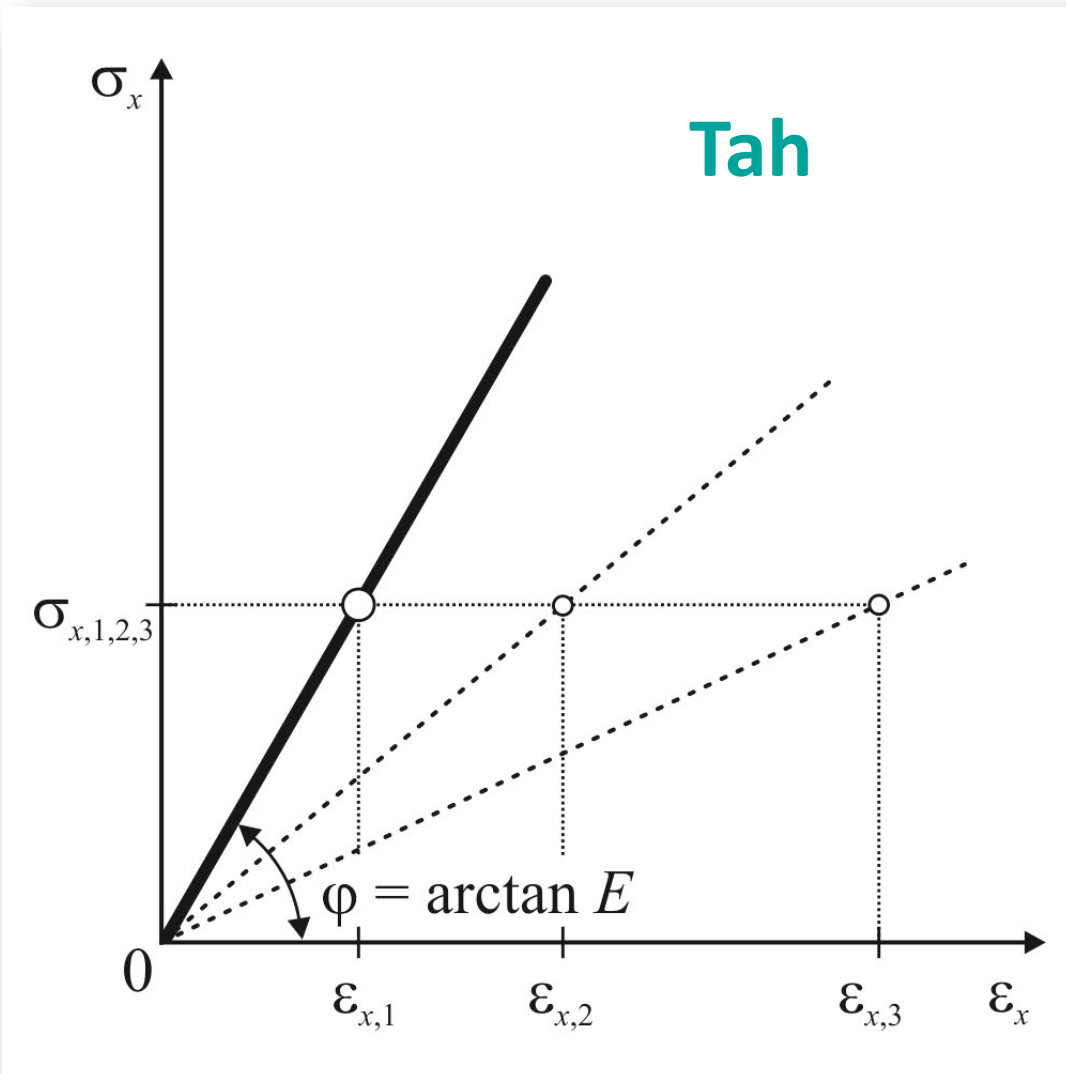


Výchozí předpoklady klasické teorie lineární pružnosti

Nelineární pružnost, fyzikální nelinearita



Lineárně pružný materiál, Hookův zákon



Hookův zákon

$$\tan \varphi = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = E \rightarrow$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

Platí: $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

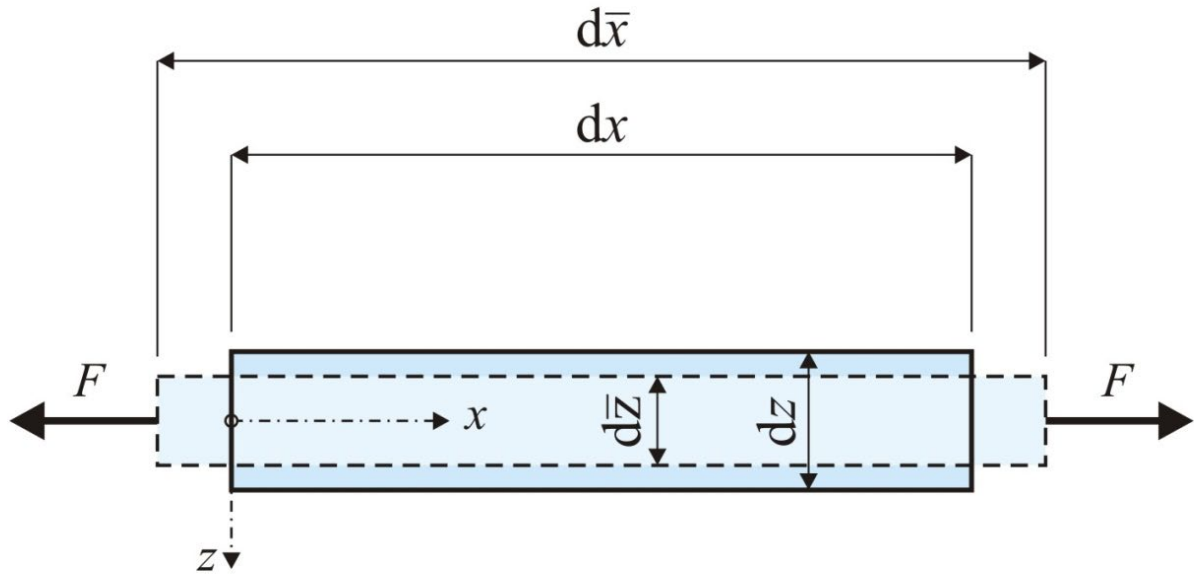
$$\sigma_x = \frac{N}{A} = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

σ_x ... **Normálové napětí** [Pa]

ε_x ... **Poměrná délková deformace** [-]

E ... **Modul pružnosti** v tahu a tlaku [Pa]

Lineárně pružný materiál, Hookův zákon



$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

ν ... **Poissonův součinitel příčné deformace** [-] (ný)

$$\nu \leq 0.5$$

Při současném působení σ_x , σ_y a σ_z :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

Fyzikální rovnice – 1. část

Obdobně:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

Historické osobnosti



Robert Hooke (1635 - 1703)

Anglický fyzik, přírodovědec a architekt, který jako první vyslovil v roce 1676 zákon o úměrnosti mezi napětím a přetvořením.



Thomas Young (1773 - 1829)

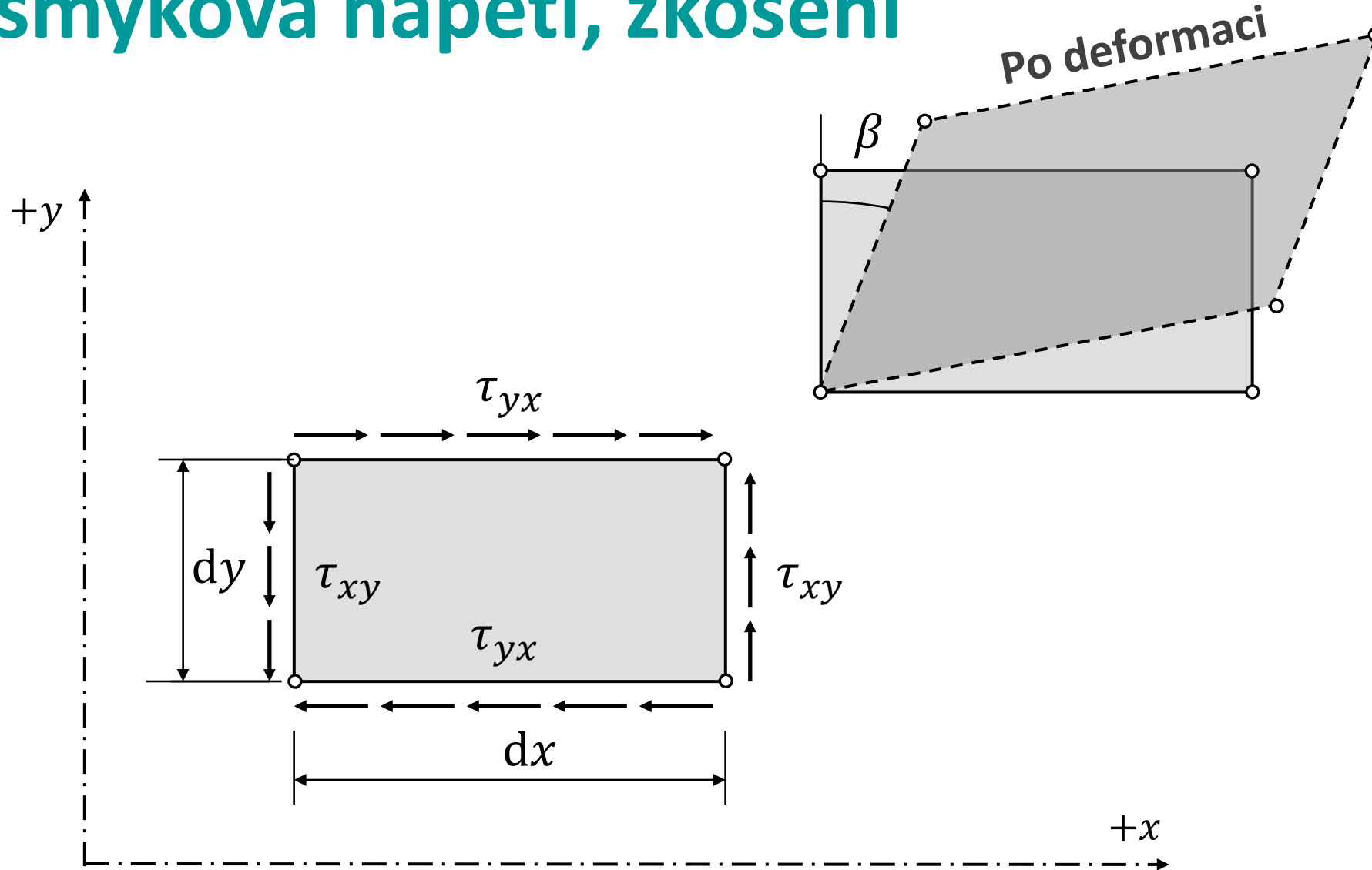
Anglický učenec, v roce 1807 definoval matematicky **Hookův zákon** (modul pružnosti E).



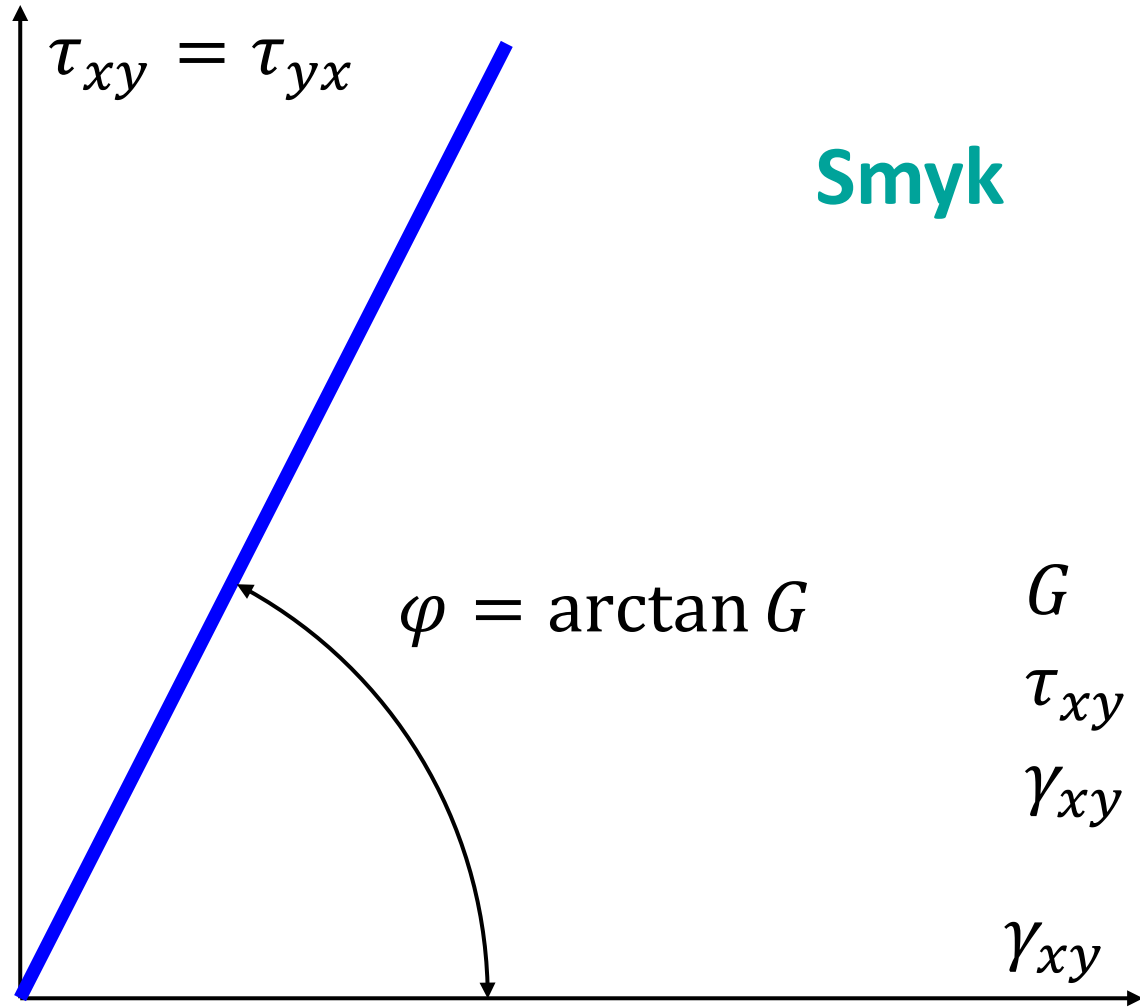
Simeon Denis Poisson (1781 - 1840)

Francouzský matematik, zabývající se chováním materiálů a matematickou teorií pružnosti.

Smyk, smyková napětí, zkosení



Lineárně pružný materiál, Hookův zákon ve smyku



Smyk

Hookův zákon ve smyku

$$\tan \varphi = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = G \rightarrow \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

obdobně $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$ $\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$

G ... **modul pružnosti ve smyku** [Pa]

τ_{xy} ... smykové napětí [Pa]

γ_{xy} ... poměrná úhlová deformace (zkosení) [-]

Fyzikální rovnice – 2. část

Fyzikální rovnice

Fyzikální rovnice vyjadřují vztahy mezi složkami **poměrných deformací** a složkami **napětí** v tělese.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Fyzikální konstanty

Fyzikální (materiálové) konstanty E , G a ν (ný) **nejsou** u izotropního materiálu vzájemně **nezávislé**.

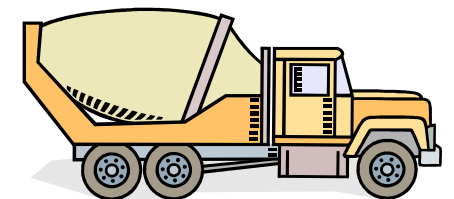
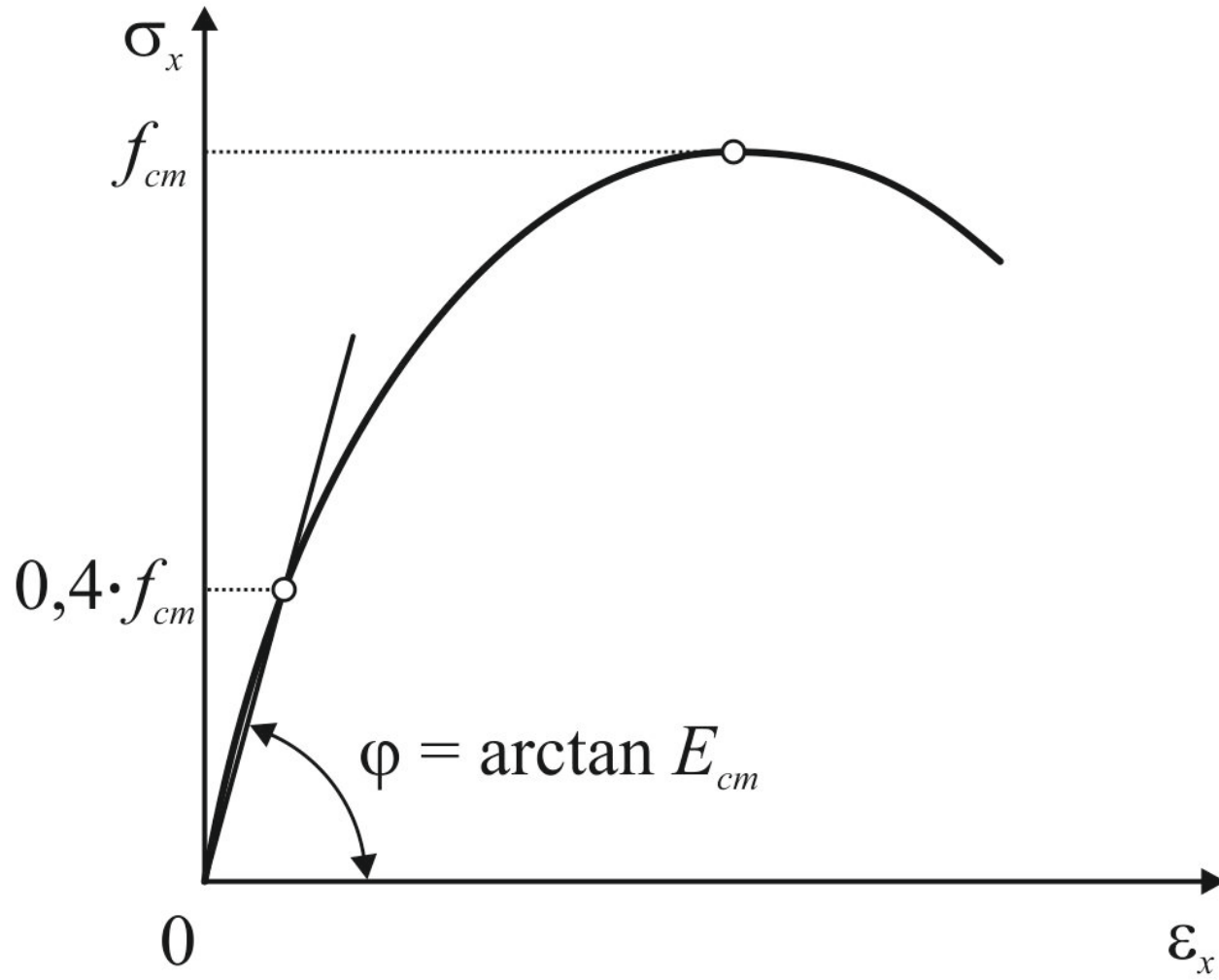
$$\frac{E}{G} = 2 \cdot (1 + \nu)$$

$$0 \leq \nu \leq 0,5 \rightarrow \frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}$$

Orientační hodnoty fyzikálních konstant některých materiálů:

<i>Materiál</i>	E	G	ν
Ocel	210 000 MPa	81 000 MPa	0,3
Sklo	70 000 MPa	28 000 MPa	0,25
Žula	40 000 až 100 000 MPa	-	0,2
Jehličnaté dřevo	$E_{\parallel} = 10\,000$ MPa, $E_{\perp} = 300$ MPa	600 MPa	-

Pracovní diagram betonu v tlaku



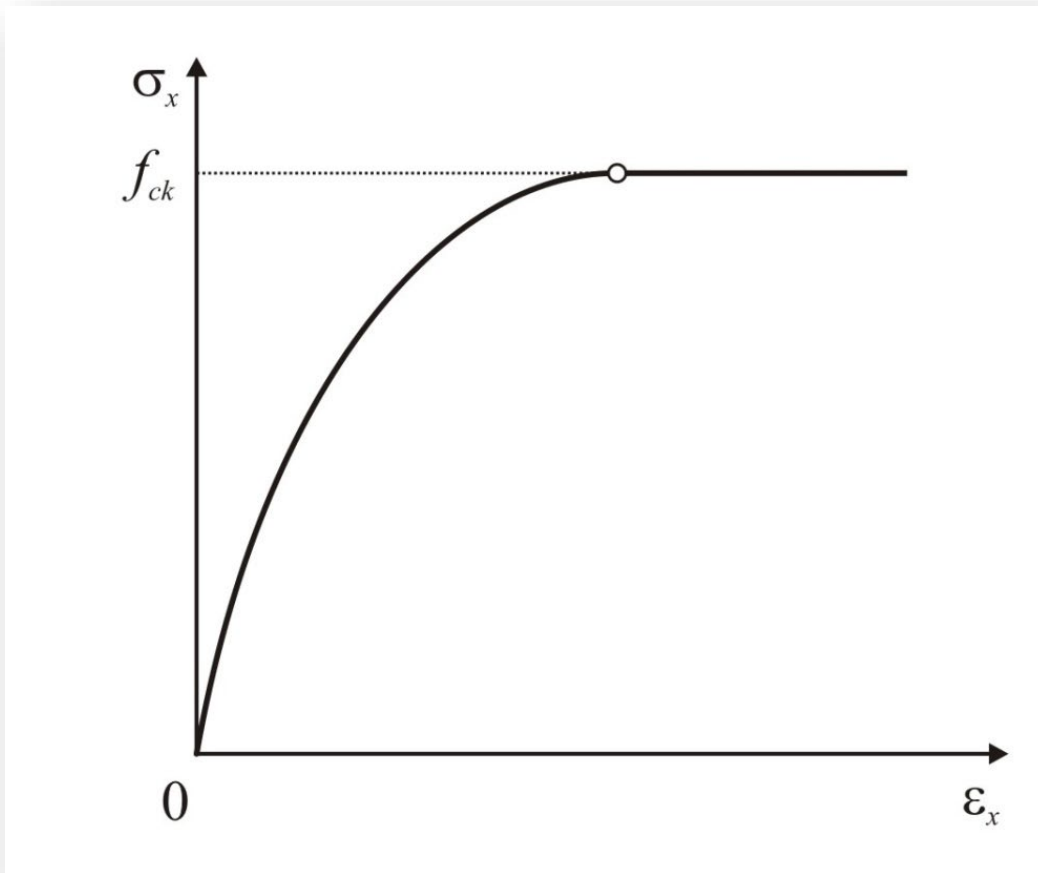
Fyzikální konstanty betonu

<i>Třída betonu</i>	E_{cm}	G	ν
C12/15	27 000 MPa	0,42 · E	0,2
C16/20	29 000 MPa		
C20/25	30 000 MPa		
C25/30	31 000 MPa		
C30/37	33 000 MPa		
C35/45	34 000 MPa		
C40/50	35 000 MPa		
C45/55	36 000 MPa		
C50/60	37 000 MPa		

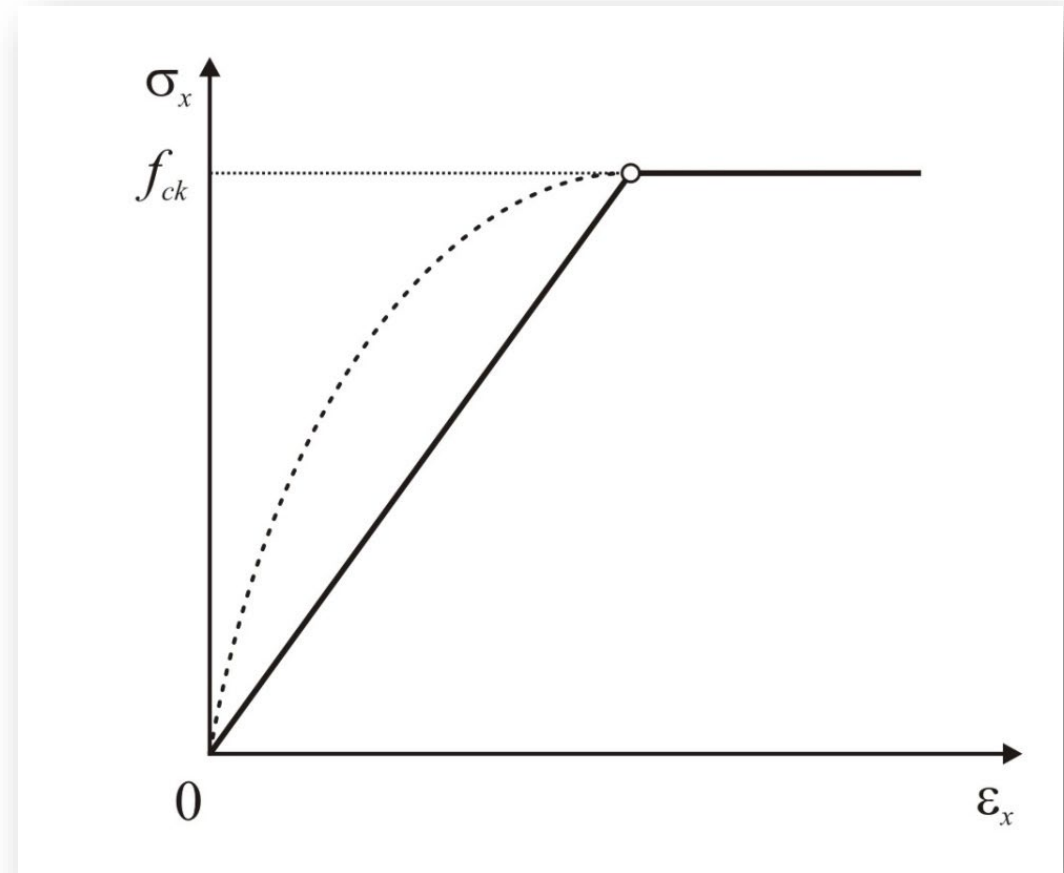
Návrhový pracovní diagram betonu v tlaku

Návrhové pracovní diagramy betonu v tlaku

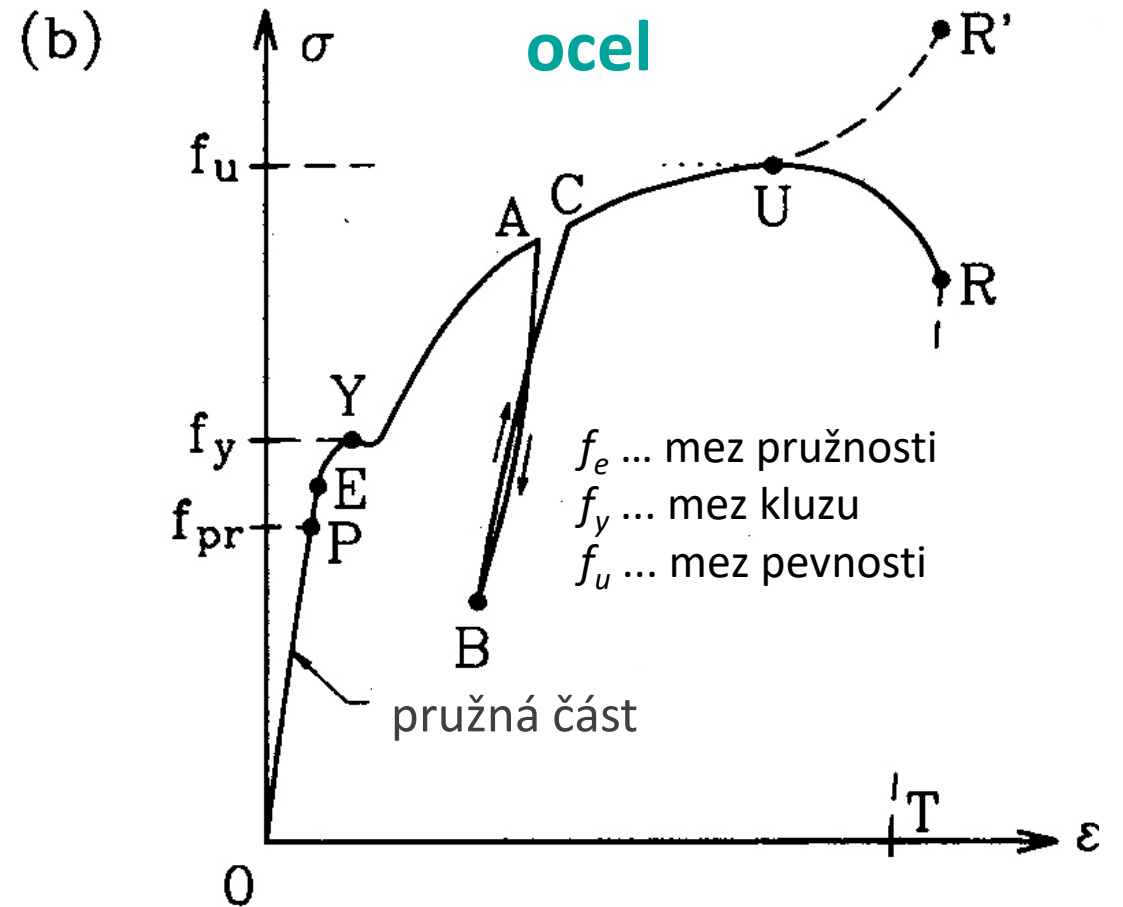
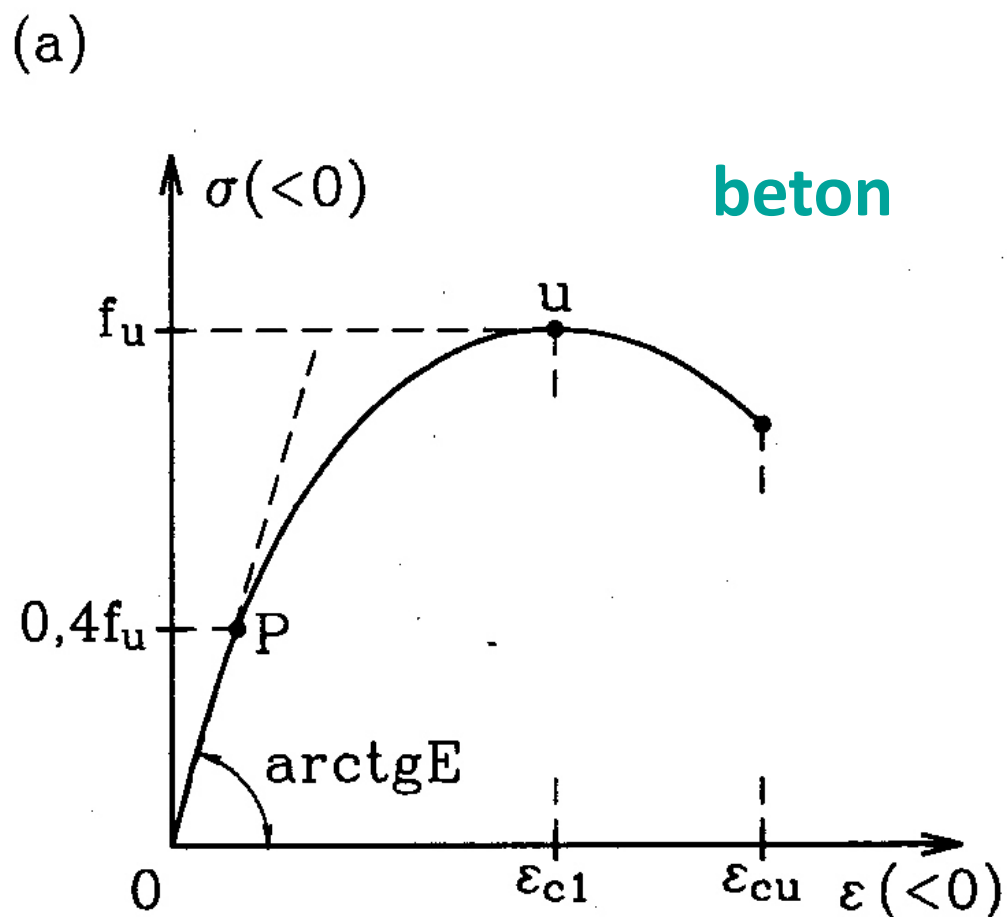
Parabolicko-rektangulární



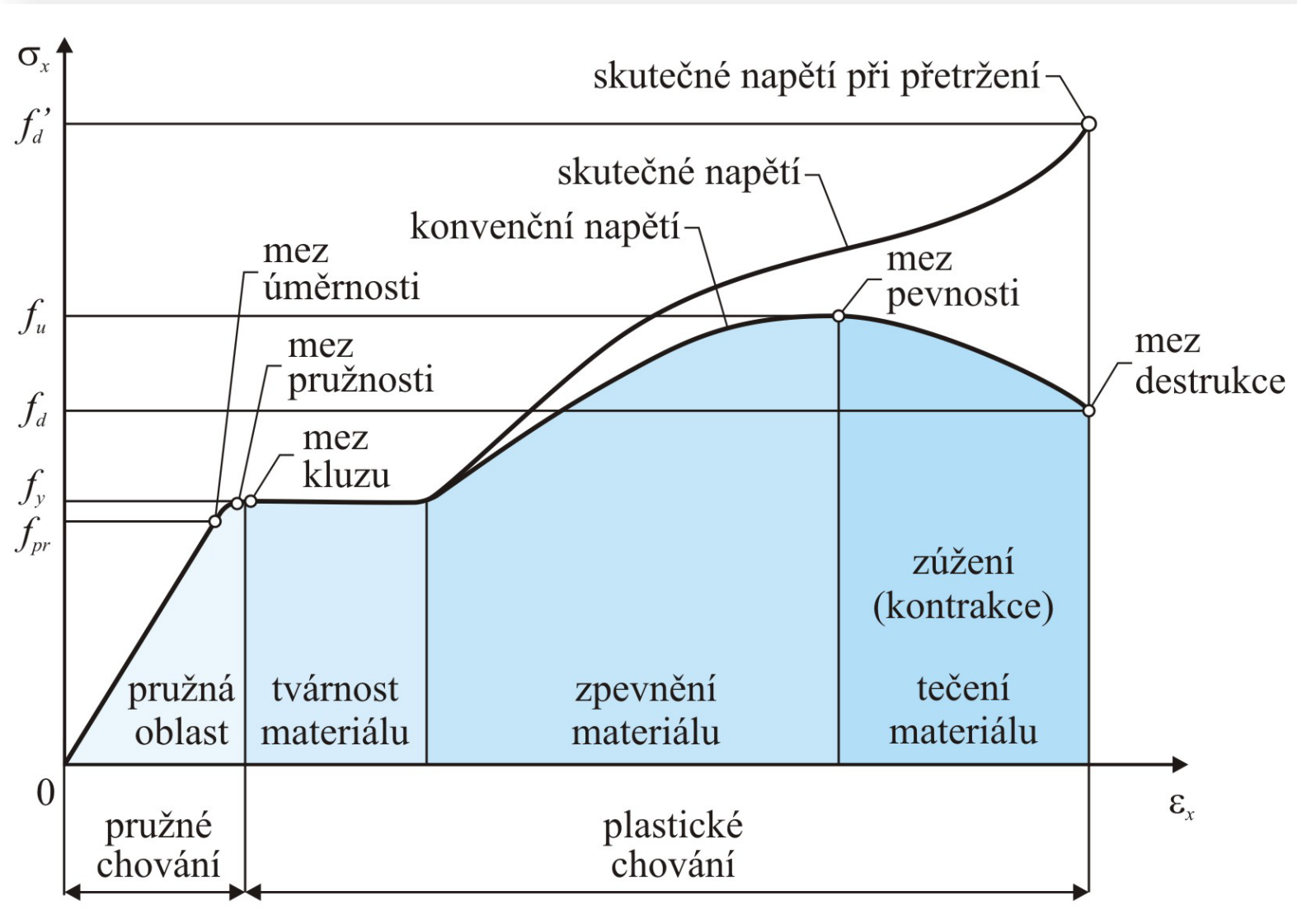
Bilineární



Pracovní diagramy betonu a oceli



Pracovní diagram oceli



Plasticita:

schopnost materiálu deformovat se trvale bez porušení.

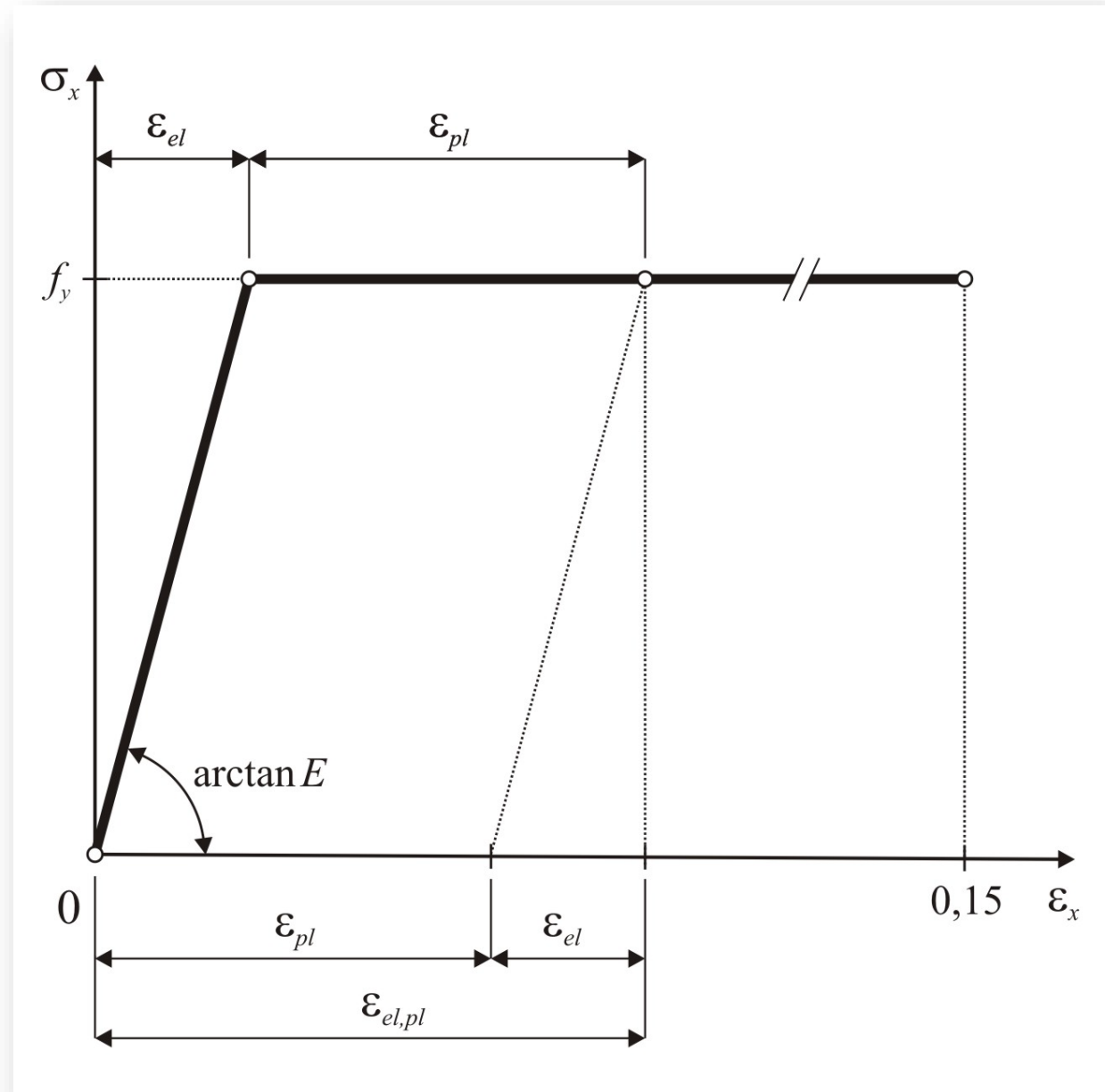
Tažnost [%]:

plastické protažení přetržené tyče (poměr mezi změnou délky a původní délkou při přetržení).

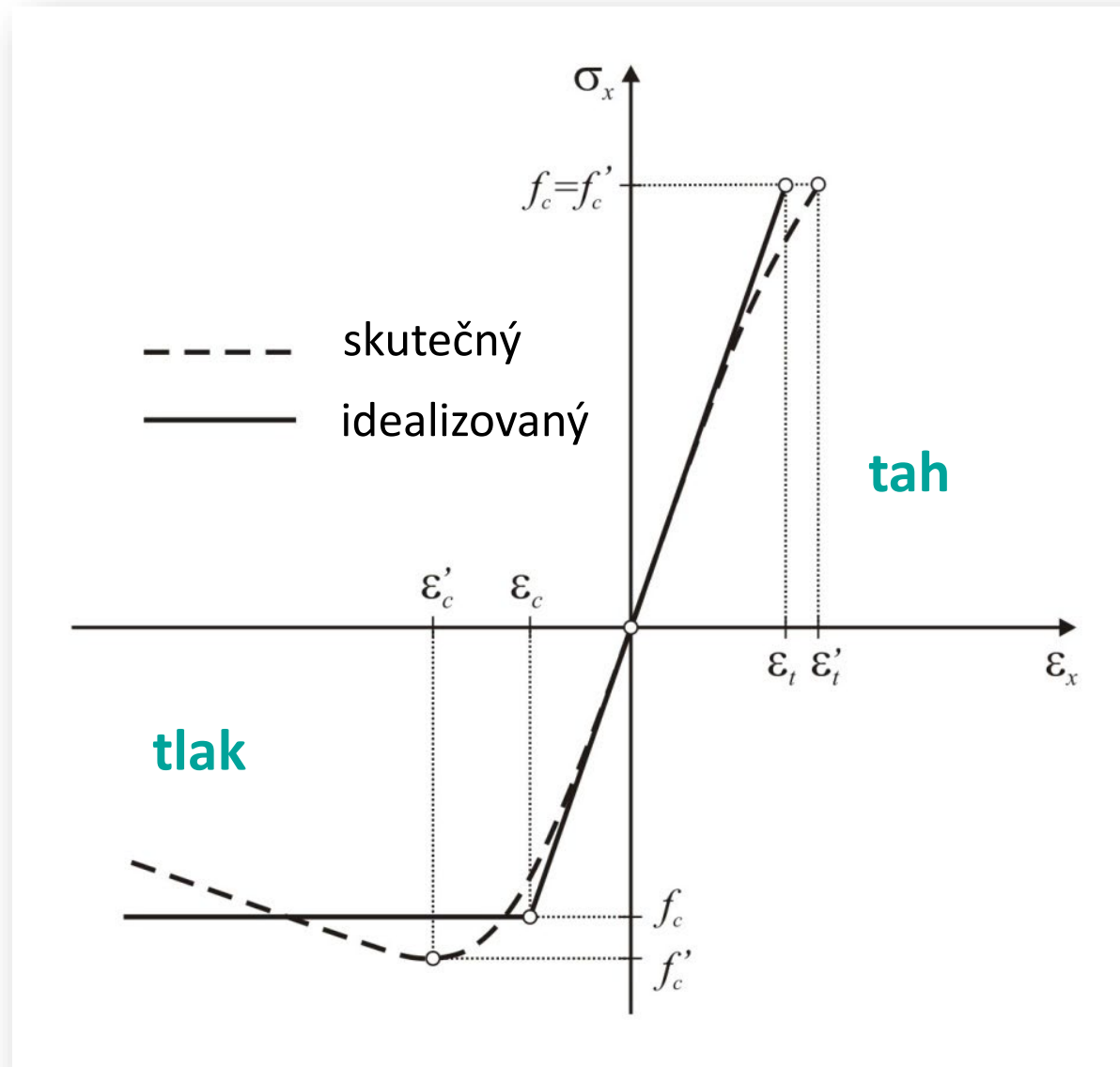
Ocel cca. 15-20%.

Pracovní diagram ideálně pružno- plastického materiálu

Pracovní diagram **ideálně
pružno-plastického materiálu**



Pracovní diagram dřeva



Příklad 1:

Zadání:

Určete prodloužení ocelové tyče délky $l = 2$ m, ve které nabývá tahové normálové napětí hodnotu $\sigma_x = 120$ MPa.

Ocel považujte za lineárně pružný materiál, který se řídí Hookovým zákonem.

Řešení:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{120 \text{ MPa}}{210\,000 \text{ MPa}} = 5,7143 \cdot 10^{-4} [-]$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon_x \cdot l = 5,7143 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \text{ m} = 1,1429 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong 1,14 \text{ mm}$$

Příklad 2:

Zadání:

Ocelová tyč o délce $l = 3,6$ m byla protažena o $\Delta l_{el,pl} = 18$ mm. Určete trvalou deformaci Δl_{pl} po odlehčení, pokud je modul pružnosti v tahu a tlaku $E = 200\,000$ MPa a napětí na mezi kluzu oceli $f_y = 355$ MPa.

Řešení:

Celková poměrná deformace:

$$\varepsilon_{x,el,pl} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,018 \text{ m}}{3,6 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-3} [-]$$

Mezní pružná poměrná deformace:

$$\varepsilon_{x,el} = \frac{f_y}{E} = \frac{355 \text{ MPa}}{200\,000 \text{ MPa}} = 1,775 \cdot 10^{-3} [-]$$

Poměrná deformace v plastické oblasti:

$$\varepsilon_{x,el} = 1,775 \cdot 10^{-3} < \varepsilon_{x,el,pl} = 5 \cdot 10^{-3} \ll 0,15$$

Příklad 2:

Platí:

$$\varepsilon_{x,el,pl} = \varepsilon_{x,el} + \varepsilon_{x,pl} \rightarrow$$

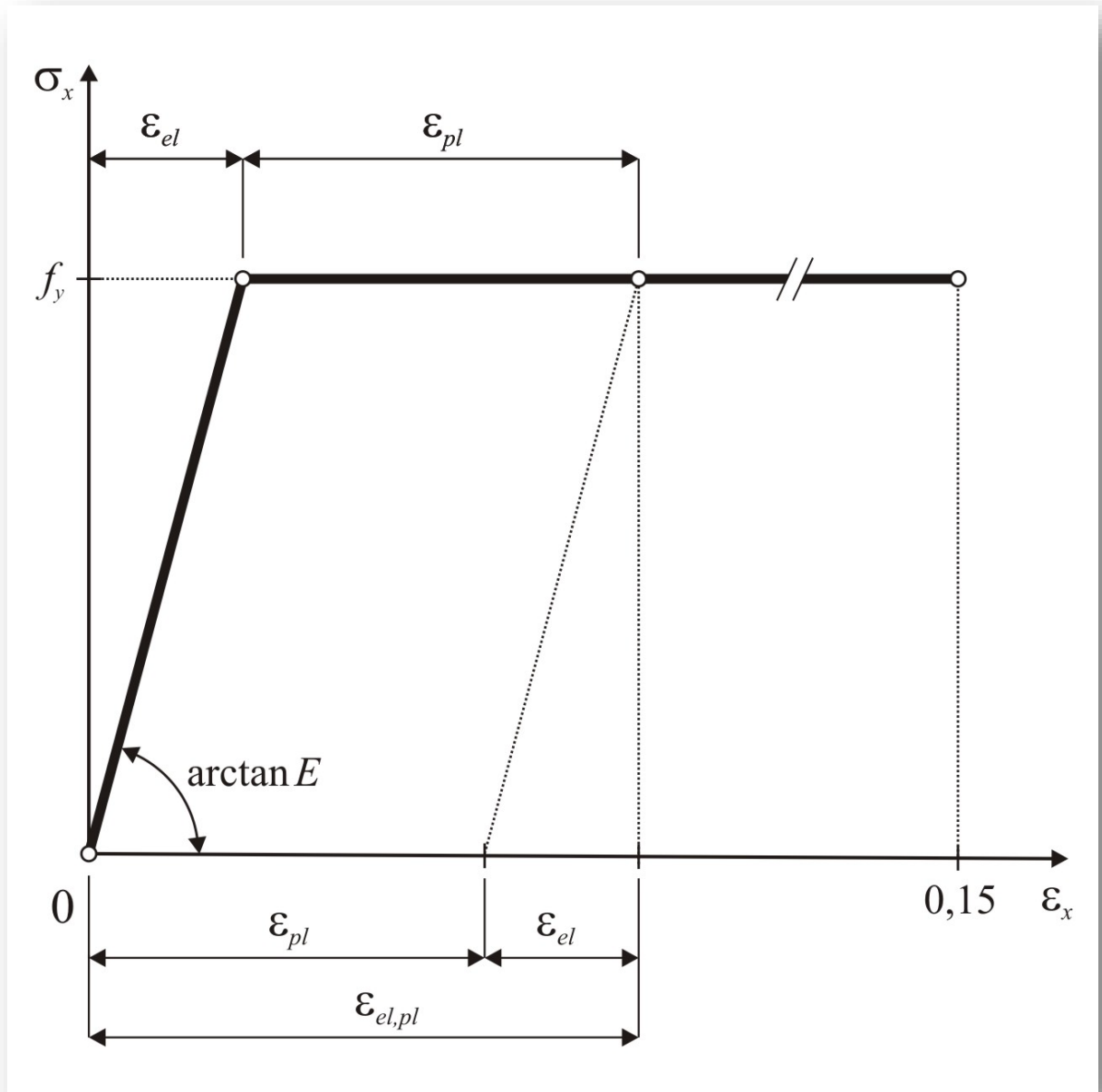
$$\varepsilon_{x,pl} = \varepsilon_{x,el,pl} - \varepsilon_{x,el} =$$

$$= (5 - 1,775) \cdot 10^{-3} = 3,225 \cdot 10^{-3}$$

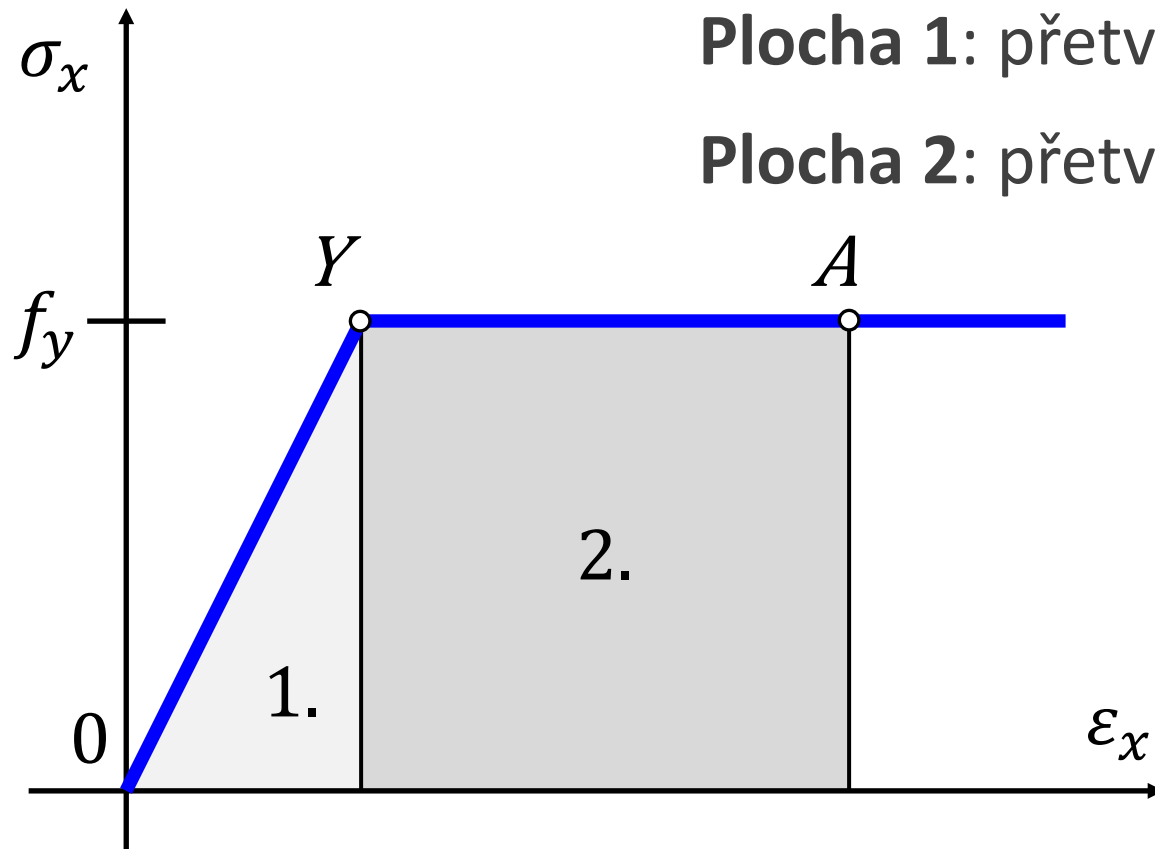
$$\varepsilon_{x,pl} = \frac{\Delta l_{pl}}{l} \rightarrow \Delta l_{pl} = \varepsilon_{x,pl} \cdot l$$

$$\Delta l_{pl} = 3,225 \cdot 10^{-3} \cdot 3,6 \text{ m}$$

$$= 11,61 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 11,61 \text{ mm}$$



Přetvárná energie, ideálně pružno-plastický materiál



Plocha 1: přetvárná energie pružného materiálu $E_{n,el}$

Plocha 2: přetvárná energie plastického materiálu $E_{n,pl}$

$$W \leq E_n$$

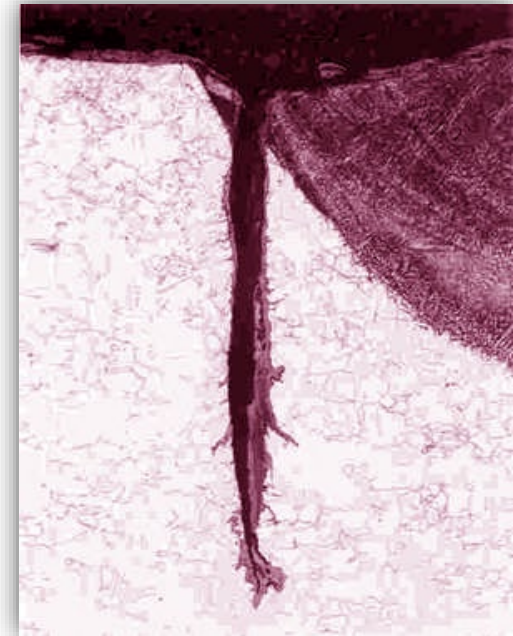
Namáhání nárazem: Kinetická energie nárazu $W = \frac{m \cdot v^2}{2}$



Omezené využití plastických vlastností materiálu

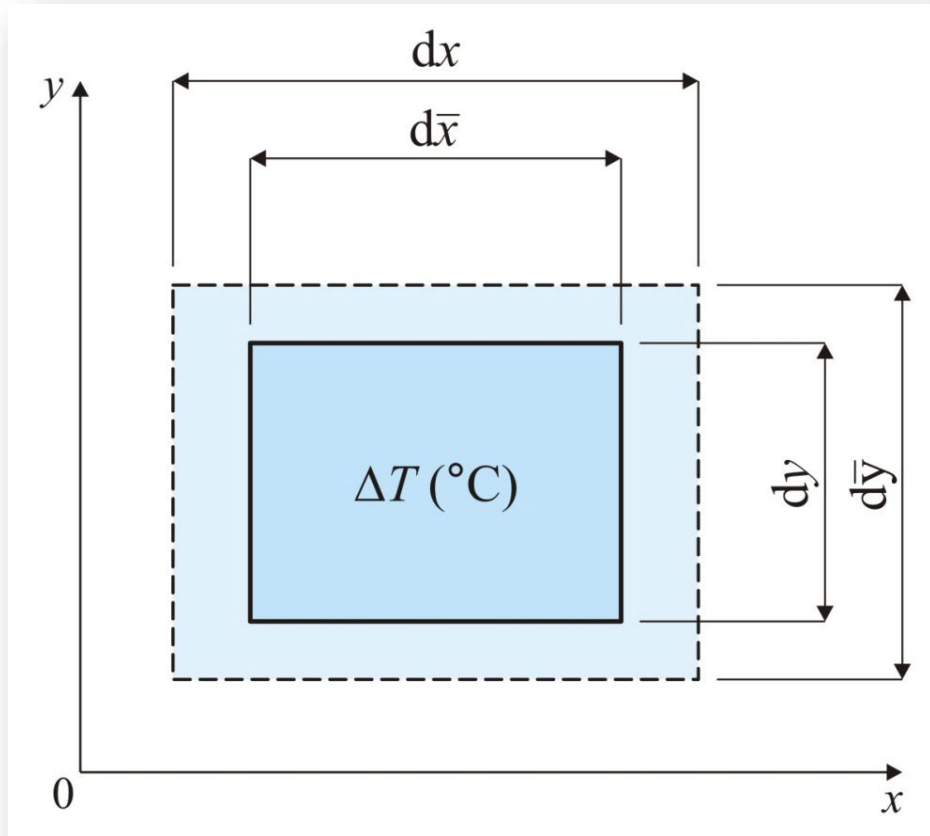
Důležité poznámky:

- Pracovní diagram každého materiálu závisí na **rychlosti zatěžování** a **teplotě**.
- Porušení – ztráta pevnosti, je mnohotvárný jev, při kterém někdy vznikají tvárné-plastické deformace, jindy je povahy **křehkého lomu** (při nízkých teplotách, koncentraci napětí), který vzniká náhle.
- Při proměnném napětí opakujícím se v mnoha cyklech se uplatní tzv. **únavové porušení** při napětích podstatně nižších než je f_y .



Příklady **únavového porušení**
ocelových konstrukcí

Deformace od rovnoměrné změny teploty



$$\varepsilon_{x,T} = \varepsilon_{y,T} = \varepsilon_{z,T} = \alpha_T \cdot \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

α_t ... součinitel tepelné roztažnosti [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]



Ocel	$\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Dřevo	$\alpha_t = 3 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
Beton	$\alpha_t = 10 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Zdivo	$\alpha_t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

Příklad 3:

Zadání:

Ocelový most o délce 80 m je rovnoměrně zahřátý na teplotu 25 °C. O kolik se díky tomuto oteplení prodlouží jeho délka?

Řešení:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{x,T} = \alpha_T \cdot \Delta T \rightarrow \Delta l = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l$$

$$\Delta l = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot 25 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot 80 \text{ m} = 0,024 \text{ m} = 24 \text{ mm}$$

