

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ | KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY

Téma 3: Napětí

- Základní pojmy a výchozí předpoklady, diferenciální podmínky rovnováhy
- Pojem napětí, stav napjatosti tělesa
- Vztahy mezi napětími a vnitřními silami v průřezu prutu
- Základní typy namáhání prutů - prosté a složené

5/10/22 Průžnost a plasticita 0

0

Vnitřní síly, napětí

Na těleso (konstrukci) působí **vnější síly**:

- **Primární** - zatížení $F_i (i = 1, 2, \dots, n)$
- **Sekundární** - reakce vazeb (odezva)

Vnitřní síly:
Působí na sebe v libovolném řezu konstrukce podle **principu akce a reakce**.

5/10/22 Základní pojmy a výchozí předpoklady 1

1

Prostorové namáhání přímého prutu

6 složek vnitřních sil
 $N \quad V_y \quad V_z \quad T = M_x \quad M_y \quad M_z$

5/10/22 Základní pojmy a výchozí předpoklady 2

2

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu

Element přímého prostorově namáhaného prutu

5/10/22 Zásadní pojmy a výchozí předpoklady 3

3

Diferenciální podmínka rovnováhy elementu v osové úloze

$R_x = 0: -N + (N + dN) + n \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} = -n$

5/10/22 Diferenciální podmínky rovnováhy 4

4

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v kroucení

Obdoba osové úlohy

$T_R = 0:$

$-T + (T + dT) + t \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = -t$

Rovnováha elementu v kroucení

5/10/22 Diferenciální podmínky rovnováhy 5

5

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v příčné úloze

$R_x = 0: -V + (V + dV) + q \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$ Schwedlerovy vztahy

$\Sigma M_{ix_2} = 0: -M + (M + dM) - V \cdot dx + \frac{q \cdot dx^2}{2} + m \cdot dx = 0 \rightarrow$

$\frac{q \cdot dx^2}{2} \approx 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V - m$

$m = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$

5/10/22 Diferenciální podmínky rovnováhy 6

6

Spojité příčné zatížení vs. průběhy vnitřních sil

Souvislost mezi **spojitým příčným zatížením** a **průběhy vnitřních sil**

Závěry:

$\frac{dV}{dx} = -q$ $\frac{dM}{dx} = V - m$ $\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} - \frac{dm}{dx} = -q - \frac{dm}{dx}$

$m = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$ $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$

Souvislost mezi spojitém příčným zatížením a průběhy vnitřních sil

5/10/22 Diferenciální podmínky rovnováhy 7

7

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu

Element přímého prostorově namáhaného prutu:

Osově namáhání: $\frac{dN}{dx} = -n_x$

Ohyb a smyk ve vswlé rovině xz: $\frac{dV_z}{dx} = -q_z$ $\frac{dM_y}{dx} = V_z$

Ohyb a smyk ve vodorovné rovině xy: $\frac{dV_y}{dx} = -q_y$ $\frac{dM_z}{dx} = -V_y$

Kroucení: $\frac{dM_x}{dx} = \frac{dT}{dx} = -m_x$

5/10/22 Diferenciální podmínky rovnováhy 8

8

Vnitřní síly, napětí

Vnitřní síly nevyovídají nic o míře namáhání tělesa nebo prvku konstrukce. Nutno uvažovat také s vlivem tvaru a velikosti průřezové plochy, které do výpočtu vstupují ve formě **průřezových charakteristik**.

Významnější veličinou je **napětí** – jeden z klíčových pojmů teorie pružnosti a plasticity.



5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 9

9

Vnitřní síly, napětí

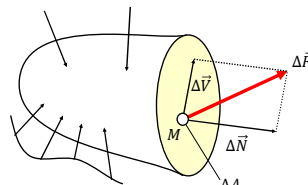


Nosníky (pruty) stropní konstrukce výzkumného energetického centra VŠB-TU Ostrava

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 10

10

Vnitřní síly, napětí



ΔN ... **normála** výslednice ΔF
 ΔV ... **tangenciální** složka výslednice ΔF , která je rovnoběžná s rovinou řezu
 ΔA ... Element **průřezové plochy** A (průřezová charakteristika)

Napětí: $\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}$ **Normálové** $\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A}$ **Smykové**

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 11


11

Napětí

Napětí: vektor, charakterizovaný svými složkami.
Měrná jednotka: Pascal ... [Pa]

Fyzikální rozměr napětí:

$$Pa = \frac{N}{m^2}$$

$$MPa = 10^6 Pa = \frac{MN}{m^2} = \frac{N}{mm^2}$$


Dům "U čtyř Mamlasů",
Náměstí svobody, Brno

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 12

12

Napětí, masivní konstrukce, těleso



Masivní betonová konstrukce – Hoover Dam, Nevada. Kombinace klenbové a tlíčné přehrady z roku 1935, výška 221,3 m, délka oblouku 379,2 m, šířka hráze nahoře 13,7 m a 201,2 m dole, 3,5 mil. m³ betonu.

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 13

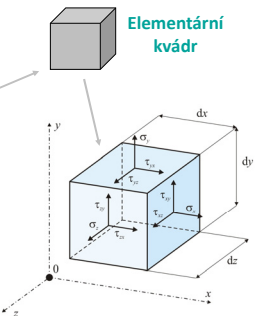
13

Napětí, tenzor napětí, těleso

Stav napjatosti tělesa lze vyjádřit tenzorem, který je definován v pravoúhlé soustavě:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tenzor napětí - používá se k definování **stavu napjatosti** v bodě tělesa (napětí ve třech vzájemně kolmých rovinách procházejících bodem)



Elementární kvádr

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 14

14

Věta o vzájemnosti smykových napětí

$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A}$

$\sum M_z = 0: dQ_{xy} = \tau_{xy} \cdot dA_{yz} = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$

$dQ_{xy} \cdot dx - dQ_{yx} \cdot dy =$
 $= \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ obdobně $\tau_{yz} = \tau_{zy}$
 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$

$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym.} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$


Tenzor napětí tělesa: Pouze 6 složek napětí

Vektor napětí: $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{zx} \ \tau_{xy}\}^T$

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 15

15

Napětí, nosná stěna



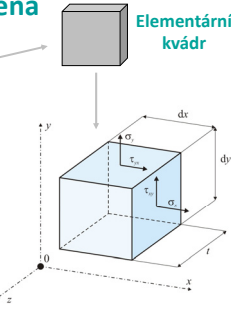
Nosná stěna – svislý plošný nosný prvek.

Porucha štitové stěny z důvodu nerespektování deformace konzoly jeřábové dráhy, průmyslová hala v Bašče

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 16

16

Napětí, tenzor napětí, nosná stěna



Elementární kvádr

Stav napjatosti nosné stěny: 3 složky napětí

Tenzor napětí: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ \text{sym.} & & 0 \end{bmatrix}$

5/10/22 Pojem napětí, stav napjatosti tělesa 17

17

Napětí, obecná prutová konstrukce



Prostorový rám (pruty) Kursaal Convention Centre and Auditorium, San Sebastian, Španělsko

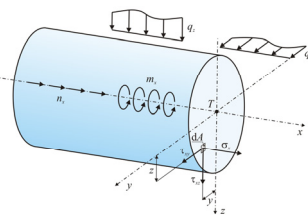
5/10/22

Pojem napětí, stav napjatosti tělesa

18

18

Napětí, tenzor napětí, obecně zatížený prut



Stav napjatosti obecně zatíženého prutu: 3 složky napětí

Tenzor napětí:
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym.} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Např.:
$$\sigma_x = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dN}{dA} \rightarrow dN = \sigma_x \cdot dA$$

5/10/22

Pojem napětí, stav napjatosti tělesa

19

19

Vnitřní síly vs. napětí v průřezu prutu

$$dN = \sigma_x \, dA \rightarrow N = \int_A \sigma_x \, dA$$

Obdobně:

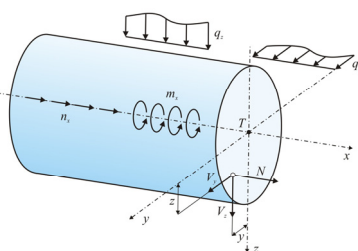
$$V_y = \int_A \tau_{xy} \, dA \quad V_z = \int_A \tau_{xz} \, dA$$

$$M_y = N \cdot z = \int_A (\sigma_x \cdot z) \, dA$$

$$M_z = -N \cdot y = - \int_A (\sigma_x \cdot y) \, dA$$

$$M_x = V_z \cdot y - V_y \cdot z =$$

$$= \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \, dA$$



Vztahy mezi napětími a vnitřními silami v průřezu prutu

5/10/22

20

20

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání 2. Ohyb 3. Kroucení 4. Smyk

Normálová síla $N \neq 0$

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 21

21

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

Tahová zkouška oceli

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 22

22

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

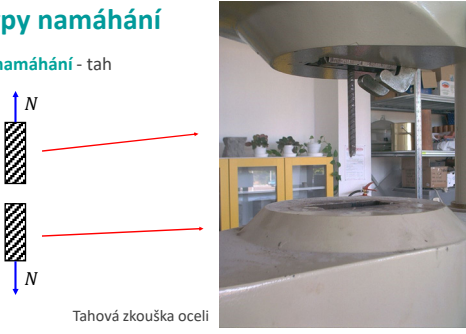
Tahová zkouška oceli

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 23

23

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



Tahová zkouška oceli

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 24

24

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



Přetržený vzorek oceli po tahové zkoušce

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 25

25

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah




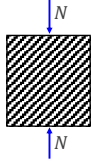
Přetržené vzorky oceli po tahové zkoušce

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 26

26

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak




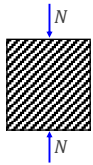
Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 27

27

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak




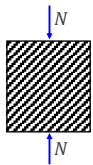
Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 28

28

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak





Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 29

29

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak




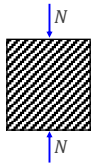
Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 30

30

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak




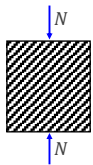
Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 31

31

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak



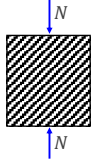
Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 32

32

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak



Tlaková zkouška betonu, zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 33

33

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak



Vzorek betonu po tlakové zkoušce

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 34

34

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak



Vzorek betonu po tlakové zkoušce

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 35

35

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Vzorky betonu,
cementové malty
a popílku po
tlakové zkoušce



5/10/22

Základní typy namáhání prutů

36

36

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Vzorky betonu,
cementové malty
a popílku po
tlakové zkoušce



5/10/22

Základní typy namáhání prutů

37

37

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Tlaková zkouška zdiva
foto: Ing. Jiří Lukš, Ph.D.



5/10/22

Základní typy namáhání prutů

38

38

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak



Tlaková zkouška zdiva
foto: Ing. Jiří Lukš, Ph.D.

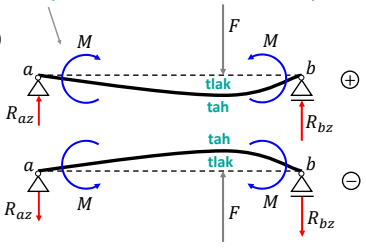
5/10/22 39

39

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání 2. **Ohyb** 3. Kroucení 4. Smyk

Ohybové momenty $M_y, M_z \neq 0$



5/10/22 40

40

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Princip ohybové zkoušky
(tříbodový ohyb)

5/10/22 41

41

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 42

42

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 43

43

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 44

44

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 45

45

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 46

46

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 47

47

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 48

48

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Ohybová zkouška

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 49

49

Základní typy namáhání

2. **Ohyb**



Zkušební vzorek po ohybové zkoušce

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 50

50

Základní typy namáhání

2. Ohyb

Zlomená
keramická
stropnice
Hurdís po
zatěžovací
zkoušce
ohybem
foto:
doc. Ing. Václav
Cepek, CSc.



5/10/22

Základní typy namáhání prutů

51

51

Základní typy namáhání

2. Ohyb

Ověření odolnosti
vláknobetonů a
drátkobetonů při
působení vysokých
teplot
foto: Zuzana Ševčíková,
studentka oboru
Stavební hmoty a
diagnostika staveb



5/10/22

Základní typy namáhání prutů

52

52

Základní typy namáhání

2. Ohyb

Ověření odolnosti
vláknobetonů a
drátkobetonů při působení
vysokých teplot
foto: Zuzana Ševčíková,
studentka oboru Stavební
hmoty a diagnostika
staveb



5/10/22

Základní typy namáhání prutů

53

53

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání 2. Ohyb 3. **Kroucení** 4. Smyk

Kroucí moment $T = M_x \neq 0$
 Např. **prostorově lomený nosník**

Vnitřní síly:
 N, T (mohou být $\neq 0$ v každém prutu),
 V_y, V_z, M_y, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou x)
 V_x, V_z, M_x, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou y)
 V_x, V_y, M_x, M_y (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou z)

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 54

54

Základní typy namáhání

3. **Kroucení**

Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – průřez mostní konstrukce

Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – dřevěný rumpál

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 55

55

Základní typy namáhání

1. Osově namáhání 2. Ohyb 3. Kroucení 4. **Smyk**

Posouvající síly $V_y, V_z \neq 0$

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 56

56

Základní typy namáhání

4. Smyk





Šroubový spoj stropních nosníků a sloupu,
foto: doc. Ing. Karel Kubečka, Ph.D.

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 57

57

Základní typy namáhání

4. Smyk



Povodňové poruchy mostů v roce 2002, Jižní Čechy,
foto: prof. Ing. Vladimír Tomica, CSc.

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 58

58

Základní typy namáhání

4. Smyk

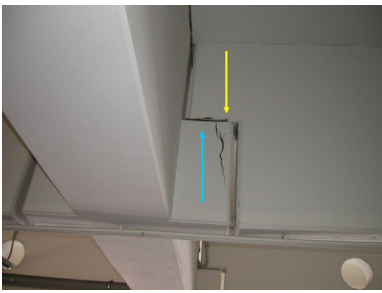
Povodňové poruchy mostů v roce 2002, Jižní Čechy,
foto: prof. Ing. Vladimír Tomica, CSc.

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 59

59

Základní typy namáhání

4. Smyk



Porušení konzoly betonového skeletu vlivem nadměrného smykového namáhání
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 60

60

Základní typy namáhání

4. Smyk



Porušení konzoly betonového skeletu vlivem nadměrného smykového namáhání
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 61

61

Základní typy namáhání

4. Smyk



Porušení konzoly betonového skeletu vlivem nadměrného smykového namáhání
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 62

62

Základní typy namáhání

4. Smyk



Detail šroubového spoje

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 63

63

Základní typy namáhání

4. Smyk



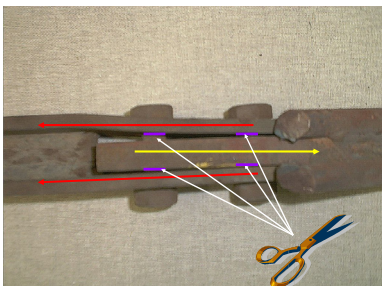
Detail šroubového spoje

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 64

64

Základní typy namáhání

4. Smyk



Detail šroubového spoje

5/10/22 Základní typy namáhání prutů 65

65

Základní typy namáhání

Typ namáhání	Vnitřní síla	Napětí
Osově namáhání (tah, tlak)	N	σ_x Normálové napětí
Ohyb	M_y, M_z	σ_x Normálové napětí
Smyk	V_y, V_z	τ_{xy}, τ_{xz} Smyková napětí
Kroucení	$T = M_x$	τ_{xy}, τ_{xz} Smyková napětí

5/10/22

Základní typy namáhání prutů

66

66

Prosté a složené typy namáhání

Základní typy namáhání:

- prosté (osově, ohyb, kroucení, smyk)
- složené

Kombinace základních případů namáhání:

- prostorový (obecný) ohyb
- excentrický tah a tlak (kombinace ohybu s tahem nebo tlakem)
- kroucení s tahem nebo tlakem a s ohybem

Díky **principu superpozice**, který platí v lineárně pružném oboru, pak lze řešit složené případy namáhání rozkladem na základní stavy a výsledné účinky pak složit (superponovat).

5/10/22

Základní typy namáhání prutů

67

67
