

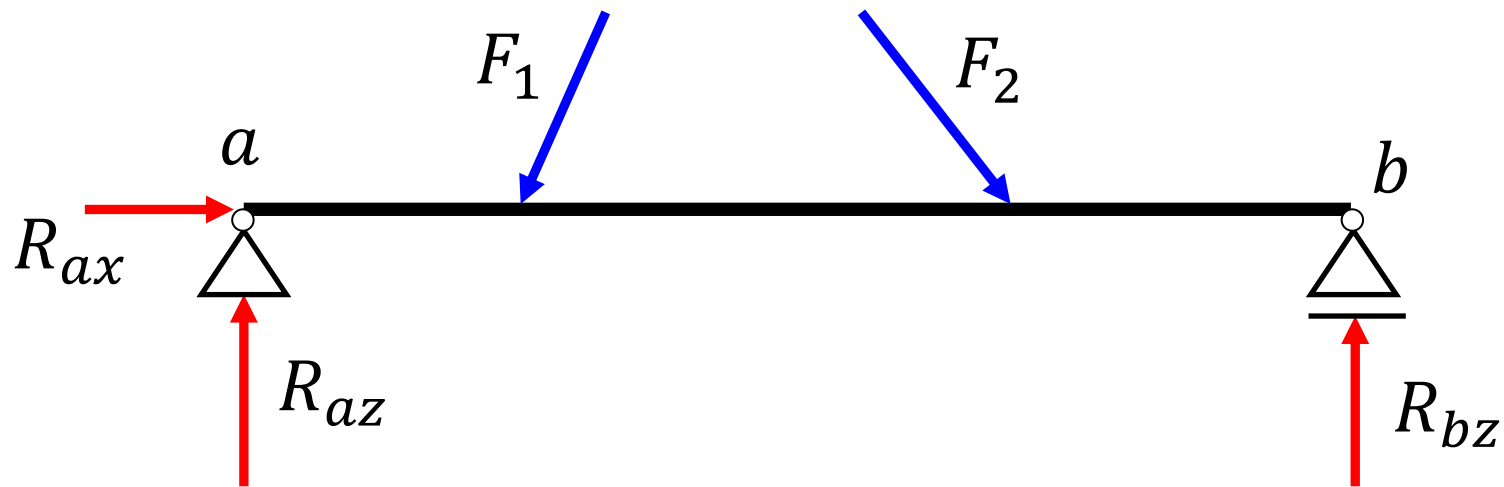
Téma 3: Napětí

- Základní pojmy a výchozí předpoklady, diferenciální podmínky rovnováhy
- Pojem napětí, stav napjatosti tělesa
- Vztahy mezi napětími a vnitřními silami v průřezu prutu
- Základní typy namáhání prutů - prosté a složené

Vnitřní síly, napětí

Na těleso (konstrukci) působí **vnější síly**:

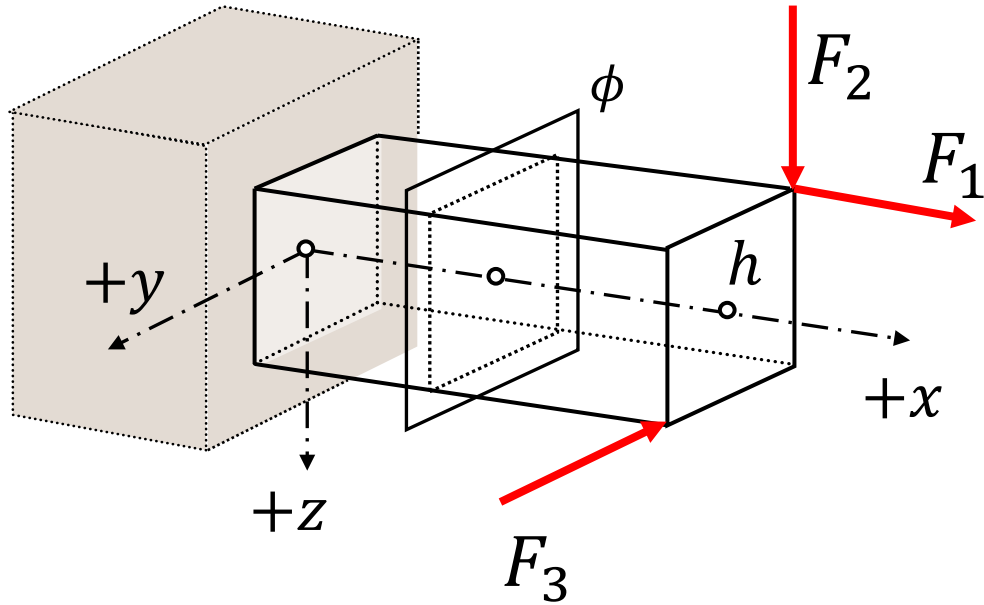
- **Primární** - zatížení $F_i (i = 1, 2, \dots, n)$
- **Sekundární** - reakce vazeb (odezva)



Vnitřní síly:

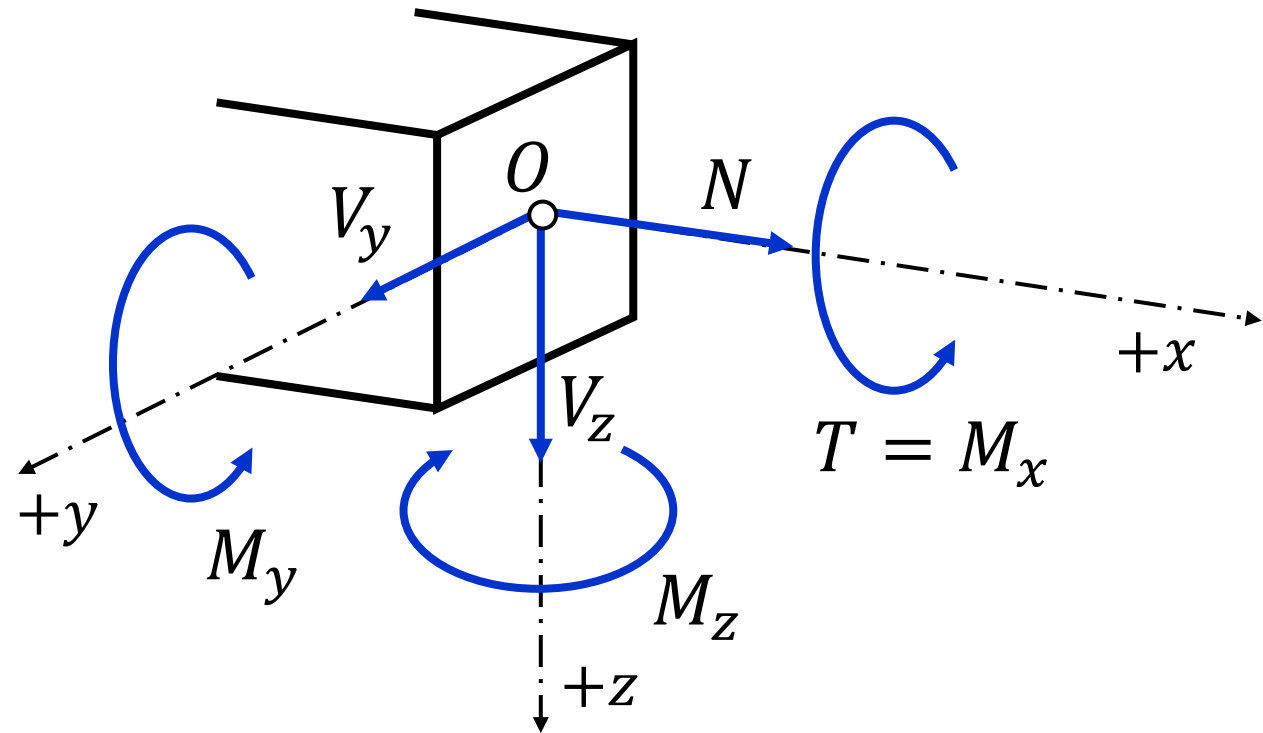
Působí na sebe v libovolném řezu konstrukce podle **principu akce a reakce**.

Prostorové namáhání přímého prutu



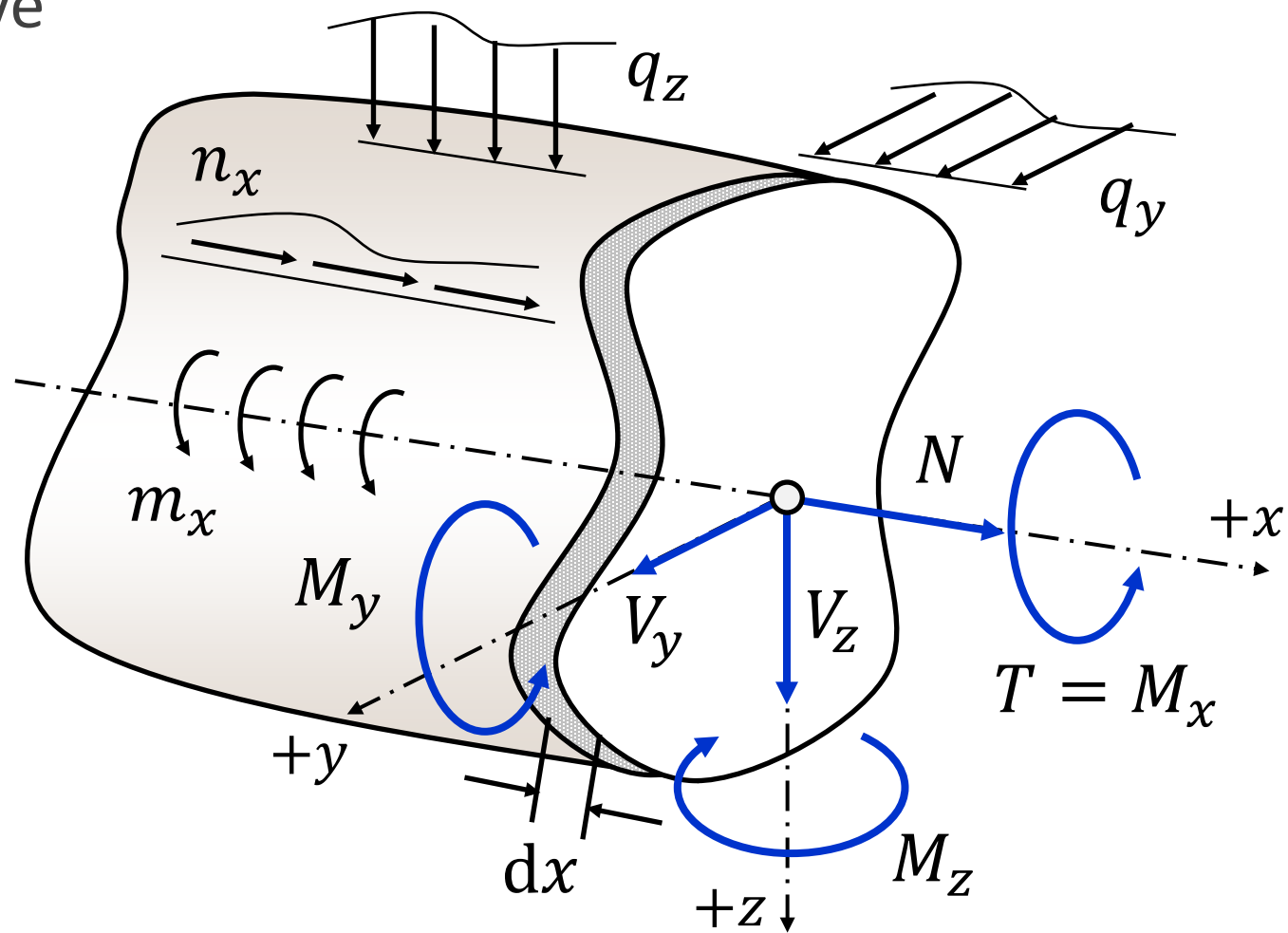
6 složek vnitřních sil

N V_y V_z $T = M_x$ M_y M_z

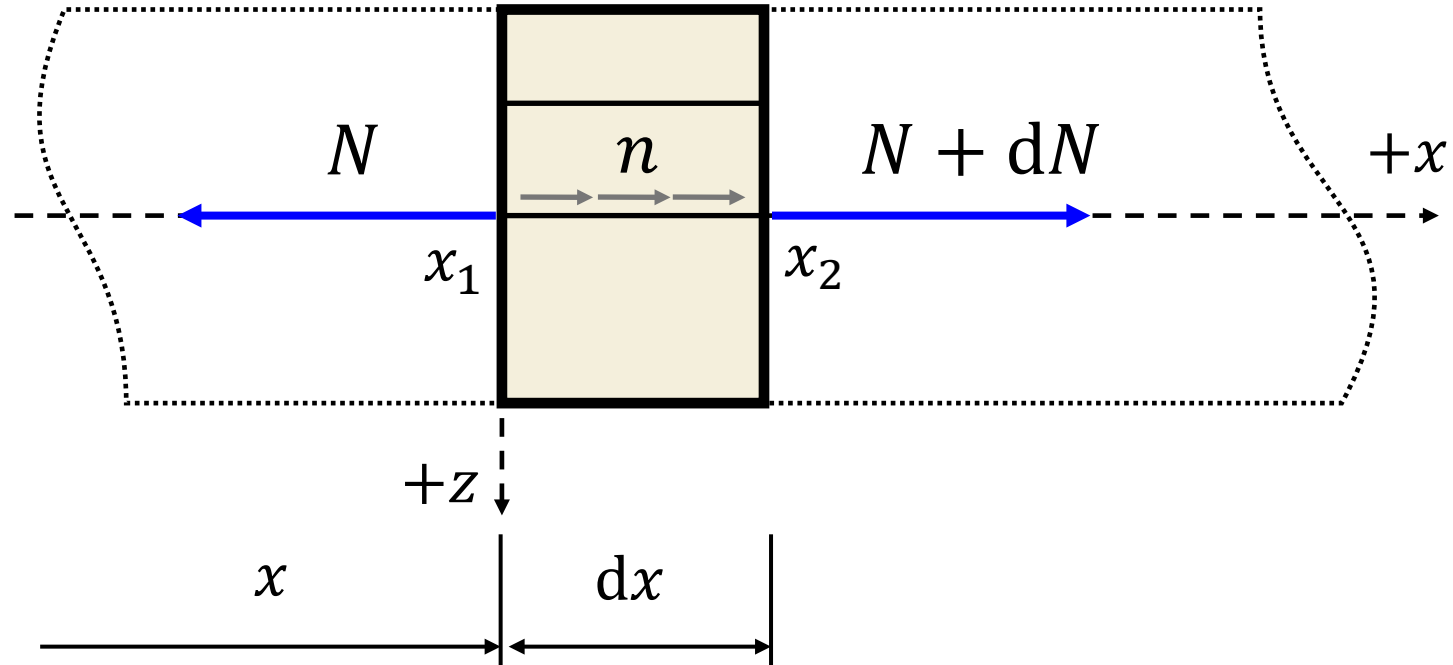


Diferenciální podmínky rovnováhy elementu

Element přímého prostorově
namáhaného prutu



Diferenciální podmínka rovnováhy elementu v osově úloze



$$R_x = 0:$$

$$-N + (N + dN) + n \cdot dx = 0 \quad \rightarrow$$

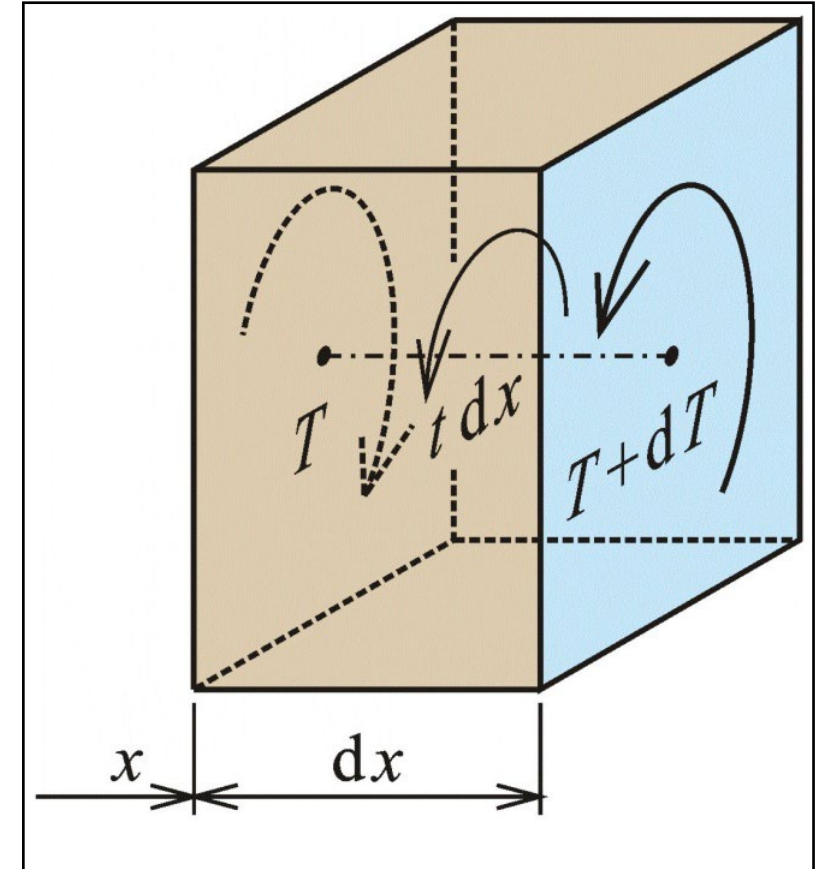
$$\frac{dN}{dx} = -n$$

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v kroucení

Obdoba osově úlohy

$$T_R = 0:$$

$$-T + (T + dT) + t \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = -t$$



Rovnováha elementu v kroucení

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu v příčné úloze

$$R_z = 0:$$

$$-V + (V + dV) + q \cdot dx = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

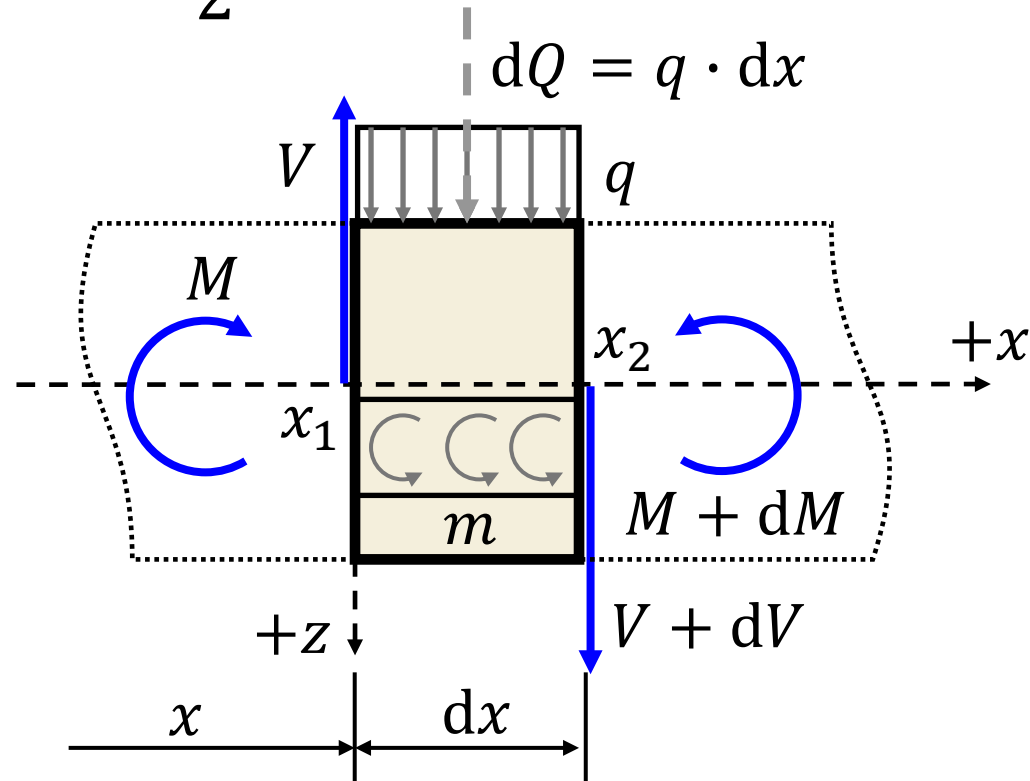
Schwedlerovy vztahy

$$\Sigma M_{i,x_2} = 0:$$

$$-M + (M + dM) - V \cdot dx + \frac{q \cdot dx^2}{2} + m \cdot dx = 0 \rightarrow$$

$$\frac{q \cdot dx^2}{2} \approx 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V - m$$

$$m = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$



Spojité příčné zatížení vs. průběhy vnitřních sil

Souvislost mezi **spojitým příčným zatížením** a **průběhy vnitřních sil**

Závěry:

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

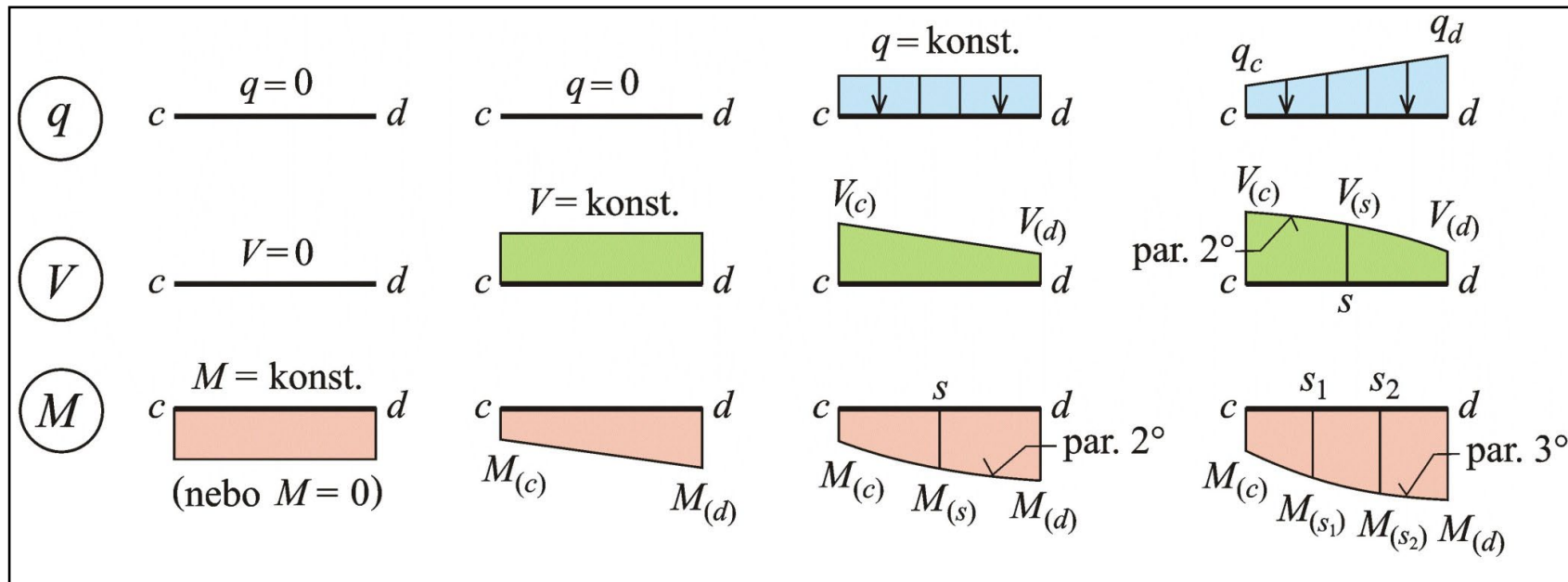
$$\frac{dM}{dx} = V - m$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} - \frac{dm}{dx} = -q - \frac{dm}{dx}$$

$$m = 0 \rightarrow$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q$$



Souvislost mezi spojitým příčným zatížením a průběhy vnitřních sil

Diferenciální podmínky rovnováhy elementu

Element přímého prostorově namáhaného prutu:

Osově namáhání:

$$\frac{dN}{dx} = -n_x$$

Ohyb a smyk ve svislé rovině xz :

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z \quad \frac{dM_y}{dx} = V_z$$

Ohyb a smyk ve vodorovné rovině xy :

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y \quad \frac{dM_z}{dx} = -V_y$$

Kroucení:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{dT}{dx} = -m_x$$

Vnitřní síly, napětí

Vnitřní síly nevyovídají nic o míře namáhání tělesa nebo prvku konstrukce. Nutno uvažovat také s **vlivem tvaru a velikosti průřezové plochy**, které do výpočtu vstupují ve formě **průřezových charakteristik**.

Významnější veličinou je **napětí** – jeden z klíčových pojmů teorie pružnosti a plasticity.

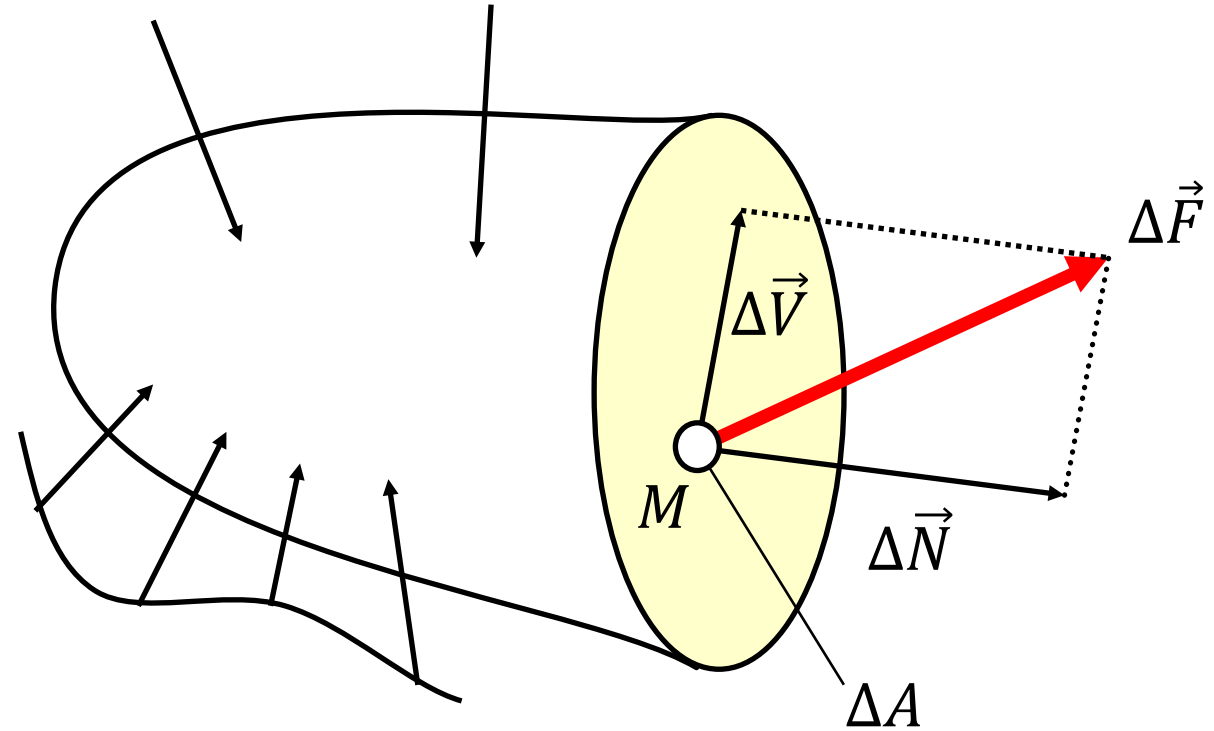


Vnitřní síly, napětí

Nosníky (pruty) stropní konstrukce výzkumného energetického centra VŠB-TU Ostrava



Vnitřní síly, napětí



$\Delta \vec{N}$... **normála** výslednice $\Delta \vec{F}$

$\Delta \vec{V}$... **tangenciální** složka výslednice $\Delta \vec{F}$, která je rovnoběžná s rovinou řezu

ΔA ... Element **průřezové plochy** A (průřezová charakteristika)

Napětí: $\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta \vec{A}}$

Normálové

$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta \vec{A}}$

Smykové

Napětí

Napětí: vektor, charakterizovaný svými složkami.

Měrná jednotka: Pascal ... [Pa]



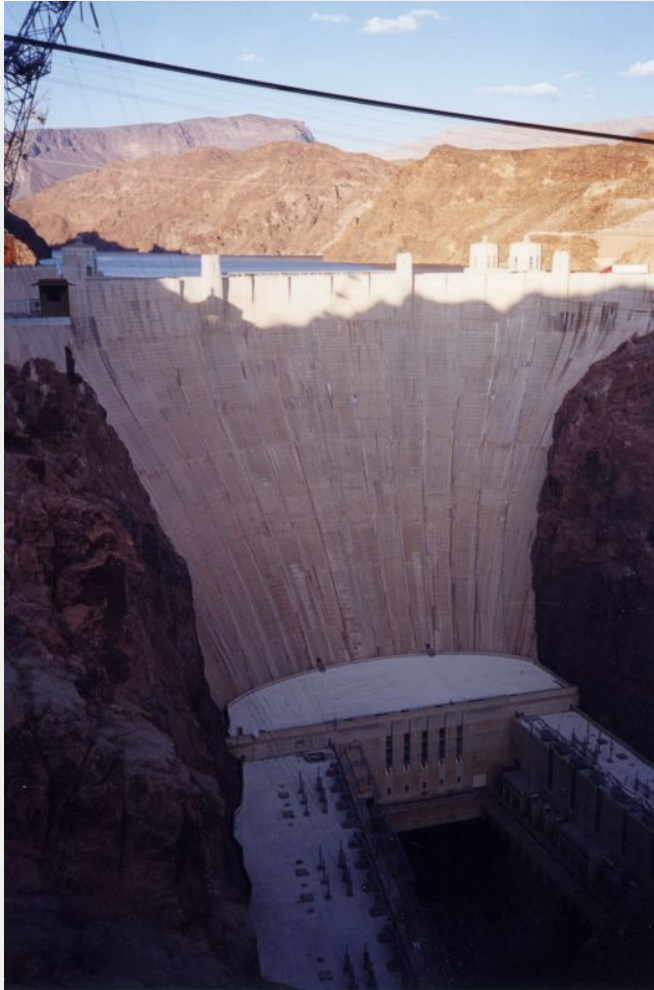
Fyzikální rozměr napětí:

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\text{MPa} = 10^6 \text{Pa} = \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Dům "U čtyř Mamlasů",
Náměstí svobody, Brno

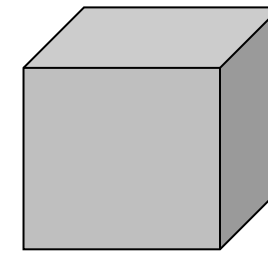
Napětí, masivní konstrukce, těleso



Masivní betonová konstrukce – Hoover Dam, Nevada. Kombinace klenbové a tížné přehrady z roku 1935, výška 221,3 m, délka oblouku 379,2 m, šířka hráze nahoře 13,7 m a 201,2 m dole, 3,5 mil. m³ betonu.

Napětí, tenzor napětí, těleso

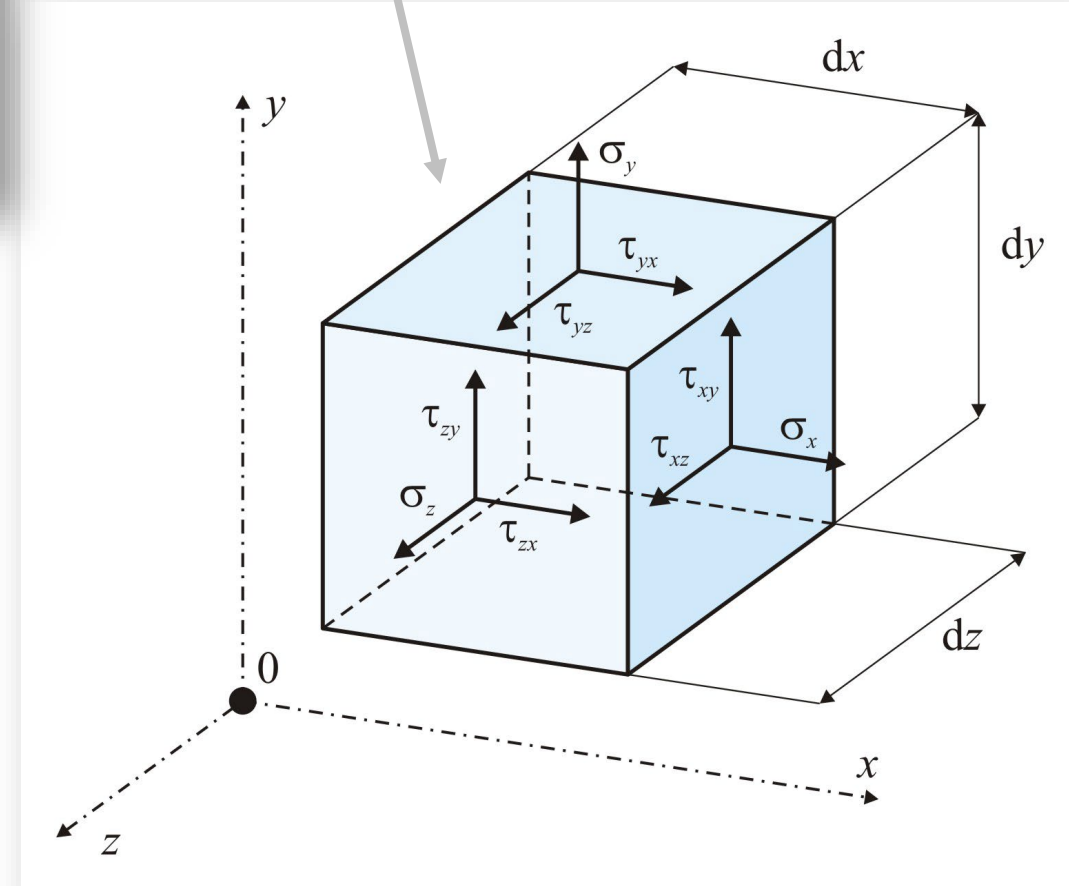
Stav napjatosti tělesa lze vyjádřit tenzorem, který je definován v pravoúhlé soustavě:



Elementární kvádr

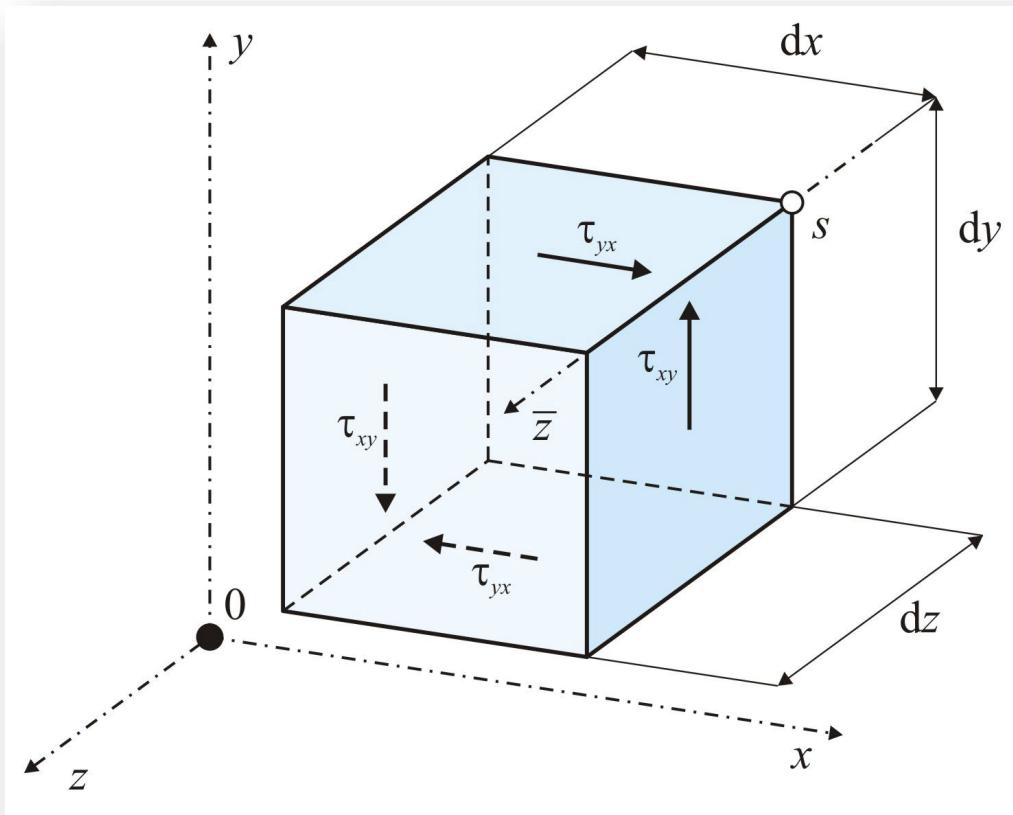
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tenzor napětí - používá se k definování stavu napjatosti v bodě tělesa (napětí ve třech vzájemně kolmých rovinách procházejících bodem)



Věta o vzájemnosti smykových napětí

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta \vec{A}}$$



$$\sum M_z = 0: \quad dQ_{xy} = \tau_{xy} \cdot dA_{yz} = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$$

$$dQ_{xy} \cdot dx - dQ_{yx} \cdot dy = \\ = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \text{obdobně} \quad \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tenzor napětí tělesa: Pouze 6 složek napětí

Vektor napětí:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^T$$

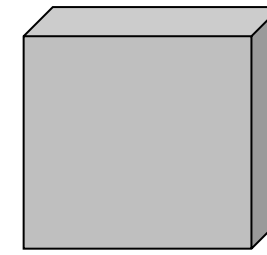
Napětí, nosná stěna



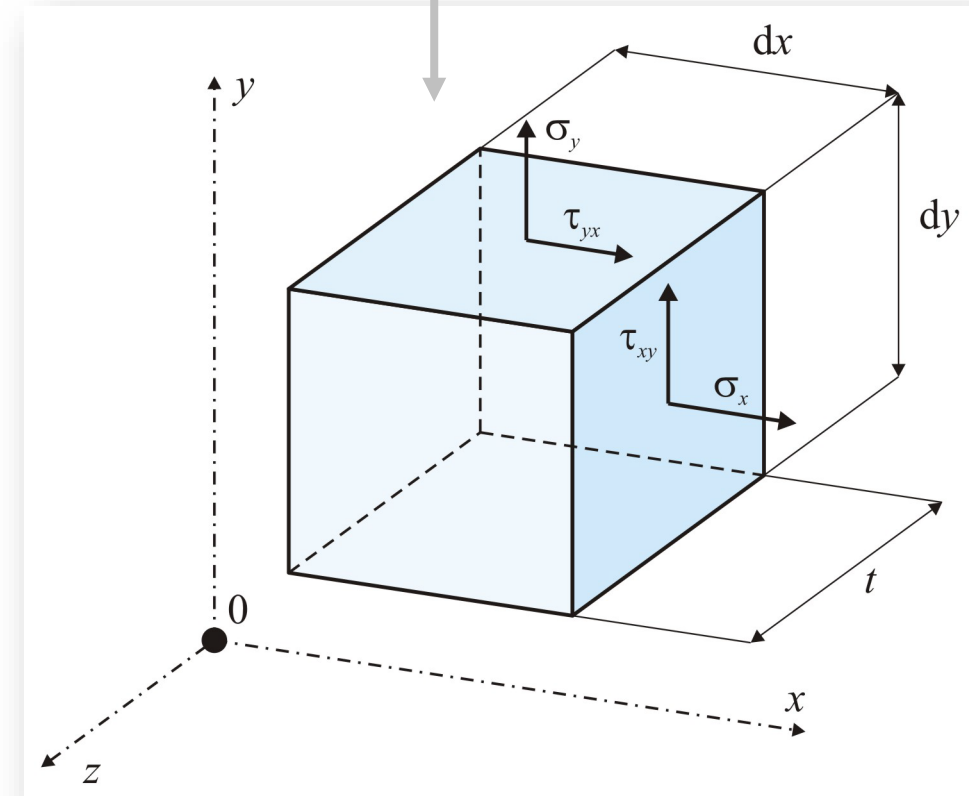
Nosná stěna – svislý plošný nosný prvek.

Porucha štítové stěny z důvodu nerespektování deformace konzoly jeřábové dráhy, průmyslová hala v Bašce

Napětí, tenzor napětí, nosná stěna



Elementární kvádr



Stav napjatosti nosné stěny: 3 složky napětí

Tenzor napětí:

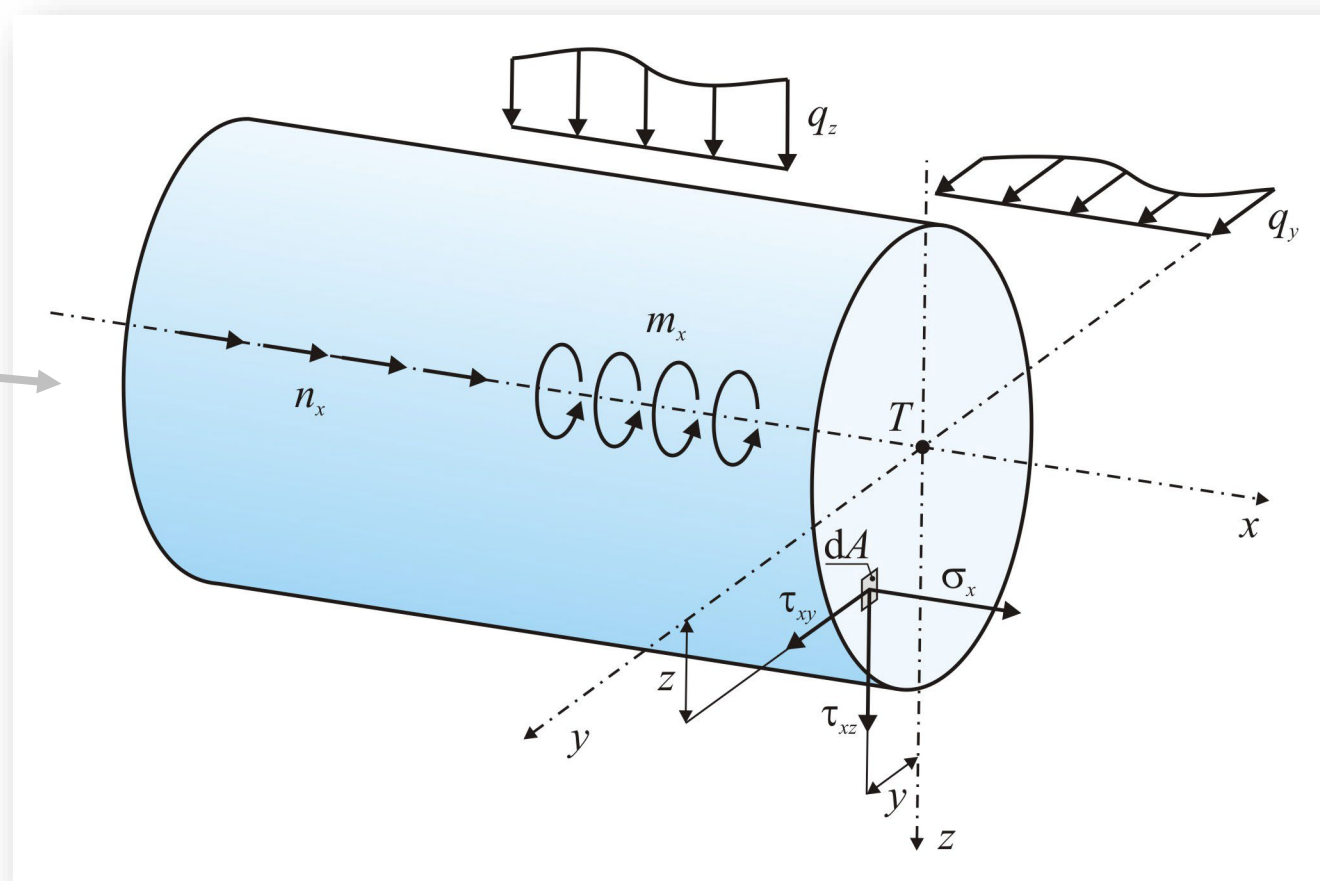
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ \text{sym.} & & 0 \end{bmatrix}$$

Napětí, obecná prutová konstrukce



Prostorový rám (pruty) Kursaal
Convention Centre and
Auditorium, San Sebastian,
Španělsko

Napětí, tenzor napětí, obecně zatížený prut



Stav napjatosti obecně zatíženého prutu: 3 složky napětí

Tenzor napětí:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym.} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Např.:

$$\sigma_x = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dN}{dA} \rightarrow dN = \sigma_x \cdot dA$$

Vnitřní síly vs. napětí v průřezu prutu

$$dN = \sigma_x dA \rightarrow N = \int_A \sigma_x dA$$

Obdobně:

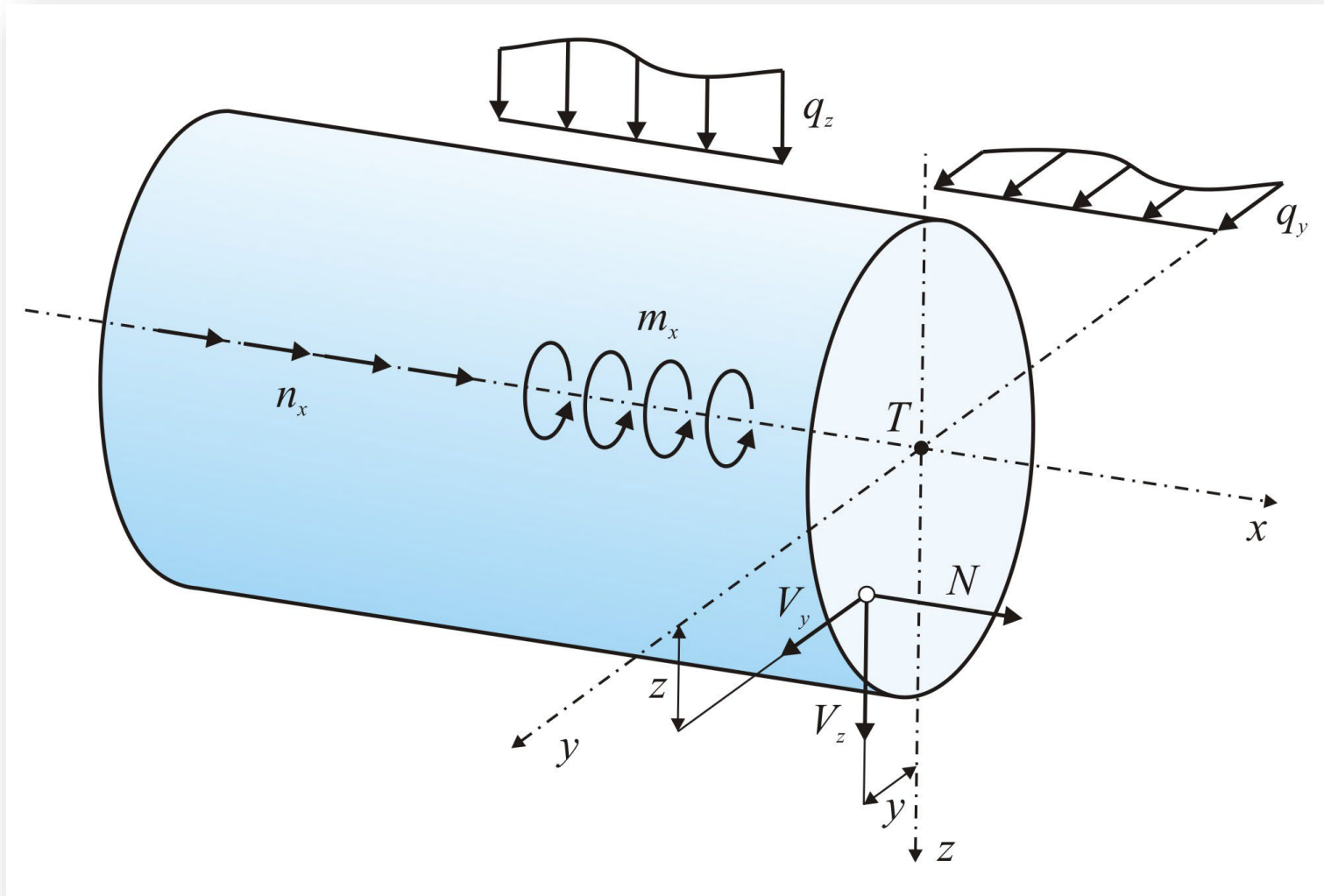
$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad V_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$M_y = N \cdot z = \int_A (\sigma_x \cdot z) dA$$

$$M_z = -N \cdot y = - \int_A (\sigma_x \cdot y) dA$$

$$M_x = V_z \cdot y - V_y \cdot z =$$

$$= \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA$$



Základní typy namáhání

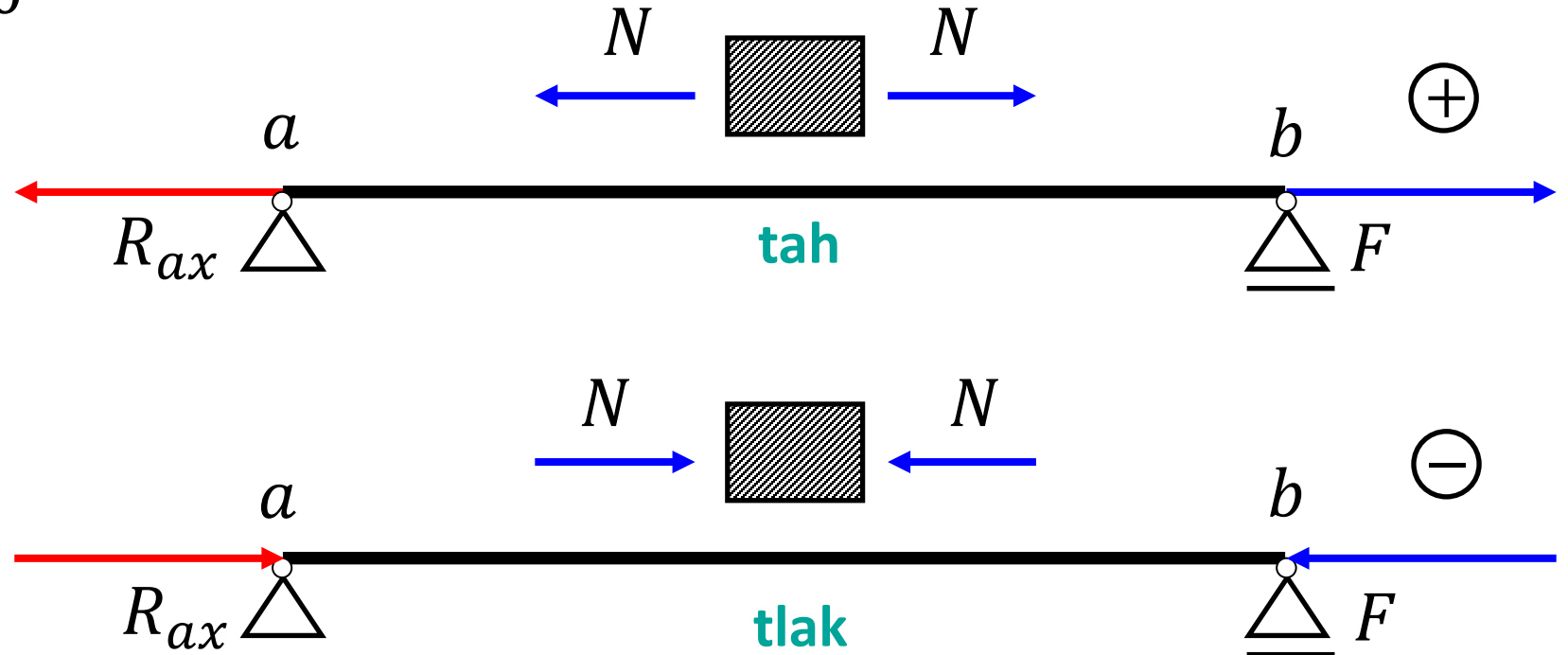
1. **Osově namáhání**

2. Ohyb

3. Kroucení

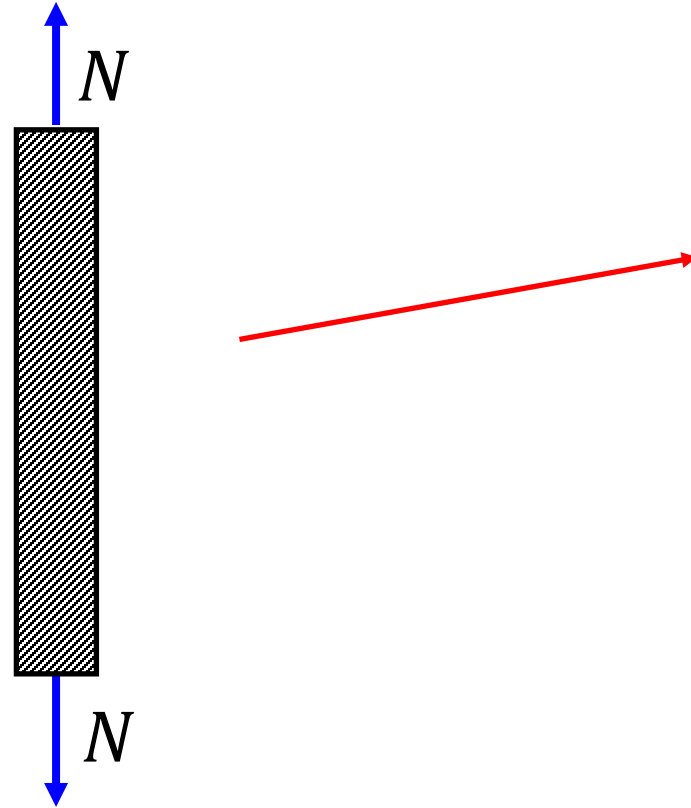
4. Smyk

Normálová síla $N \neq 0$



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

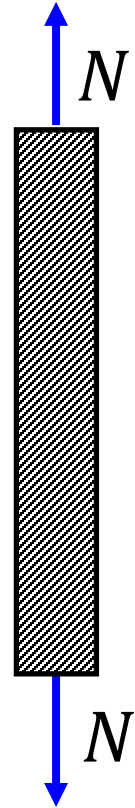


Tahová zkouška oceli



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

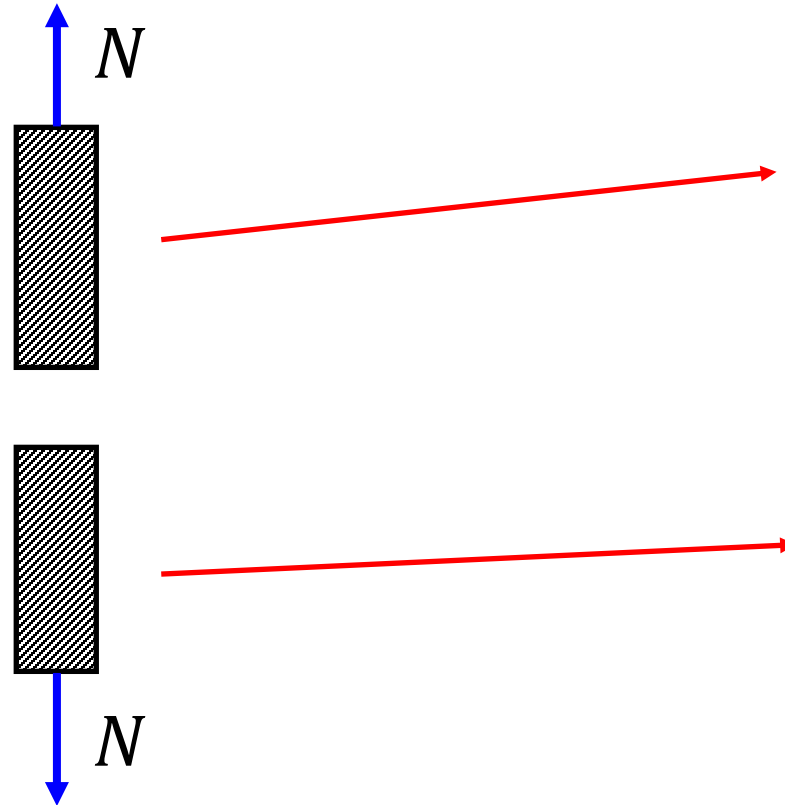


Tahová zkouška oceli



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah



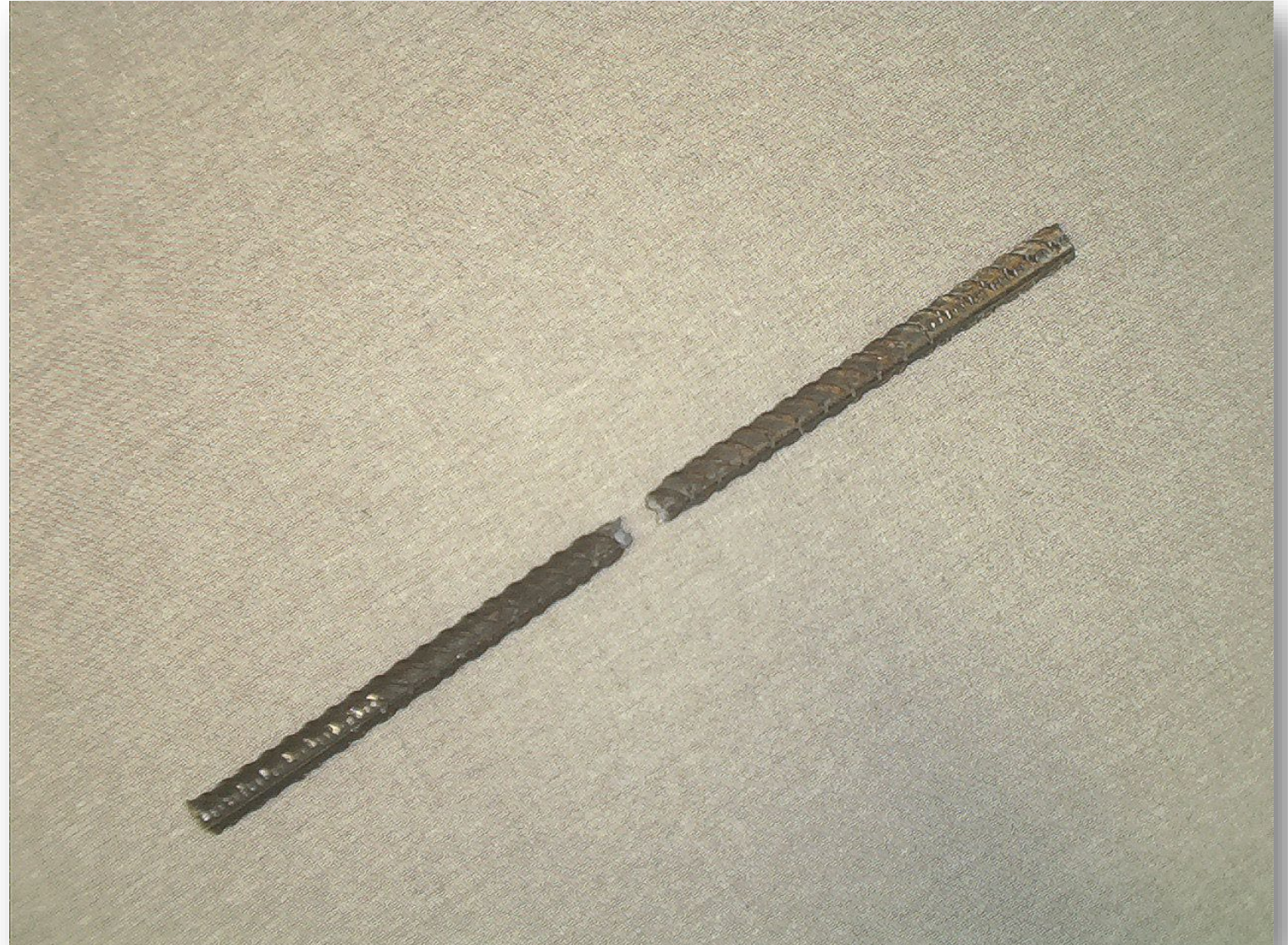
Tahová zkouška oceli



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tah

Přetržený
vzorek oceli
po tahové zkoušce



Základní typy namáhání

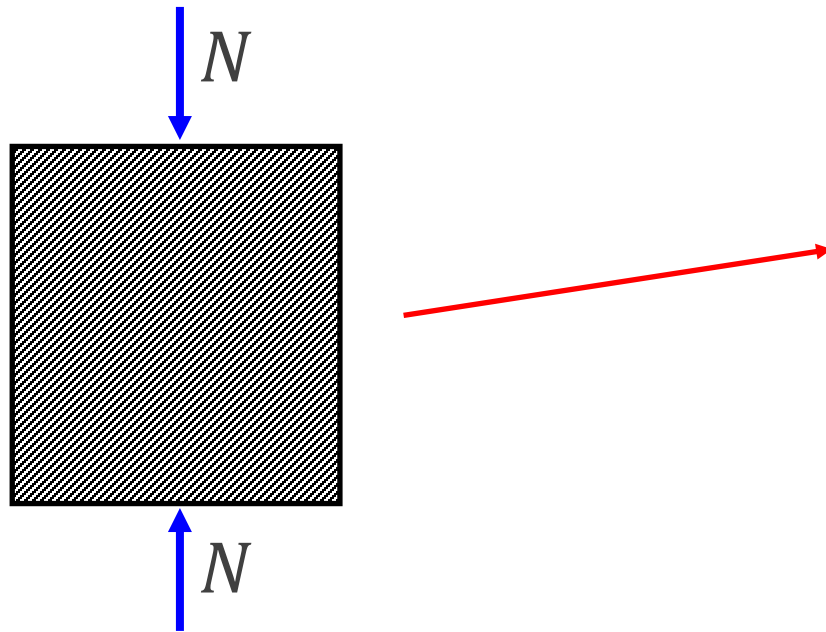
1. Osově namáhání - tah

Přetržené
vzorky oceli
po tahové zkoušce



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

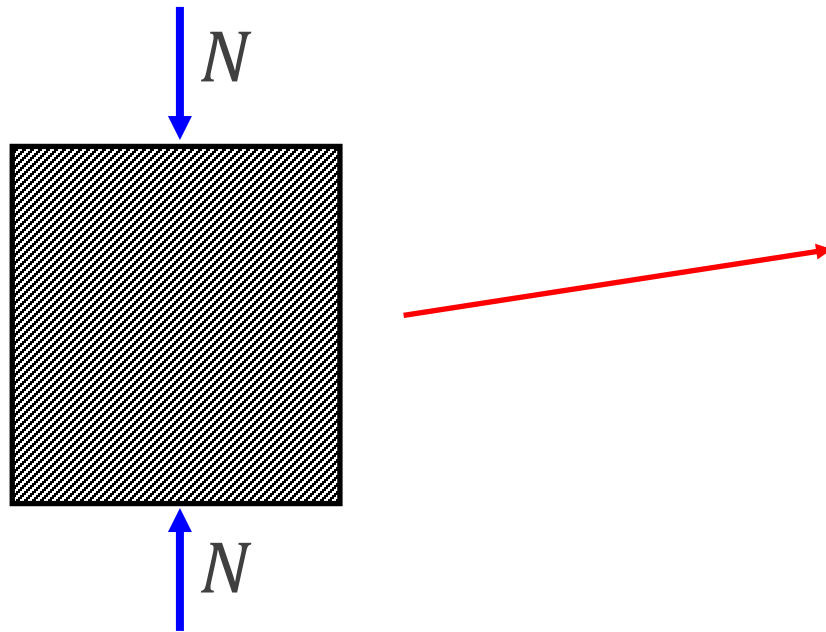


Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

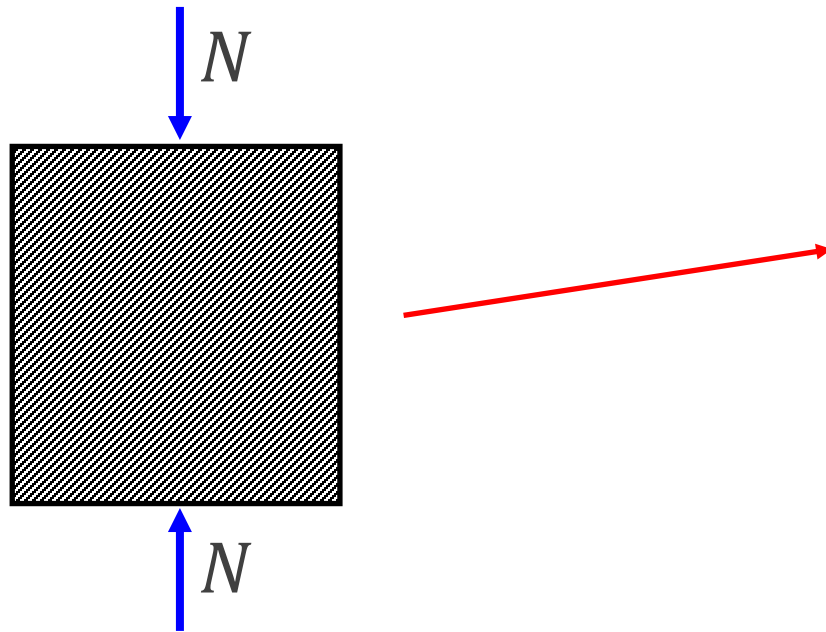


Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

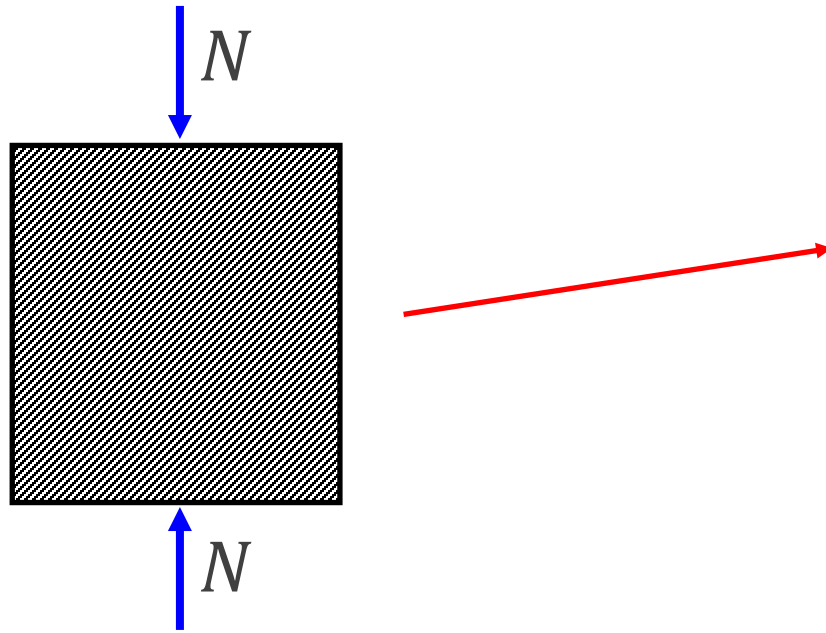


Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

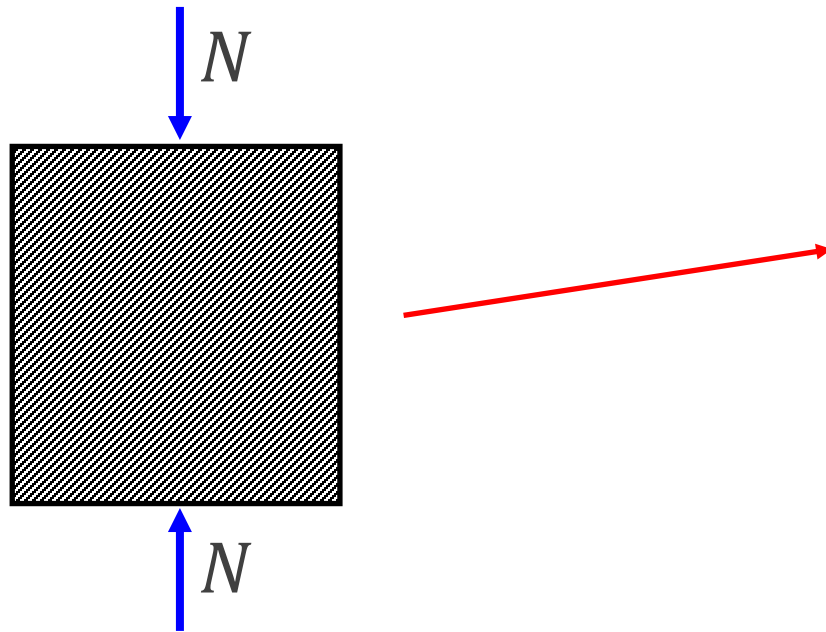


Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

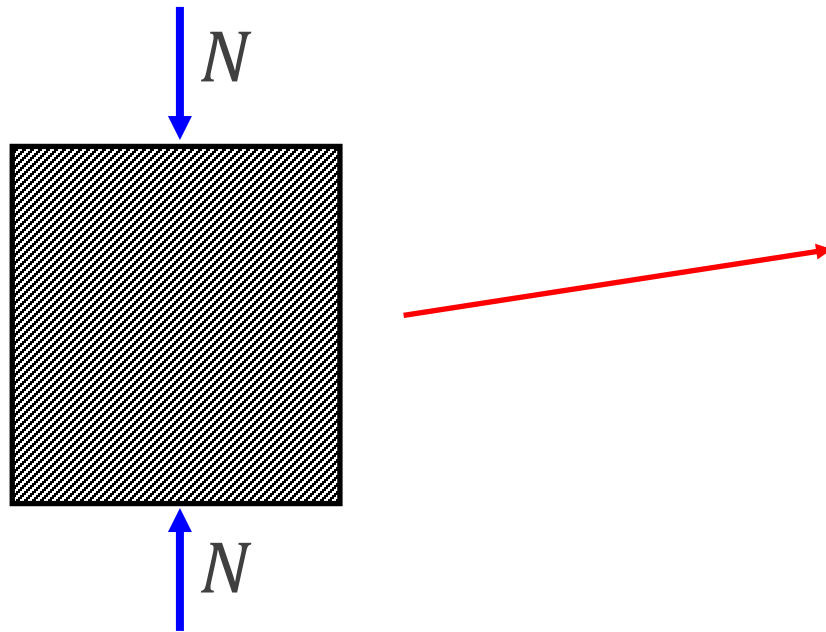


Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

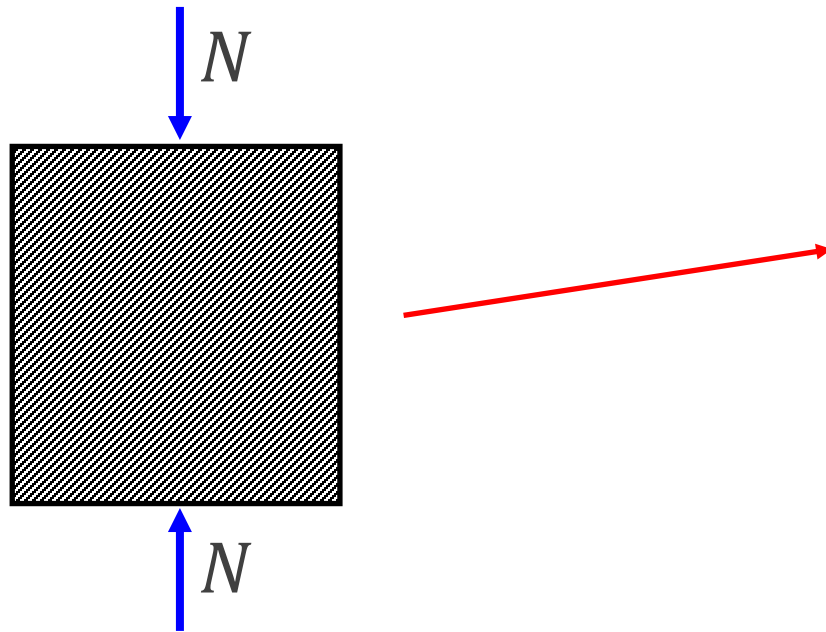


Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak



Tlaková zkouška betonu,
zjišťování krychelné pevnosti betonu v tlaku



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Vzorek betonu
po tlakové zkoušce



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Vzorek betonu
po tlakové zkoušce



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Vzorky betonu,
cementové malty
a popílku po
tlakové zkoušce



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Vzorky betonu,
cementové malty
a popílku po
tlakové zkoušce



Základní typy namáhání

1. Osově namáhání - tlak

Tlaková zkouška zdiva
foto: Ing. Jiří Lukš, Ph.D.



Základní typy namáhání

1. Osové namáhání - tlak

Tlaková zkouška zdiva
foto: Ing. Jiří Lukš, Ph.D.



Základní typy namáhání

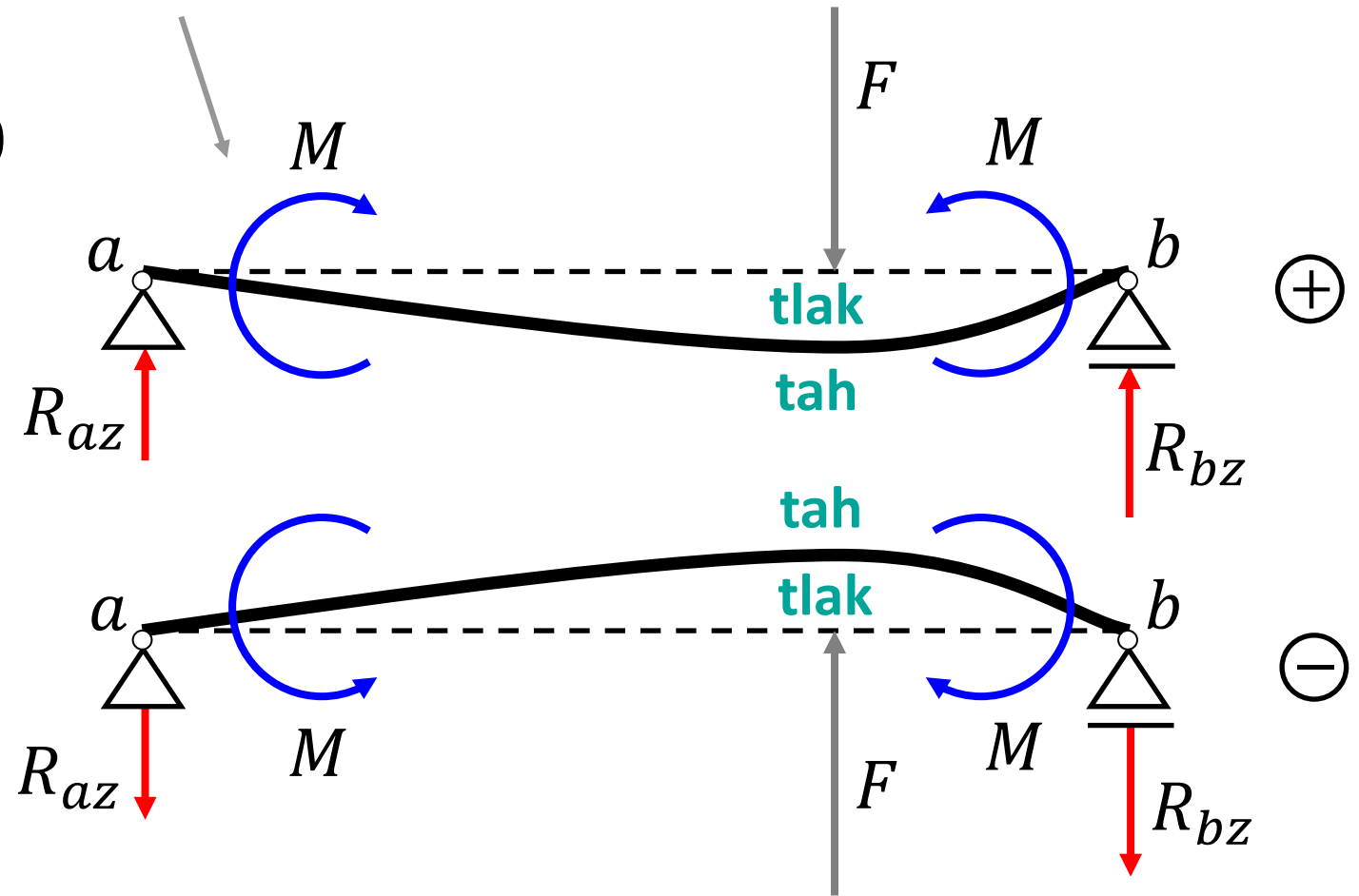
1. Osově namáhání

2. **Ohyb**

3. Kroucení

4. Smyk

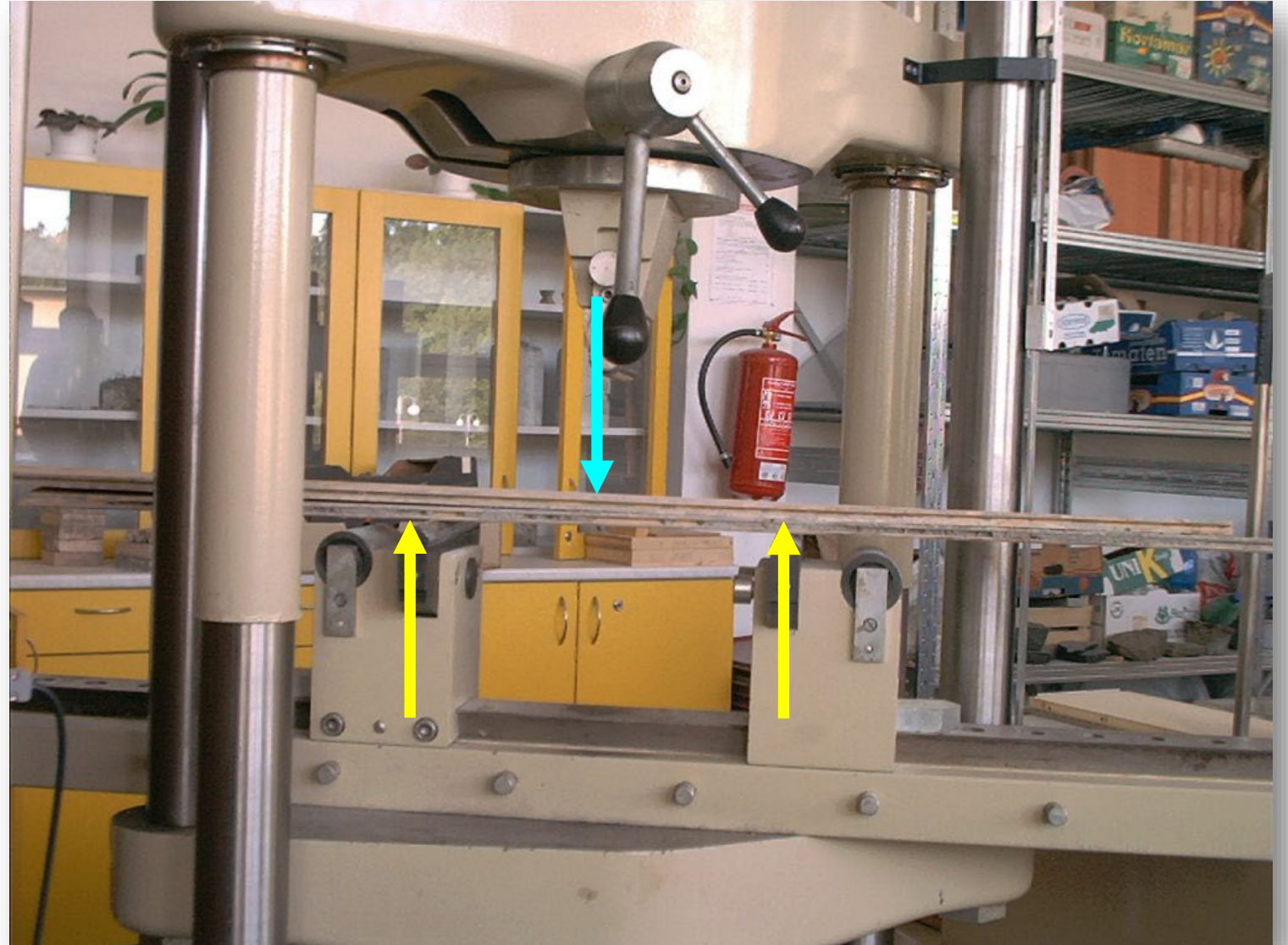
Ohybové momenty $M_y, M_z \neq 0$



Základní typy namáhání

2. Ohyb

Princip ohybové zkoušky
(tříbodový ohyb)



Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb



Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb

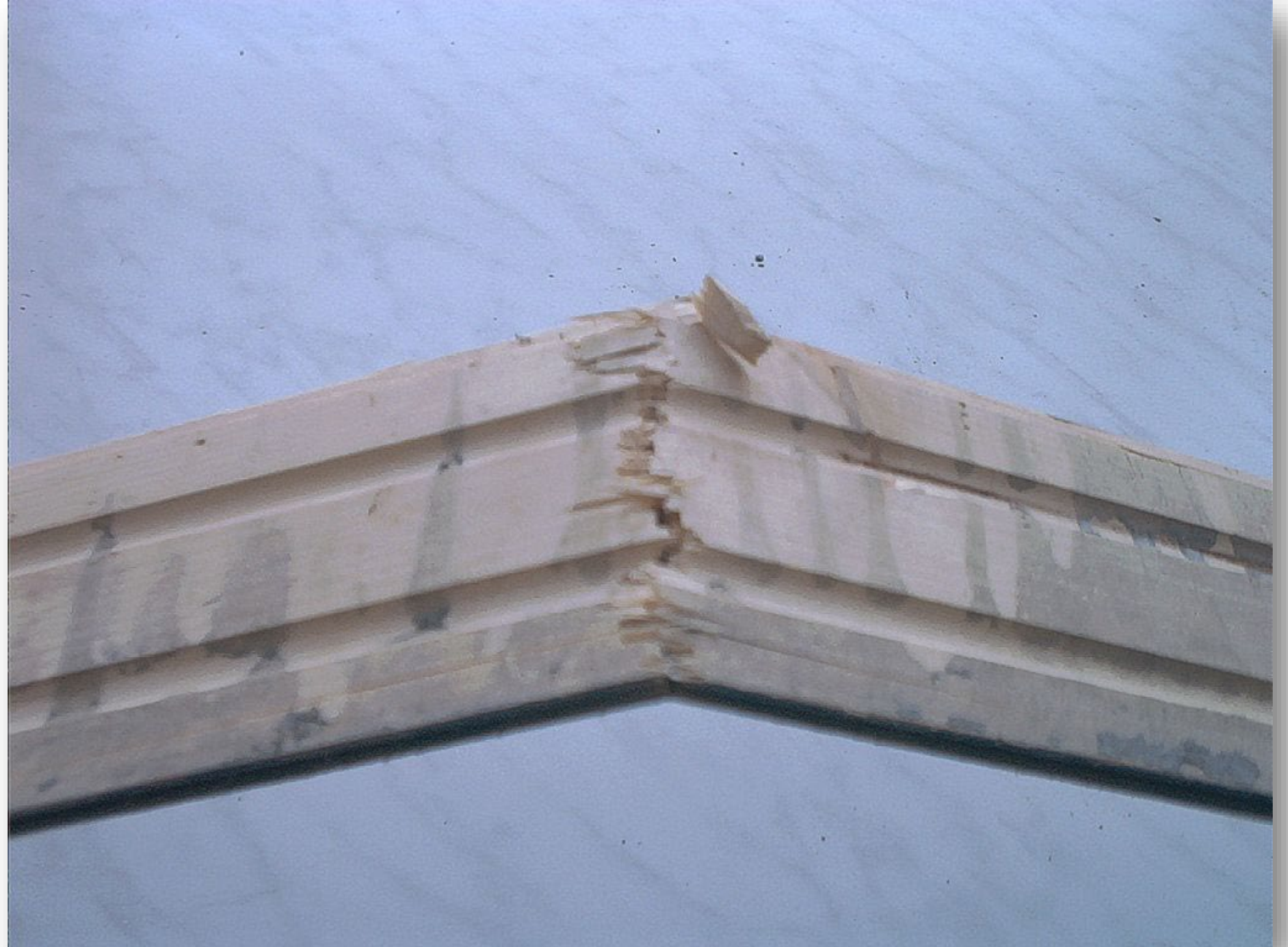


Ohybová zkouška

Základní typy namáhání

2. Ohyb

Zkušební vzorek
po ohybové zkoušce



Základní typy namáhání

2. Ohyb

Zlomená
keramická
stropnice
Hurdis po
zatěžovací
zkoušce
ohybem
foto:
doc. Ing. Václav
Cepek, CSc.



Základní typy namáhání

2. Ohyb

Ověření odolnosti
vláknobetonů a
drátkobetonů při
působení vysokých
teplot

foto: Zuzana Ševčíková,
studentka oboru
Stavební hmoty a
diagnostika staveb



Základní typy namáhání

2. Ohyb

Ověření odolnosti
vláknobetonů a
drátkobetonů při působení
vysokých teplot
foto: Zuzana Ševčíková,
studentka oboru Stavební
hmoty a diagnostika
staveb



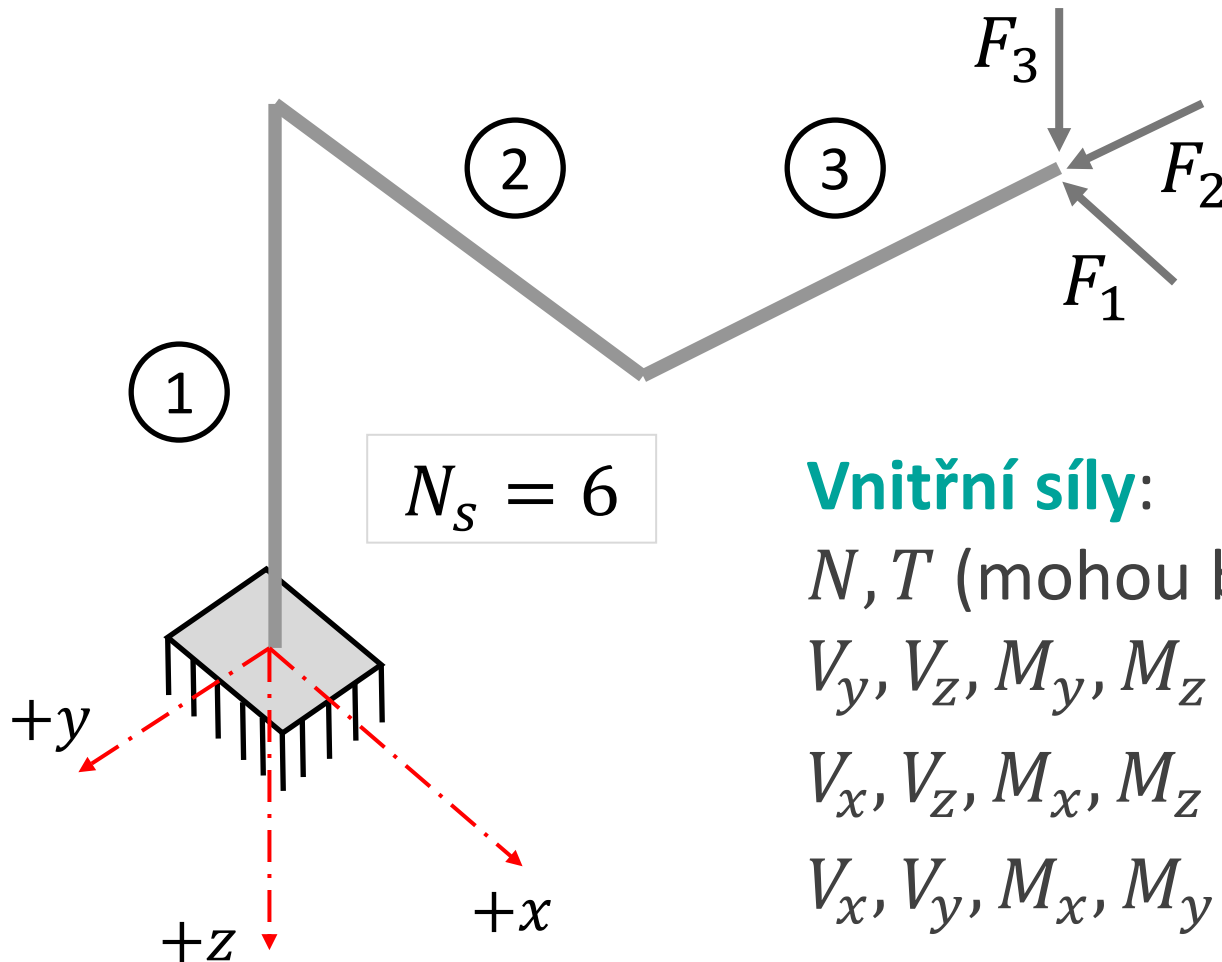
Základní typy namáhání

1. Osově namáhání

2. Ohyb

3. **Kroucení**

4. Smyk



Kroucí moment $T = M_x \neq 0$

Např. **prostorově lomený nosník**

Vnitřní síly:

N, T (mohou být $\neq 0$ v každém prutu),

V_y, V_z, M_y, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou x)

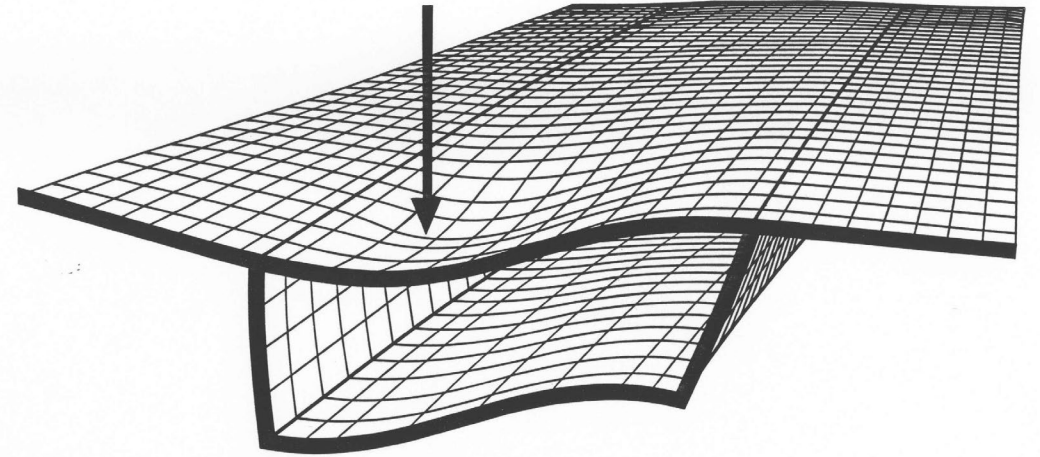
V_x, V_z, M_x, M_z (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou y)

V_x, V_y, M_x, M_y (mohou být $\neq 0$ v prutech \parallel s osou z)

Základní typy namáhání



3. Kroucení



Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – průřez mostní konstrukce

Ukázka prvku namáhaného **kroucením** – dřevěný rumpál

Základní typy namáhání

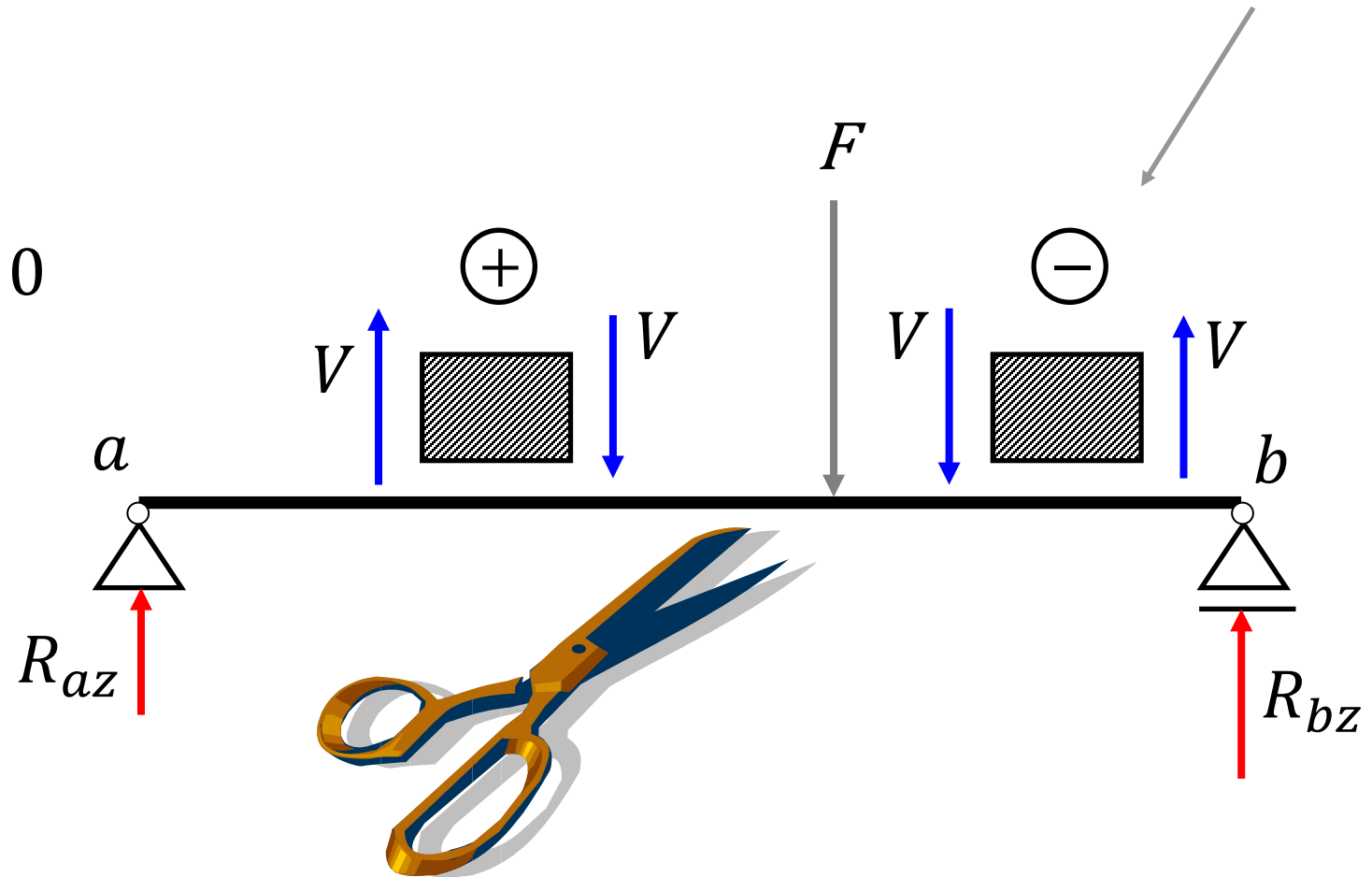
1. Osově namáhání

2. Ohyb

3. Kroucení

4. **Smyk**

Posouvající síly $V_y, V_z \neq 0$



Základní typy namáhání

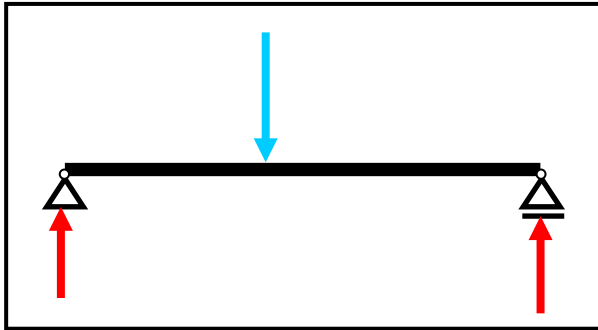
4. Smyk

Šroubový spoj
stropních nosníků a sloupu,
foto: doc. Ing. Karel Kubečka, Ph.D.



Základní typy namáhání

4. Smyk

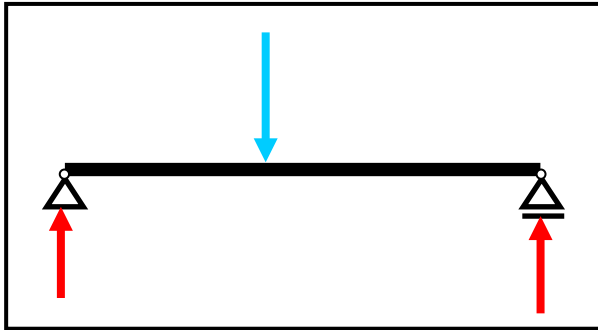


Povodňové poruchy mostů
v roce 2002, Jižní Čechy,
foto: prof. Ing. Vladimír
Tomica, CSc.



Základní typy namáhání

4. Smyk



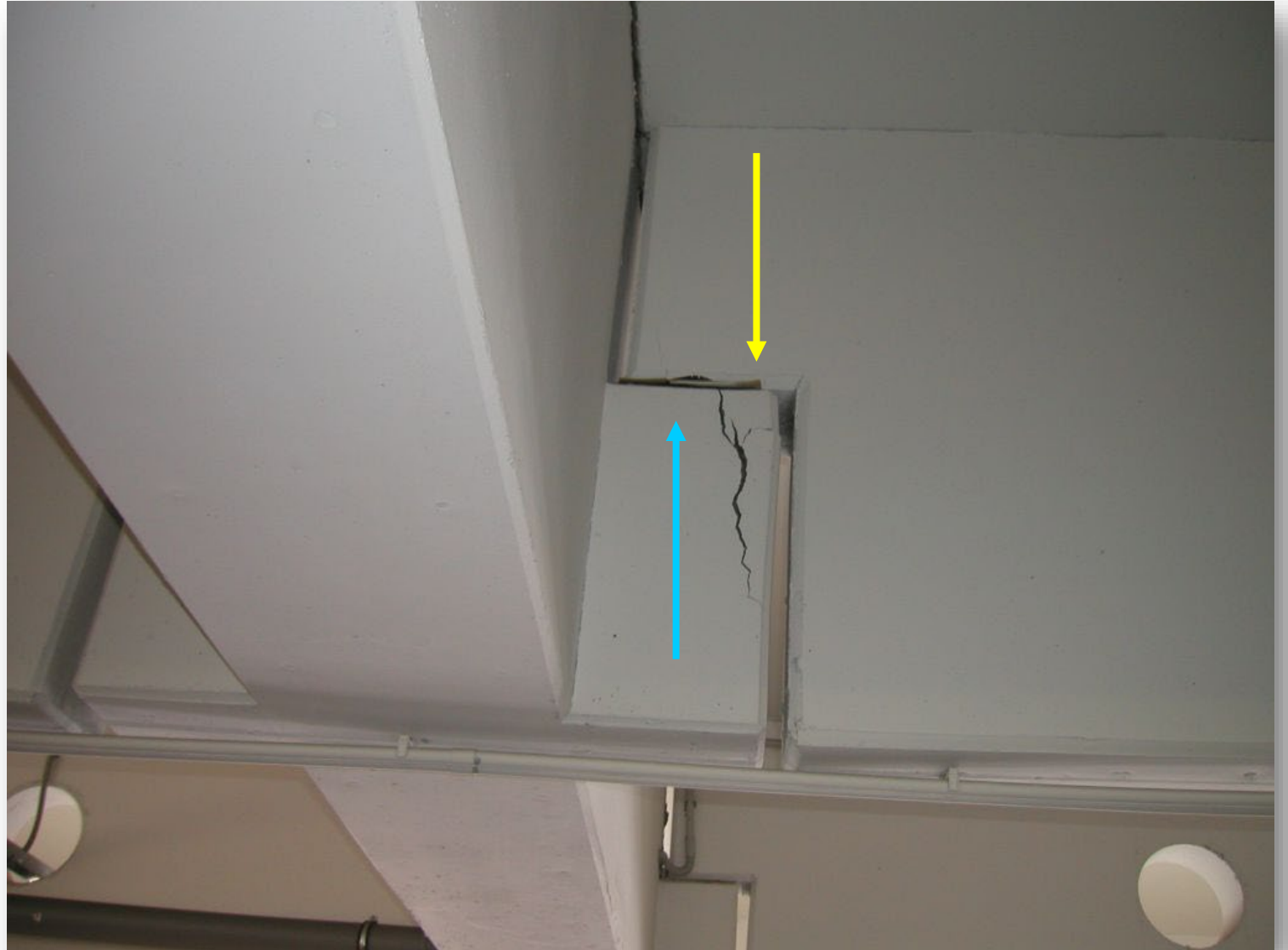
Povodňové poruchy mostů
v roce 2002, Jižní Čechy,
foto: prof. Ing. Vladimír Tomica, CSc.



Základní typy namáhání

4. Smyk

Porušení konzoly betonového skeletu vlivem nadměrného smykového namáhání
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.



Základní typy namáhání

4. Smyk

Porušení konzoly betonového skeletu vlivem nadměrného smykového namáhání
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.



Základní typy namáhání

4. Smyk

Porušení konzoly betonového skeletu vlivem nadměrného smykového namáhání
foto: prof. Ing. Radim Čajka, CSc.



Základní typy namáhání

4. Smyk



Detail šroubového spoje

Základní typy namáhání

4. Smyk

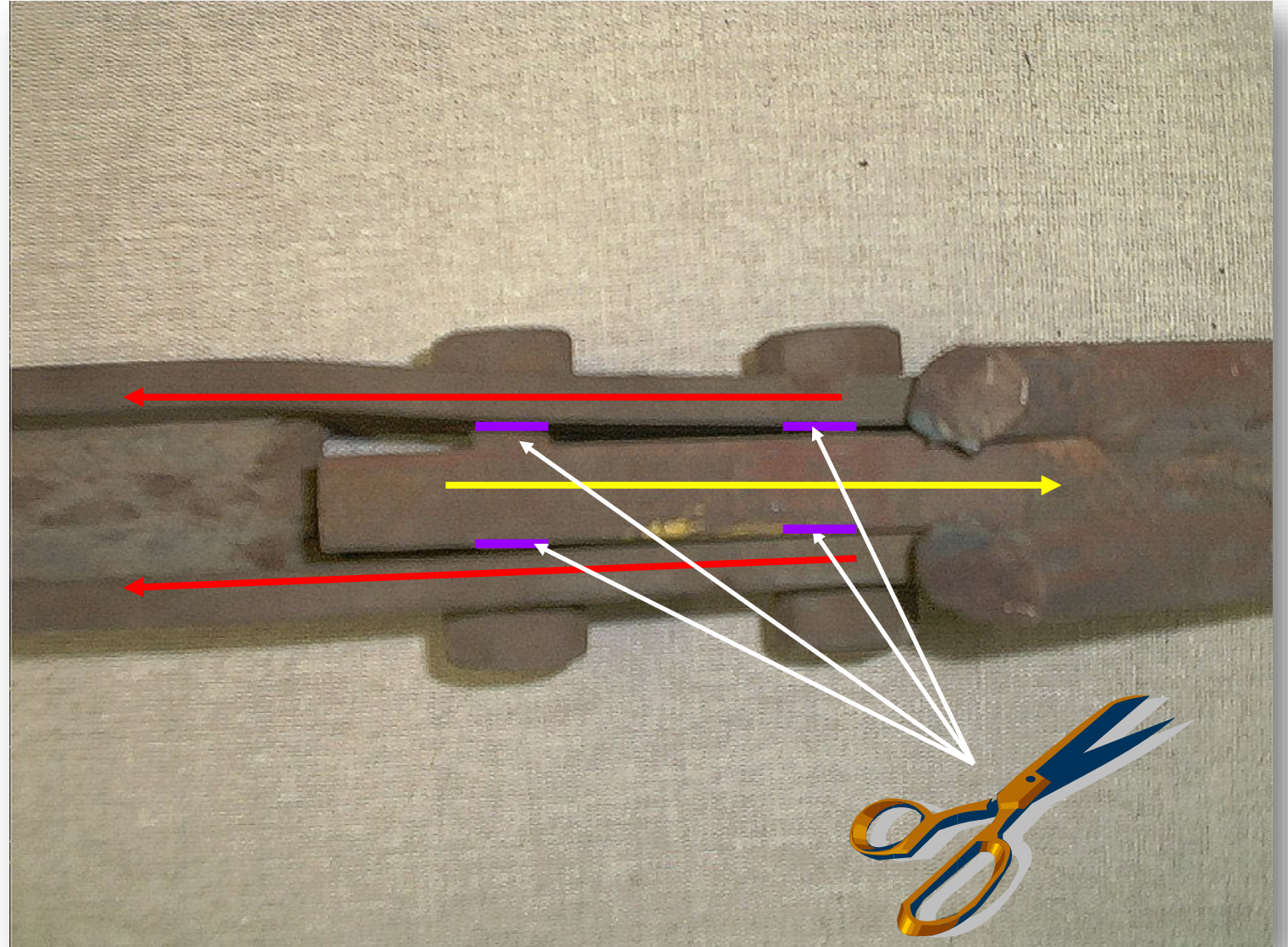
Detail šroubového spoje



Základní typy namáhání

4. Smyk

Detail šroubového spoje



Základní typy namáhání

<i>Typ namáhání</i>	<i>Vnitřní síla</i>	<i>Napětí</i>
Osové namáhání (tah, tlak)	N	σ_x Normálové napětí
Ohyb	M_y, M_z	σ_x Normálové napětí
Smyk	V_y, V_z	τ_{xy}, τ_{xz} Smyková napětí
Kroucení	$T = M_x$	τ_{xy}, τ_{xz} Smyková napětí

Prosté a složené typy namáhání

Základní typy namáhání:

- a) **prosté** (osové, ohyb, kroucení, smyk)
- b) **složené**

Kombinace základních případů namáhání:

- prostorový (obecný) ohyb
- excentrický tah a tlak (kombinace ohybu s tahem nebo tlakem)
- kroucení s tahem nebo tlakem a s ohybem

Díky **principu superpozice**, který platí v lineárně pružném oboru, pak lze řešit složené případy namáhání rozkladem na základní stavy a výsledné účinky pak složit (superponovat).