

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STAVEBNÍ | KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY

Téma 2: Průřezové charakteristiky

- **Těžiště** (Základy stavební mechaniky)
- **Kvadratické momenty rovinných obrazců**, momenty setrvačnosti a deviační moment
- Centrální kvadratické momenty základních a složených obrazců
- Kvadratické momenty k pootočeným osám
- Polární moment setrvačnosti

30/9/22 Průřezová plastická 0

0

Těžiště

Hmotný útvar – v nejobecnějším případě trojrozměrné těleso z látky o měrné tíze γ [kN/m^3], také idealizovaná tělesa jako např.:

- **Hmotný rovinný obrazec** (tuhá deska) – o měrné tíze γ [kN/m^2]
- **Hmotná rovinná čára** – o měrné tíze γ [kN/m]

Tíhově homogenní hmotné útvary – měrná tíha je po celém útvaru konstantní

Fyzikální význam těžiště:

- Hmotný bod se soustředěnou hmotností útvaru.
- Bod, ve kterém lze hmotný útvar vystavený tíze podepřít proti posunutí aniž by docházelo k rotaci.

Těžiště je chápáno jako statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru či rovině, které tvoří vlastní tíhy elementů hmotného útvaru.

Těžišnice – osa procházející těžištěm



30/9/22 Pojem těžiště 1

1

Center of Gravity of General 2D Lines

Rovinné čáry **jednoduché** (po celé délce jeden matematický předpis) a **složené** (několik spojených jednoduchých čar)

Jednoduché rovinné čáry – úsečka, kružnicový oblouk, parabolický oblouk.

Předpoklad: Čáry **tíhově homogenní**, u kterých hodnota měrné tíhy γ nemá na polohu těžiště žádný vliv, proto $\gamma = 1$ (bez fyzikálního rozměru)

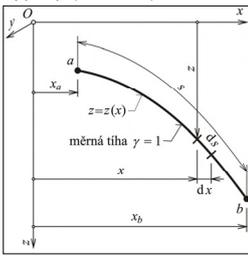
Podle diferenciální geometrie rovinných křivek platí:

$$ds = \sqrt{1+z'^2} dx \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

Délka (a zároveň i tíha) čáry:

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+z'^2} dx$$

Rovinná čára (křivka)



30/9/22 Těžiště rovinných čar 2

2

Těžiště obecné rovinné čáry

V každém elementu působí elementární síla vyjadřující jeho vlastní tíhu: $dP = \gamma \cdot ds$
 Vzniká **soustava rovnoběžných sil** se statickým středem v těžišti.

Směr **paprsků rovnoběžných sil** lze volit:

- a) V rovině vyšetřované čáry xz (povaha **rovinné soustavy sil**) směr svislý (z), pak **vodorovný** (x)

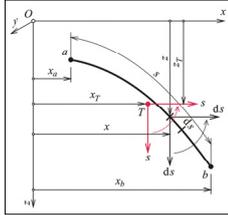
Statické momenty sil k momentovému středu (k počátku O):

$$S_z = \int_s x ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1+z'^2} dx \quad S_x = \int_s z ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1+z'^2} dx$$

Z **Varignonovy věty**:

$$x_T = \frac{S_z}{S} \quad z_T = \frac{S_x}{S}$$

Těžiště rovinné čáry jako statický střed **rovinné soustavy rovnoběžných sil**



30/9/22

Těžiště rovinných čar

3

3

Těžiště obecné rovinné čáry

Směr **paprsků rovnoběžných sil** lze volit:

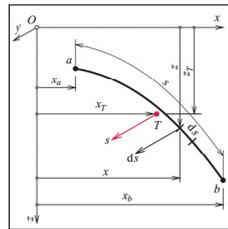
- b) **Kolmo** k rovině vyšetřované čáry xz , tedy ve směru y (povaha **prostorové soustavy sil**). Výpočet statických momentů ke dvěma souřadnicovým osám (z a x).

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům.

Poučka: Je-li rovinná čára (nebo jakýkoliv jiný vyšetřovaný útvar) symetrická podle nějaké osy symetrie, leží těžiště čáry (útvary) nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný útvar dvě nebo více os symetrie – **těžiště leží v průsečíku os symetrie** a není třeba zjišťovat výpočtem.

Těžiště rovinné čáry jako statický střed **prostorové soustavy rovnoběžných sil**



30/9/22

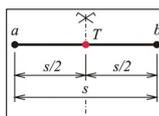
Těžiště rovinných čar

4

4

Těžiště úsečky

Úsečka má osu symetrie - těžiště leží uprostřed úsečky při jakémkoliv sklonu úsečky.



Těžiště úsečky

30/9/22

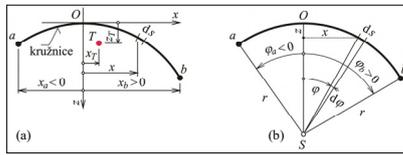
Těžiště jednoduchých rovinných čar

5

5

Těžiště kružnicového oblouku

- a) **Pravouhlá soustava** – složité matematické výrazy
 b) **Polární soustava** – pól S ve středu kružnice, úhlová souřadnice φ měřena od svislice procházející středem S kružnice, kladná ve směru hodinových ručiček, v radiánech, středové úhly φ_a a φ_b , poloměr kružnice r .



Kružnicový oblouk v **pravouhlé** (a) a **polární** (b) souřadnicové soustavě

30/9/22 1631048 jednoduchých rovinných čar 6

6

Těžiště kružnicového oblouku

Platí: $x = r \cdot \sin \varphi$ $x_a = r \cdot \sin \varphi_a$ $x_b = r \cdot \sin \varphi_b$
 $z = r \cdot (1 - \cos \varphi)$ $ds = r \cdot d\varphi$

Délka oblouku: $s = \int_s ds = r \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi = r \cdot (\varphi_b - \varphi_a)$

Statické momenty: $S_x = \int_s z ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} (1 - \cos \varphi) d\varphi = r^2 \cdot [(\varphi_b - \varphi_a) - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)]$

$S_z = \int_s x ds = r^2 \cdot \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sin \varphi d\varphi = r^2 \cdot (\cos \varphi_a - \cos \varphi_b)$

Souřadnice těžiště: $x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a}$ $z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a}$

30/9/22 1631048 jednoduchých rovinných čar 7

7

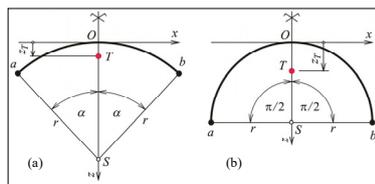
Těžiště kružnicového oblouku

- a) **Symetrický kružnicový oblouk** podle osy z , středový úhel 2α , $\varphi_a = -\alpha$, $\varphi_b = +\alpha$

$x_T = 0$
 $z_T = r \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$

- b) **Půlkružnice**, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$x_T = 0$
 $z_T = r \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \doteq 0,3634 \cdot r$



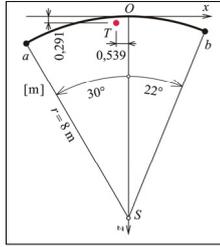
Symetrický kružnicový oblouk (a) a půlkružnice (b)

30/9/22 1631048 jednoduchých rovinných čar 8

8

Těžiště kružnicového oblouku, Příklad 1

Zadání: $r = 8 \text{ m}$
 $\varphi_a = -30^\circ = -\frac{30^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = -0,52360 \text{ rad}$
 $\varphi_b = +22^\circ = +0,38397 \text{ rad}$
 $x_T = ? \quad z_T = ?$



Zadání a výsledek příkladu 1

Řešení:
 $x_T = r \cdot \frac{\cos \varphi_a - \cos \varphi_b}{\varphi_b - \varphi_a} = -0,539 \text{ m}$
 $z_T = r \cdot \frac{\varphi_b - \varphi_a - (\sin \varphi_b - \sin \varphi_a)}{\varphi_b - \varphi_a} = +0,291 \text{ m}$

9

Těžiště parabolického oblouku

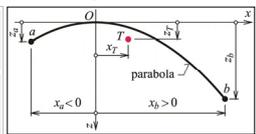
Zadání: x_a, x_b, z_a nebo z_b .
 Rovnice paraboly ve zvolené souřadnicové soustavě:
 $z = k \cdot x^2 \quad k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2}$
 Derivace rovnice paraboly:
 $z' = 2 \cdot k \cdot x$

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot x^2} \, dx \quad S_x = \int_{x_a}^{x_b} k \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot x^2} \, dx \quad S_z = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot x^2} \, dx$$

S využitím:

$$S_x = \int_s z \, ds = \int_{x_a}^{x_b} z \cdot \sqrt{1 + z'^2} \, dx$$

$$s = \int_s ds = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + z'^2} \, dx \quad S_z = \int_s x \, ds = \int_{x_a}^{x_b} x \cdot \sqrt{1 + z'^2} \, dx$$



Parabolický oblouk

10

Numerická integrace určitých integrálů

Výpočet určitých integrálů bývá pracný. Vhodným způsobem je numerická integrace s využitím **Simpsonova pravidla**.

Postup:

a) Rozdělení integračního oboru $x_b - x_a$ na sudý počet n dílů, body dělení $i = 0, 1, \dots, n$

Délka jednoho dílku: $\Delta = \frac{x_b - x_a}{n}$

b) Určení souřadnice $x_i = x_a + i \cdot \Delta$

c) Výpočet číselné hodnoty f_i integrované funkce $f(x)$

d) Přibližná číselná hodnota určitého integrálu je pak:

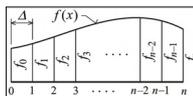
$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) \, dx \approx \left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + f_n \right] \cdot \frac{\Delta}{3}$$

Přesnost výpočtu závislá na n , pro praktické účely stačí již $n = 4$.

Simpsonovo pravidlo



Thomas Simpson (1710-1761)



11

Těžiště parabolického oblouku, Příklad 2

Zadáni: x_a, x_b, z_b , hodnota z_a dopočtena z rovnice paraboly, $n = 4$.

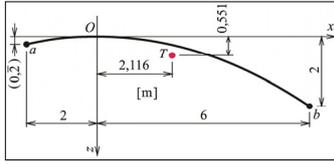
Výpočet těžiště:

Parametr paraboly: $k = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0,05 \text{ m}^{-1}$

Délka díference: $\Delta = \frac{6+2}{4} = 2 \text{ m}$

Hodnota určitého integrálu pro $n = 4$:

$$\int_{-2}^{+6} f(x) dx \approx \left[f_0 + 4(f_1 + f_3) + \frac{2}{3} [2(f_2) + f_4] \right] \cdot \frac{\Delta}{3}$$



Zadáni a výsledek příkladu 2

30/9/22

Těžiště jednoduchých rovinných čar

12

12

Těžiště parabolického oblouku, Příklad 2

Výpočet v tabulkovém procesoru Excel:

Délka parabolického oblouku a statické momenty:

$s = 8,4349 \text{ m}$

$S_x = 4,6517 \text{ m}^2$

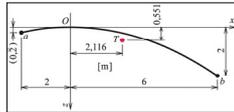
$S_z = 17,8460 \text{ m}^2$

Souřadnice těžiště:

$x_T = \frac{S_z}{s} = 2,116 \text{ m}$

$z_T = \frac{S_x}{s} = 0,551 \text{ m}$

i	x [m]	$\sqrt{1+(2kx)^2}$	$kx^2 \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$	$x \cdot \sqrt{1+(2kx)^2}$
0	-2	1,0244	0,2276	-2,0488
1	0	1,0000	0,0000	0,0000
2	2	1,0244	0,2276	2,0488
3	4	1,0943	0,9727	4,3773
4	6	1,2019	2,4037	7,2111
		8,4349	4,6517	17,8460



Zadáni a výsledek příkladu 2

30/9/22

Těžiště jednoduchých rovinných čar

13

13

Těžiště rovinné složené čáry

Rovinná složená čára vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných čar v téže rovině. Prvky s označením $i = 1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - **homogenní** složená čára.

Postup:

- Umístění složené rovinné čáry do pravouhlé souřadnicové soustavy xz
- Výpočet délky s_i a odpovídající tíhové síly $P_i = \gamma_i \cdot s_i$ pro každý prvek i
- Určení souřadnic x_i a z_i těžišť T_i pro každý prvek i
- Zavedení sil P_i do těžišť T_i a určení **výslednice** R a **statických momentů** S_x a S_z :

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

- Výpočet **souřadnic těžiště** rovinné složené čáry:

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

30/9/22

Těžiště složených rovinných čar

14

14

Těžiště rovinné složené čáry, Příklad 3

Zadání:

- a) Svislá úsečka s hraničními body a_1 a a_2 , $\gamma_1 = 1$
- b) Kružnicový oblouk s hraničními body a_2 a a_3 , $\varphi_{a_2} = -1,1760$ rad, $\varphi_{a_3} = 0$, $r = 3,25$ m, $\gamma_2 = 1,5$
- c) Šikmá úsečka s hraničními body a_3 a a_4 , $\gamma_3 = 1,2$

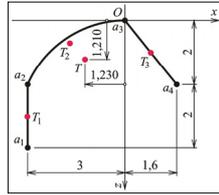
Řešení:

- a) délky, tíhové síly a souřadnice těžišť prvků i ($x_2 = -1,7007$ m, $z_2 = 0,6990$ m)

- b) Souřadnice těžiště:

$$R = 10,807 \text{ m} \quad S_x = 13,081 \text{ m}^2 \quad S_z = -13,291 \text{ m}^2$$

$$x_T = -1,230 \text{ m} \quad z_T = 1,210 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 3

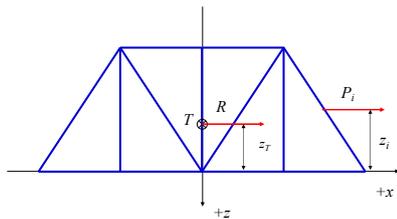
30/9/22

Těžiště složených rovinných čar

15

15

Těžiště rovinných příhradových vazníků



30/9/22

Těžiště složených rovinných čar

16

16

Dřevěné příhradové vazníky



30/9/22

Těžiště složených rovinných čar

17

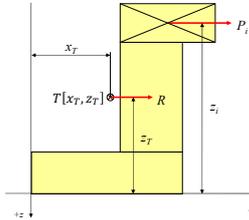
17

Těžiště rovinných obrazců

Jednoduchý rovinný obrazec – obrys umožňuje určit polohu těžiště bez výpočtu na základě symetrie nebo výpočtem podle jednoduchého matematického předpisu, tíhově homogenní.

Složený rovinný obrazec – několik spojených jednoduchých obrazců.

Příklad složeného rovinného obrazce profilu dřevěného nosníku, který se skládá ze tří jednoduchých obrazců (obdélníků).



30/9/22

Těžiště rovinných obrazců

18

18

Těžiště obecného rovinného obrazce

Plocha elementárního obdélníka: $dA = dx \cdot dz$

Celková plocha obrazce: $A = \iint_A dA = \iint_A dx dz$

Směr rovnoběžných elementárních sil $dP = \gamma \cdot dA = dA$ ($\gamma = 1$) lze volit:

a) v rovině vyšetřovaného obrazce xz , povaha **rovinné soustavy sil**, směr **svislý** (z), pak **vodorovný** (x)

Statické momenty rovinného obrazce k momentovému středu O (rozměr m^3):

$$S_z = \iint_A x dA = \iint_A x dx dz \quad S_x = \iint_A z dA = \iint_A z dx dz$$

Souřadnice těžiště

$$x_T = \frac{S_x}{s} \quad z_T = \frac{S_z}{s}$$

Těžiště rovinného obrazce jako statický střed **rovinné soustavy rovnoběžných sil**

30/9/22

Těžiště obecného rovinného obrazce

19

19

Těžiště obecného rovinného obrazce

Směr rovnoběžných elementárních sil $dP = \gamma \cdot dA = dA$ ($\gamma = 1$) lze volit:

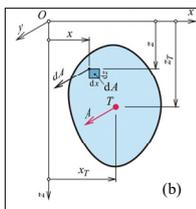
b) **kolmo** k rovině vyšetřovaného obrazce xz , tedy ve směru y , povaha **prostorové soustavy sil**, výpočet statických momentů obrazce ke dvěma souřadnicovým osám (z a x)

Obě pojetí vedou ke shodným výsledkům.

Poučka:

Je-li rovinný obrazec symetrický podle nějaké osy symetrie, leží těžiště obrazce nutně na této ose symetrie.

Má-li vyšetřovaný obrazec dvě nebo více os symetrie – **těžiště leží v průsečíku os symetrie** a není třeba zjišťovat výpočtem.



Těžiště rovinného obrazce jako statický střed **prostorové soustavy rovnoběžných sil**

30/9/22

Těžiště obecného rovinného obrazce

20

20

Těžiště jednoduchých rovinných obrazců

a) čtverec b) kosočtverec c) obdélník d) kosodélník e) rovnostranný trojúhelník
 f) pravidelný šestiúhelník g) kruh h) mezikružjí i) elipsa

Těžiště některých jednoduchých rovinných obrazců

30/9/22 Těžiště základních rovinných obrazců 21

21

Těžiště pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Plocha trojúhelníku: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Statický moment: $S_x = \iint_A z \, dx \, dz = \int_0^h z \left[\int_0^{zb/h} dx \right] dz = \int_0^h z \left[\frac{z \cdot b}{h} \right] dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^2 \, dz = \frac{b \cdot h^2}{3}$

Těžiště trojúhelníku

30/9/22 Těžiště základních rovinných obrazců 22

22

Těžiště pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Svislá souřadnice těžiště: $z_T = \frac{b \cdot h^2}{3} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = \frac{2}{3} h$

Výpočet ze souřadnic vrcholů:

$x_T = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$

$z_T = \frac{1}{3} \cdot (z_1 + z_2 + z_3)$

Těžiště trojúhelníku

30/9/22 Těžiště základních rovinných obrazců 23

23

Plocha kruhové úseče

Symetrie podle osy z, polární soustava – středový úhel 2α , poloměr kružnice r

Platí (převod z pravohúhlé soustavy do polární): $x = r \cdot \sin \varphi$ $z = r \cdot (1 - \cos \varphi)$
 $dx = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$ $dz = r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$

Plocha úseče: $A = \iint_A dx dz = 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \sin \varphi d\varphi = 2 \cdot r^2 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cdot r d\varphi = r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$

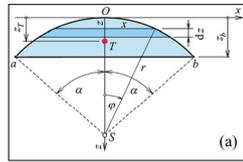
Statický moment:

$$S_x = \iint_A z dx dz = 2 \cdot \int_0^\alpha x \cdot z dz =$$

$$= 2 \cdot \int_0^\alpha r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot r \cdot \sin \varphi d\varphi =$$

$$= 2 \cdot r^3 \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \cdot \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= 2 \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right)$$



Těžiště kruhové úseče

30/9/22 Těžiště základních rovinných obrazců 24

24

Těžiště kruhové úseče, půlkruhu a čtvrtkruhu

Souřadnice kruhové úseče:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = \frac{2 \cdot r^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin^3 \alpha}{3} \right)}{r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)} =$$

Půlkruh: $\alpha = \frac{\pi}{2}$

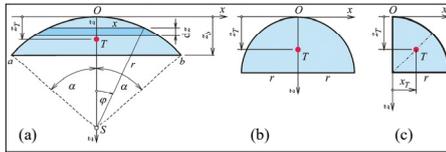
$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right) \approx 0,5756 \cdot r$$

$$= r \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right)$$

Čtvrtkruh:

$$x_T = r - z_T =$$

$$= \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \approx 0,4244 \cdot r$$



Těžiště kruhové úseče (a), půlkruhu (b) a čtvrtkruhu (c)

30/9/22 Těžiště základních rovinných obrazců 25

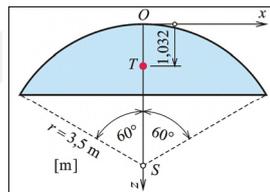
25

Těžiště kruhové úseče, Příklad 4

Zadání: $r = 3,5 \text{ m}$ $2\alpha = 120^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} = 1,0472 \text{ rad}$
 $z_T = ?$

Výsledek:

$$z_T = \frac{S_x}{A} = r \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = 1,032 \text{ m}$$



Zadání a výsledek příkladu 4

30/9/22 Těžiště základních rovinných obrazců 26

26

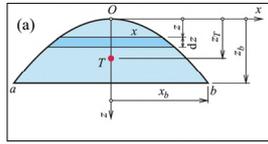
Těžiště parabolické úseče

Plocha parabolické úseče: $A = \iint_A dx dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} x dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} x \cdot 2 \cdot k \cdot x dx = 4 \cdot k \cdot \int_0^{x_b} x^2 dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{z_b}{x_b^2} \cdot x_b^3 = \frac{4}{3} \cdot x_b \cdot z_b$

Statický moment parabolické úseče: $S_x = \iint_A z dx dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} z \cdot x dz = 2 \cdot \int_0^{x_b} k \cdot x^3 \cdot 2 \cdot k \cdot x dx = 4 \cdot k^2 \cdot \int_0^{x_b} x^4 dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{z_b^2}{x_b^5} \cdot x_b^5 = \frac{4}{5} \cdot x_b \cdot z_b^2$

Souřadnice těžiště:

$$z_T = \frac{4}{5} \cdot x_b \cdot z_b^2 \cdot \frac{3}{4 \cdot x_b \cdot z_b} = \frac{3}{5} \cdot z_b$$



Těžiště parabolické úseče

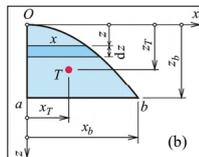
27

Těžiště poloviny parabolické úseče

Plocha poloviny parabolické úseče: $A = \frac{2}{3} \cdot x_b \cdot z_b$

Statický moment poloviny parabolické úseče: $S_x = \iint_A x dx dz = \int_0^{x_b} \left[\int_0^z x dx \right] dz = \int_0^{x_b} \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cdot k \cdot x dx = k \cdot \int_0^{x_b} x^3 dx = \frac{k}{4} \cdot \frac{x_b^4}{x_b^2} = \frac{1}{4} \cdot x_b^2 \cdot z_b$

Souřadnice těžiště: $x_T = \frac{1}{4} \cdot x_b^2 \cdot z_b \cdot \frac{3}{2 \cdot x_b \cdot z_b} = \frac{3}{8} \cdot x_b$

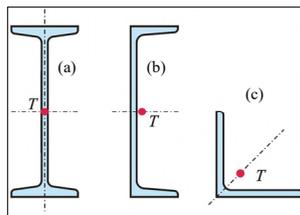


Těžiště poloviny parabolické úseče

28

Těžiště ocelových válcovaných tyčí

Válcované průřezy (profil): různé tvary, I-profil, U-profil, rovnoramenný úhelník



Příklady válcovaných profilů

29

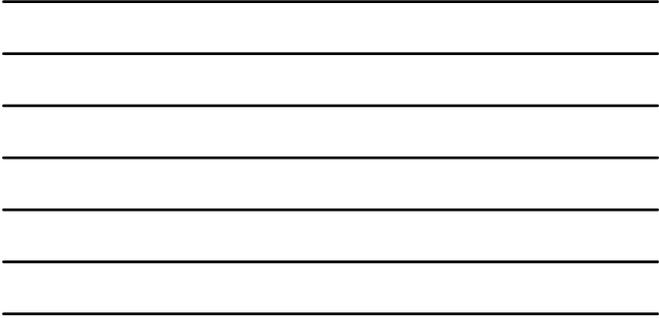
Ocelové válcované profily



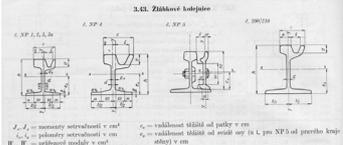
30/9/22 30

Těžiště rovinných průřezů

30



Tabulky ocelových válcovaných profilů



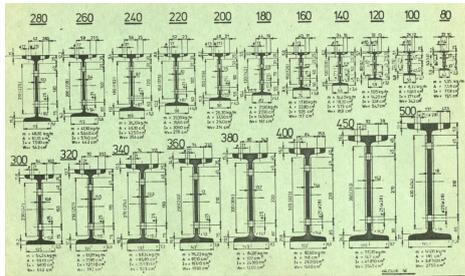
3.13. Získávané hodnoty

J_x, J_y = momenty setrvačnosti v cm⁴
 i_x, i_y = poloměry setrvačnosti v cm
 W_x, W_y = průběžné moduly v cm³

r_x, r_y = vzdálenost těžiště od patky v cm
 e_x, e_y = vzdálenost těžiště od vnější okraje (u L, pro XP3 od vnější křepě) vždy v cm

Označení profilu	Rozměry				Rozsah profilu	Průměr	Tloušťka stěny	r _x	r _y	J _x	J _y	W _x	W _y	i _x	i _y		
	A	B	C	D													
XP 1	100	100	50	41	12	20	37	30,16	46,65	4,13	4,13	2002	215,4	5,09	489	40,2	2,97
XP 2	100	100	50	41	12	20	37	42,21	52,70	4,17	4,17	2002	230,3	5,17	499	41,2	3,03
XP 3	100	100	50	41	12	20	37	54,26	59,19	4,21	4,21	2002	245,2	5,26	509	42,2	3,09
XP 4	100	100	50	41	12	20	37	66,31	66,09	4,25	4,25	2002	260,1	5,35	519	43,2	3,15
XP 5	100	100	50	41	12	20	37	78,36	72,96	4,29	4,29	2002	275,0	5,44	529	44,2	3,21
XP 6	100	100	50	41	12	20	37	90,41	82,96	4,33	4,33	2002	290,0	5,53	539	45,2	3,27
XP 7	100	100	50	41	12	20	37	102,46	92,96	4,37	4,37	2002	305,0	5,62	549	46,2	3,33
XP 8	100	100	50	41	12	20	37	114,51	102,96	4,41	4,41	2002	320,0	5,71	559	47,2	3,39
XP 9	100	100	50	41	12	20	37	126,56	112,96	4,45	4,45	2002	335,0	5,80	569	48,2	3,45
XP 10	100	100	50	41	12	20	37	138,61	122,96	4,49	4,49	2002	350,0	5,89	579	49,2	3,51
XP 11	100	100	50	41	12	20	37	150,66	132,96	4,53	4,53	2002	365,0	5,98	589	50,2	3,57
XP 12	100	100	50	41	12	20	37	162,71	142,96	4,57	4,57	2002	380,0	6,07	599	51,2	3,63
XP 13	100	100	50	41	12	20	37	174,76	152,96	4,61	4,61	2002	395,0	6,16	609	52,2	3,69
XP 14	100	100	50	41	12	20	37	186,81	162,96	4,65	4,65	2002	410,0	6,25	619	53,2	3,75
XP 15	100	100	50	41	12	20	37	198,86	172,96	4,69	4,69	2002	425,0	6,34	629	54,2	3,81
XP 16	100	100	50	41	12	20	37	210,91	182,96	4,73	4,73	2002	440,0	6,43	639	55,2	3,87
XP 17	100	100	50	41	12	20	37	222,96	192,96	4,77	4,77	2002	455,0	6,52	649	56,2	3,93
XP 18	100	100	50	41	12	20	37	235,01	202,96	4,81	4,81	2002	470,0	6,61	659	57,2	3,99
XP 19	100	100	50	41	12	20	37	247,06	212,96	4,85	4,85	2002	485,0	6,70	669	58,2	4,05
XP 20	100	100	50	41	12	20	37	259,11	222,96	4,89	4,89	2002	500,0	6,79	679	59,2	4,11
XP 21	100	100	50	41	12	20	37	271,16	232,96	4,93	4,93	2002	515,0	6,88	689	60,2	4,17
XP 22	100	100	50	41	12	20	37	283,21	242,96	4,97	4,97	2002	530,0	6,97	699	61,2	4,23
XP 23	100	100	50	41	12	20	37	295,26	252,96	5,01	5,01	2002	545,0	7,06	709	62,2	4,29
XP 24	100	100	50	41	12	20	37	307,31	262,96	5,05	5,05	2002	560,0	7,15	719	63,2	4,35
XP 25	100	100	50	41	12	20	37	319,36	272,96	5,09	5,09	2002	575,0	7,24	729	64,2	4,41
XP 26	100	100	50	41	12	20	37	331,41	282,96	5,13	5,13	2002	590,0	7,33	739	65,2	4,47
XP 27	100	100	50	41	12	20	37	343,46	292,96	5,17	5,17	2002	605,0	7,42	749	66,2	4,53
XP 28	100	100	50	41	12	20	37	355,51	302,96	5,21	5,21	2002	620,0	7,51	759	67,2	4,59
XP 29	100	100	50	41	12	20	37	367,56	312,96	5,25	5,25	2002	635,0	7,60	769	68,2	4,65
XP 30	100	100	50	41	12	20	37	379,61	322,96	5,29	5,29	2002	650,0	7,69	779	69,2	4,71
XP 31	100	100	50	41	12	20	37	391,66	332,96	5,33	5,33	2002	665,0	7,78	789	70,2	4,77
XP 32	100	100	50	41	12	20	37	403,71	342,96	5,37	5,37	2002	680,0	7,87	799	71,2	4,83
XP 33	100	100	50	41	12	20	37	415,76	352,96	5,41	5,41	2002	695,0	7,96	809	72,2	4,89
XP 34	100	100	50	41	12	20	37	427,81	362,96	5,45	5,45	2002	710,0	8,05	819	73,2	4,95
XP 35	100	100	50	41	12	20	37	439,86	372,96	5,49	5,49	2002	725,0	8,14	829	74,2	5,01
XP 36	100	100	50	41	12	20	37	451,91	382,96	5,53	5,53	2002	740,0	8,23	839	75,2	5,07
XP 37	100	100	50	41	12	20	37	463,96	392,96	5,57	5,57	2002	755,0	8,32	849	76,2	5,13
XP 38	100	100	50	41	12	20	37	476,01	402,96	5,61	5,61	2002	770,0	8,41	859	77,2	5,19
XP 39	100	100	50	41	12	20	37	488,06	412,96	5,65	5,65	2002	785,0	8,50	869	78,2	5,25
XP 40	100	100	50	41	12	20	37	500,11	422,96	5,69	5,69	2002	800,0	8,59	879	79,2	5,31
XP 41	100	100	50	41	12	20	37	512,16	432,96	5,73	5,73	2002	815,0	8,68	889	80,2	5,37
XP 42	100	100	50	41	12	20	37	524,21	442,96	5,77	5,77	2002	830,0	8,77	899	81,2	5,43
XP 43	100	100	50	41	12	20	37	536,26	452,96	5,81	5,81	2002	845,0	8,86	909	82,2	5,49
XP 44	100	100	50	41	12	20	37	548,31	462,96	5,85	5,85	2002	860,0	8,95	919	83,2	5,55
XP 45	100	100	50	41	12	20	37	560,36	472,96	5,89	5,89	2002	875,0	9,04	929	84,2	5,61
XP 46	100	100	50	41	12	20	37	572,41	482,96	5,93	5,93	2002	890,0	9,13	939	85,2	5,67
XP 47	100	100	50	41	12	20	37	584,46	492,96	5,97	5,97	2002	905,0	9,22	949	86,2	5,73
XP 48	100	100	50	41	12	20	37	596,51	502,96	6,01	6,01	2002	920,0	9,31	959	87,2	5,79
XP 49	100	100	50	41	12	20	37	608,56	512,96	6,05	6,05	2002	935,0	9,40	969	88,2	5,85
XP 50	100	100	50	41	12	20	37	620,61	522,96	6,09	6,09	2002	950,0	9,49	979	89,2	5,91
XP 51	100	100	50	41	12	20	37	632,66	532,96	6,13	6,13	2002	965,0	9,58	989	90,2	5,97
XP 52	100	100	50	41	12	20	37	644,71	542,96	6,17	6,17	2002	980,0	9,67	999	91,2	6,03
XP 53	100	100	50	41	12	20	37	656,76	552,96	6,21	6,21	2002	995,0	9,76	1009	92,2	6,09
XP 54	100	100	50	41	12	20	37	668,81	562,96	6,25	6,25	2002	1010,0	9,85	1019	93,2	6,15
XP 55	100	100	50	41	12	20	37	680,86	572,96	6,29	6,29	2002	1025,0	9,94	1029	94,2	6,21
XP 56	100	100	50	41	12	20	37	692,91	582,96	6,33	6,33	2002	1040,0	10,03	1039	95,2	6,27
XP 57	100	100	50	41	12	20	37	704,96	592,96	6,37	6,37	2002	1055,0	10,12	1049	96,2	6,33
XP 58	100	100	50	41	12	20	37	717,01	602,96	6,41	6,41	2002	1070,0	10,21	1059	97,2	6,39
XP 59	100	100	50	41	12	20	37	729,06	612,96	6,45	6,45	2002	1085,0	10,30	1069	98,2	6,45
XP 60	100	100	50	41	12	20	37	741,11	622,96	6,49	6,49	2002	1100,0	10,39	1079	99,2	6,51
XP 61	100	100	50	41	12	20	37	753,16	632,96	6,53	6,53	2002	1115,0	10,48	1089	100,2	6,57
XP 62	100	100	50	41	12	20	37	765,21	642,96	6,57	6,57	2002	1130,0	10,57	1099	101,2	6,63
XP 63	100	100	50	41	12	20	37	777,26	652,96	6,61	6,61	2002	1145,0	10,66	1109	102,2	6,69
XP 64	100	100	50	41	12	20	37	789,31	662,96	6,65	6,65	2002	1160,0	10,75	1119	103,2	6,75
XP 65	100	100	50	41	12	20	37	801,36	672,96	6,69	6,69	2002	1175,0	10,84	1129		

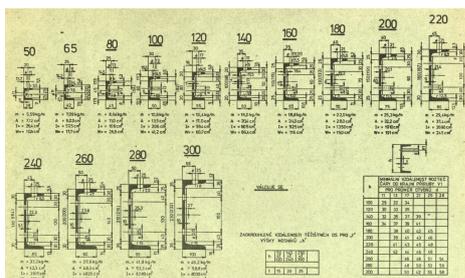
Ocelové válcované tyče profilu I



30/9/22 168186 rovninných průřezů 33

33

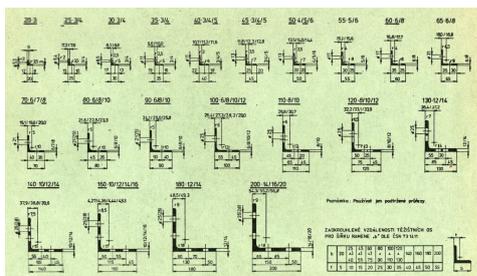
Ocelové válcované tyče profilu U



30/9/22 168186 rovninných průřezů 34

34

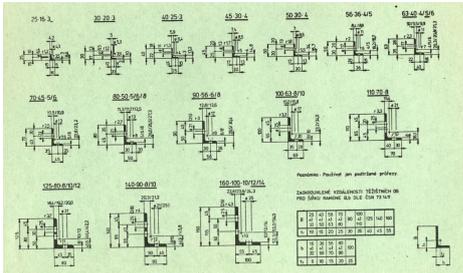
Ocelové válcované rovnoramenné úhelníky



30/9/22 168186 rovninných průřezů 35

35

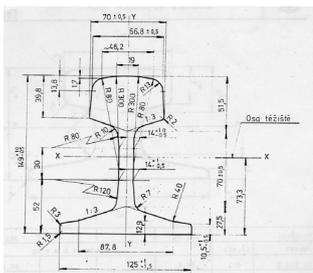
Ocelové válcované nerovnoramenné úhelníky



30/9/22 Těžiště rovinných průřezů 36

36

Geometrie ocelové železniční kolejnice



30/9/22 Těžiště rovinných průřezů 37

37

Těžiště složených rovinných obrazců

Složený rovinný obrazec vzniká spojením několika (obecně n) jednoduchých rovinných obrazců v téže rovině. Prvky s označením $i = 1, \dots, n$ mohou mít různou měrnou tíhu γ_i , pokud je stejná - **homogenní** složený rovinný obrazec.

Postup:

- a) Umístění složeného rovinného obrazce do pravouhlé souřadnicové soustavy xz
- b) Výpočet ploch A_i a odpovídajících tíhových sil $P_i = \gamma_i \cdot A_i$ pro každý prvek i
- c) Stanovení souřadnic x_i a z_i těžišť T_i pro každý prvek i (možno použít lokální souřadnicovou soustavu)
- d) Zavedení sil P_i do těžišť T_i a určení **výslednice a statických momentů** (pro homogenní obrazce platí $R = A$):

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad S_x = \sum_{i=1}^n P_i \cdot z_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i$$

- e) Výpočet **souřadnic těžiště** složeného rovinného obrazce:

$$x_T = \frac{S_z}{R} \quad z_T = \frac{S_x}{R}$$

30/9/22 Těžiště složených rovinných obrazců 38

38

Těžiště kosodélníku, lichoběžníku a obecného čtyřúhelníku

a) **Kosodélník** – úhlopříčka je totožná s osou z

b) **Lichoběžník:** $A_1 = \frac{b \cdot h_1}{2}$ $x_1 = \frac{b}{3}$ $z_1 = \frac{h_1}{3}$ $A_2 = \frac{b \cdot h_2}{2}$ $x_2 = \frac{2 \cdot b}{3}$ $z_2 = \frac{(h_1 + h_2)}{3}$

$R = A = \frac{b \cdot (h_1 + h_2)}{2}$

$S_x = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{(h_1 + h_2)}{3} = \frac{b}{6} (h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2)$

$S_z = \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{b}{3} + \frac{b \cdot h_2}{2} \cdot \frac{2 \cdot b}{3} = \frac{b^2}{6} (h_1 + 2 \cdot h_2)$

$x_T = \frac{b}{3} \cdot \frac{h_1 + 2 \cdot h_2}{h_1 + h_2}$

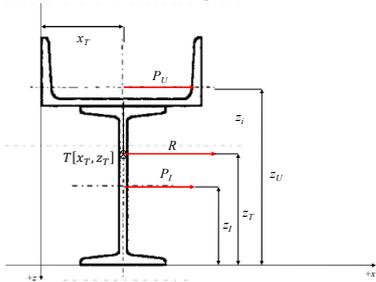
$z_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^2 + h_1 \cdot h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2}$

c) **Obecný čtyřúhelník** – obrazec složený ze dvou trojúhelníků

Těžiště kosodélníku (a), lichoběžníku (b) a obecného čtyřúhelníku (c)

39

Těžiště složeného rovinného průřezu z válcovaných tyčí

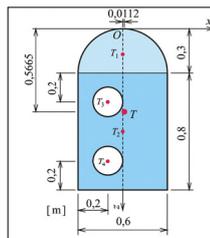


40

Těžiště složených obrazců s otvory a výřezy

Zvláštní případ složených obrazců – s **otvory** (s oslabením) nebo s **výřezy** (otvory sousedící s obrysem obrazce).

Výpočet:
Jednotlivé obrazce považovat za samostatné prvky bez otvorů, otvory považovat za další prvky se **zápornou plochou** a měrnou tíhou stejnou jako obrazec obklopující.



41

Těžiště složených rovinných obrazců s otvorem, Příklad 5

Zadání:

Tíhově homogenní složený rovinný obrazec oslabený otvory, složený z půlkruhu $r = 0,3$ m, obdélníku a dvou kruhových otvorů o $r = 0,1$ m.

Výpočet těžiště:

a) Určení **ploch** a **souřadnic těžišť** pro jednotlivé obrazce i

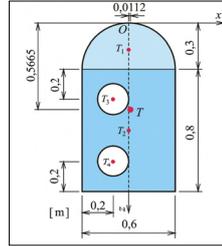
b) Výpočet **výslednice** a **statických momentů** složeného průřezu

$$R = 0,5585 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,3164 \text{ m}^3 \quad S_z = +0,00628 \text{ m}^3$$

c) **Souřadnice těžiště** složeného obrazce

$$x_T = 0,0112 \text{ m} \quad z_T = 0,5665 \text{ m}$$



Zadání a výsledky příkladu 5

30/9/22

Těžiště složených rovinných obrazců

42

42

Těžiště složených rovinných obrazců s otvorem, Příklad 6

Zadání:

Tíhově homogenní rovinný obrazec tvaru L (lze řešit jako dva obdélníky nebo jako obdélník, který je opsán průřezu, a jeho obdélníkový výřez)

Výpočet těžiště:

a) Určení **ploch** a **souřadnic těžišť** pro jednotlivé obrazce i

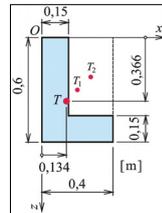
b) Výpočet **výslednice** a **statických momentů** složeného průřezu

$$R = 0,1275 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,04669 \text{ m}^3 \quad S_z = 0,01706 \text{ m}^3$$

c) **Souřadnice těžiště** složeného obrazce

$$x_T = 0,134 \text{ m} \quad z_T = 0,366 \text{ m}$$



Zadání a výsledky příkladu 6

30/9/22

Těžiště složených rovinných obrazců

43

43

Těžiště složených rovinných obrazců, Příklad 7

Zadání:

Tíhově nehomogenní rovinný obrazec složený ze tří obdélníků, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = 3$.

Výpočet těžiště:

a) Určení **ploch**, **souřadnic těžišť** a **tíhových sil** pro jednotlivé obrazce i

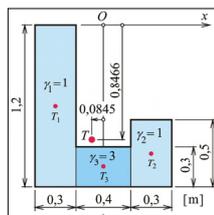
b) Výpočet **výslednice** a **statických momentů** složeného průřezu

$$R = 0,87 \text{ m}^2$$

$$S_x = 0,7365 \text{ m}^3 \quad S_z = -0,0735 \text{ m}^3$$

c) **Souřadnice těžiště** složeného obrazce

$$x_T = -0,0845 \text{ m} \quad z_T = 0,8466 \text{ m}$$



Zadání a výsledky příkladu 7

30/9/22

Těžiště složených rovinných obrazců

44

44

Průřezy prutových konstrukčních prvků

Výpočet deformovatelných prutů vyžaduje tzv. **geometrické charakteristiky průřezu**:

- Průřezová plocha A
- Statické momenty S_x a S_z průřezu k momentovým osám x a z
- Souřadnice x_T, z_T těžiště T
- Momenty setrvačnosti I_x, I_z k osám x, z
- Deviační moment D_{xz} k osám x, z



Předpoklad:
 průřez **tíhově homogenní**, fiktivní měrná tíha $\gamma = 1$ (bez fyzikálního rozměru)

30/9/22

Pojem kvadratických momentů rovinných obrazců

45

45

Kvadratické momenty rovinných obrazců

Plocha elementárního obdélníkového dílku: $dA = dx \cdot dz$

V počátečním bodě dílku působí elementární fiktivní síla **kolmá** k rovině průřezu:

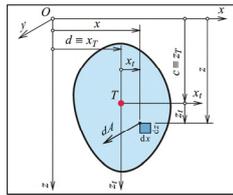
$$dP = \gamma \cdot dA = dA \quad \gamma = 1 \rightarrow A = \gamma \cdot A$$

Moment setrvačnosti (vždy kladný) a **deviační moment** (kladný nebo záporný) k osám x, z – **osy setrvačnosti**:

$$I_x = \iint_A z^2 dA \quad I_z = \iint_A x^2 dA \quad D_{xz} = \iint_A x \cdot z dA$$

Poznámka: elementy plochy násobeny **kvadráty** souřadnic x^2 a z^2 nebo **součinem** souřadnic xz , proto **kvadratické momenty průřezu**, statické momenty – **lineární**

Rozměr [délka⁴], obvykle m⁴ nebo mm⁴



K výkladu kvadratických momentů

30/9/22

Pojem kvadratických momentů rovinných obrazců

46

46

Kvadratické momenty rovinných obrazců

Centrální kvadratické momenty průřezu jsou kvadratické momenty k osám x_T, z_T , které procházejí těžištěm T – **centrální osy setrvačnosti**, hlavní osy setrvačnosti (mohou být pootočené).

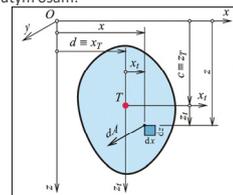
Pravidlo o kvadratických momentech k rovnoběžně posunutým osám:

$$c = z - z_T = z_T \quad d = x - x_T = x_T$$

$$I_x = \iint_A (z_T + c)^2 dA = \iint_A z_T^2 dA + 2 \cdot c \cdot \iint_A z_T dA + c^2 \cdot \iint_A dA = I_{xT} + 2 \cdot c \cdot S_{zT} + c^2 \cdot A$$

$$I_z = \iint_A (x_T + d)^2 dA = \iint_A x_T^2 dA + 2 \cdot d \cdot \iint_A x_T dA + d^2 \cdot \iint_A dA = I_{zT} + 2 \cdot d \cdot S_{xT} + d^2 \cdot A$$

$$D_{xz} = \iint_A (z_T + c) \cdot (x_T + d) dA = \iint_A z_T \cdot x_T dA + c \cdot \iint_A x_T dA + d \cdot \iint_A z_T dA + c \cdot d \cdot \iint_A dA = D_{xTzT} + c \cdot S_{xT} + d \cdot S_{zT} + c \cdot d \cdot A$$



K výkladu kvadratických momentů

30/9/22

Pojem kvadratických momentů rovinných obrazců

47

47

Kvadratické momenty rovinných obrazců

Statické momenty průřezu k těžištním osám průřezu:

$$S_{x_i} = S_{z_i} = 0$$

Výsledné tvary vztahů pro kvadratické momenty k osám x, z , které neprocházejí těžištěm průřezu:

$$I_x = I_{x_t} + c^2 \cdot A$$

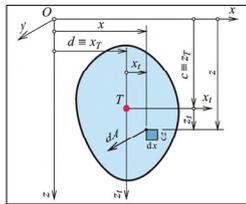
Steinerova věta

$$I_z = I_{z_t} + d^2 \cdot A$$

$$D_{xz} = D_{x_t z_t} + c \cdot d \cdot A$$



Jakob Steiner (1796-1863)



K výkladu kvadratických momentů

Po úpravě lze rovněž použít:

$$I_{x_t} = I_x - c^2 \cdot A$$

$$I_{z_t} = I_z - d^2 \cdot A$$

$$D_{x_t z_t} = D_{xz} - c \cdot d \cdot A$$

30/9/22

Pojem kvadratických momentů rovinných obrazců

48

48

Centrální kvadratické momenty obdélníku

Zvoleno: $O \equiv T \rightarrow x \equiv x_t, z \equiv z_t \rightarrow D_{xz} = 0$

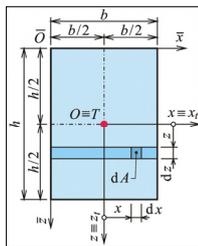
Výpočet hlavních centrálních momentů setrvačnosti:

$$I_x = \iint_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dx dz = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = b \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} \cdot \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

Obdobně: $I_z = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h$

Důkaz nulového deviačního momentu:

$$D_{xz} = \iint_A x \cdot z dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} x dz dx = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-b/2}^{b/2} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) dz = 0$$



Obdélník

30/9/22

Kvadratické momenty základních rovinných obrazců

49

49

Kvadratické momenty obdélníku ve složeném obrazi

Zvoleno: $O \neq T \rightarrow [x_T, z_T] \equiv \left[c = \frac{h}{2}, d = \frac{b}{2} \right]$

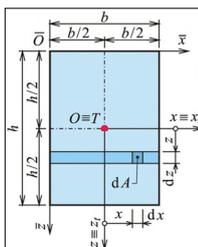
Výpočet momentů setrvačnosti:

Steinerova věta

$$I_x = I_{x_t} + c^2 \cdot A = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + \frac{h^2}{4} \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot b \cdot h^3$$

$$I_z = I_{z_t} + d^2 \cdot A = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h + \frac{b^2}{4} \cdot b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot h$$

$$D_{x_z} = D_{x_t z_t} + c \cdot d \cdot A = 0 + \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{4} \cdot b^2 \cdot h^2$$



Obdélník

30/9/22

Kvadratické momenty základních rovinných obrazců

50

50

Kvadratické momenty čtverce

Čtverec o straně a : $b = h = a$

Výpočet **hlavních centrálních momentů setrvačnosti**:

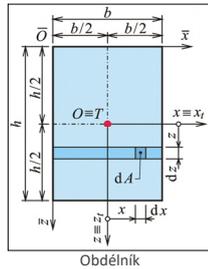
$$I_x = I_y = \frac{1}{12} \cdot a^4$$

Kvadratické momenty čtverce k osám \bar{x}, \bar{z} , které procházejí jeho stranami:

$$\bar{I}_x = I_x + c^2 \cdot A = \frac{1}{12} \cdot a^4 + \frac{a^2}{4} \cdot a^2 = \frac{1}{3} \cdot a^4$$

$$\bar{I}_z = I_x = \frac{1}{3} \cdot a^4$$

$$D_{\bar{x}\bar{z}} = D_{x_1z_1} + c \cdot d \cdot A = 0 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{4} \cdot a^4$$



Obdélník

30/9/22

Kvadratické momenty základních rovinných obrazců

51

Centrální kvadratické momenty pravoúhlého trojúhelníku

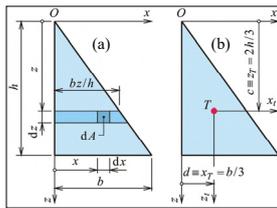
Zvoleno: O ve vrcholu trojúhelníku

Nejprve výpočet kvadratických momentů k vodorovné ose x a svislé ose z :

$$I_x = \iint_A z^2 dx dz = \int_0^h z^2 \left[\int_0^{bz/h} dx \right] dz = \frac{b}{h} \int_0^h z^3 dz = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3$$

$$I_z = \iint_A x^2 dx dz = \int_0^h \left[\int_0^{bz/h} x^2 dx \right] dz = \frac{b^3}{3 \cdot h^3} \int_0^h z^3 dz = \frac{b^3}{3 \cdot h^3} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h$$

$$D_{xz} = \iint_A x \cdot z dx dz = \int_0^h z \left[\int_0^{bz/h} x dx \right] dz = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{1}{8} \cdot b^2 \cdot h^2$$



Pravoúhlý trojúhelník

30/9/22

Kvadratické momenty základních rovinných obrazců

52

Centrální kvadratické momenty pravoúhlého trojúhelníku

Výpočet **centrálních momentů setrvačnosti** (nejsou ale hlavní momenty):

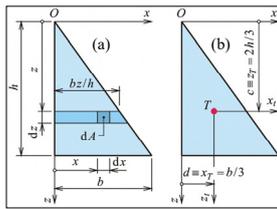
Steinerova věta

$$c = \frac{2}{3} \cdot h \quad d = \frac{1}{3} \cdot b$$

$$I_{x_c} = I_x - c^2 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3 - \frac{4}{9} \cdot h^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3$$

$$I_{z_c} = I_z - d^2 \cdot A = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h - \frac{1}{9} \cdot b^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{36} \cdot b^3 \cdot h$$

$$D_{x_c z_c} = D_{xz} - c \cdot d \cdot A = \frac{1}{8} \cdot b^2 \cdot h^2 - \frac{2}{3} \cdot h \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{72} \cdot b^2 \cdot h^2$$



Pravoúhlý trojúhelník

30/9/22

Kvadratické momenty základních rovinných obrazců

53

Centrální kvadratické momenty rovnoramenného trojúhelníku

Rovnoramenný trojúhelník – lze rozdělit na dva symetrické pravoúhlé trojúhelníky

$$I_x = 2 \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot \frac{b}{2} \cdot h^3 \right) = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 \quad I_x = 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 \cdot h \right] = \frac{1}{48} \cdot b^3 \cdot h$$

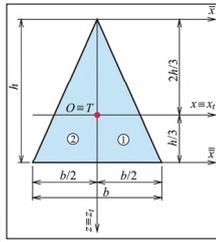
Svislá osa symetrie – jsou zároveň hlavní momenty setrvačnosti a nulový deviční moment

Kvadratické momenty ve složeném obrazci – k vodorovným osám \bar{x}, \bar{x}' :

$$I_{\bar{x}} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{2} \cdot h^3 = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3 \quad I_{\bar{x}} = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{b}{2} \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

Rovnostranný trojúhelník o straně b :

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad I_x = I_z = \frac{\sqrt{3}}{96} \cdot b^4 \approx 0,01804 \cdot b^4$$



Rovnoramenný trojúhelník

54

Centrální kvadratické momenty čtvrtkruhu

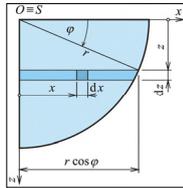
Zvoleno: $O \equiv S$ Platí: $z = r \cdot \sin \varphi \quad dz = r \cdot \cos \varphi \, d\varphi$

Moment setrvačnosti k vodorovné ose x:

$$I_x = \int_A z^2 \, dx \, dz = \int_0^r z^2 \left[\int_0^{\pi/2} dx \right] dz = \int_0^r r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi \, d\varphi = r^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, d\varphi = r^4 \cdot \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot r^4$$

Osa symetrie skloněná o 45° - $I_x = I_z$

$$D_{xz} = \int_A x \cdot z \, dx \, dz = \int_0^r z \left[\int_0^{\pi/2} x \, dx \right] dz = \int_0^{\pi/2} r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \frac{r^4}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi \, d\varphi = -\frac{r^4}{8} \cdot [\cos^4 \varphi]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \cdot r^4$$



Čtvrtkruh

55

Centrální kvadratické momenty čtvrtkruhu

Kvadratické momenty k netěžištním osám tedy: $I_x = I_z = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot r^4 \quad D_{xz} = \frac{1}{8} \cdot r^4$

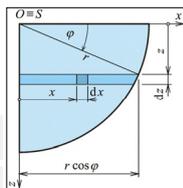
Souřadnice těžiště: $c = d = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \approx 0,4244 \cdot r$

Plocha: $A = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

Centrální kvadratické momenty k těžištním osám, které jsou rovnoběžné s osami x, z:

$$I_{x_1} = I_{z_1} = I_x - c^2 \cdot A = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot r^4 - \frac{16 \cdot r^2}{9 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) \approx 0,05488 \cdot r^4$$

$$D_{x_1 z_1} = D_{xz} - c \cdot d \cdot A = \frac{1}{8} \cdot r^4 - \frac{16 \cdot r^2}{9 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{4} = r^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right) \approx -0,01647 \cdot r^4$$



Čtvrtkruh

56

Centrální kvadratické momenty půlkruhu

Složený obrazec ze dvou čtvrtkruhů, které mají k obou osám stejné momenty setrvačnosti, ale deviační momenty s opačným znaménkem:

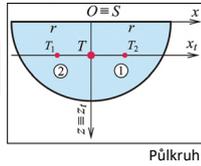
$$I_x = I_z = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot r^4 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4 \quad D_{xz} = 0$$

Osa z – osa symetrie, hlavní centrální osa setrvačnosti: $z \equiv z_t$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti tedy:

$$I_{x_t} = 2 \cdot r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \doteq 0,10976 \cdot r^4$$

$$I_{z_t} = I_z = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4$$



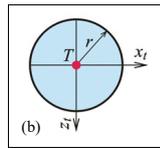
Půlkruh

30/9/22
57

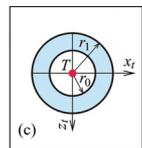
Centrální kvadratické momenty kruhu a mezikruží

Kruh:
Složený obrazec ze dvou půlkruhů, kterakoliv těžištní osa je osou symetrie, moment setrvačnosti ke kterékoli těžištní ose je hlavní centrální moment setrvačnosti.

$$I_{x_t} = I_{z_t} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4$$



Kruh



Mezikruží

Mezikruží:

Složený obrazec z vnějšího kruhu o poloměru r_1 a odečítaný vnitřní kruh o poloměru r_0 .

$$I_{x_t} = I_{z_t} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (r_1^4 - r_0^4)$$

30/9/22
58

Výpočet kvadratických momentů pomocí tabulek

přehledná tab. C.3.	Plocha A	x	I	W
	$\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 2,598 a^2$	$x_c = \frac{13}{32} a$ $= 0,406 a$	$I_x = I_y = \frac{15\sqrt{3}}{160} a^4$ $= 0,541 a^4$	$W_x = W_y = \frac{3\sqrt{3}}{160} a^3$ $= 0,034 a^3$
	$2a^2(1 + \sqrt{2})$ $(a = \frac{2a}{\sqrt{2}})$	$x_c = \frac{1}{4} a(1 + \sqrt{2})$ $= 0,354 a$	$I_x = I_y = \frac{1}{64} a^4 (1 + \sqrt{2})^3$ $= 0,282 a^4$	$W_x = W_y = \frac{1}{64} a^3 (1 + \sqrt{2})^2$ $= 0,208 a^3$
	πr^2	$x = r = \frac{d}{2}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0,785 r^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0,785 r^3$

30/9/22
59

Centrální kvadratické momenty, Příklad 8

Postup výpočtu:

- Rozdělení na prvky
- Určení ploch jednotlivých prvků a souřadnic jejich těžišť v pomocné souřadnicové soustavě
- Výpočet plochy celého složeného obrazce a souřadnic jeho těžiště

Řešení příkladu 8

30/9/22 69

69

Centrální kvadratické momenty, Příklad 8

Postup výpočtu:

- Kvadratické momenty prvků a ramena jejich těžišť
- Centrální kvadratické momenty průřezu:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + c_i^2 \cdot A_i) = 0,006641 \text{ m}^4$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + d_i^2 \cdot A_i) = 0,003921 \text{ m}^4$$

$$D_{xz} = \sum_{i=1}^n (D_{x_i z_i} + c_i \cdot d_i \cdot A_i) = 0,001885 \text{ m}^4$$

Řešení příkladu 8

30/9/22 70

70

Průřezy složené z válcovaných tyčí

30/9/22 71

71

Kvadratické momenty k pootočeným osám

Geometrická transformace souřadnic při pootočení souřadnicových os:

$$x' = x \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \quad z' = x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha$$

Kvadratické momenty obrazce k pootočeným osám:

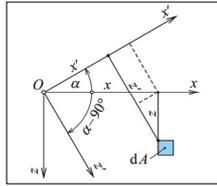
$$I_{x'} = \iint_A z'^2 dA \quad I_{z'} = \iint_A x'^2 dA \quad D_{x'z'} = \iint_A x' \cdot z' dA$$

$$1. \quad I_{x'} = \iint_A z'^2 dA$$

$$I_{x'} = \iint_A (x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \cdot \iint_A x^2 dA +$$

$$+ 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \iint_A x \cdot z dA + \cos^2 \alpha \cdot \iint_A z^2 dA =$$

$$= I_z \cdot \sin^2 \alpha + D_{xz} \cdot \sin 2\alpha + I_x \cdot \cos^2 \alpha = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_z \cdot \sin^2 \alpha + D_{xz} \cdot \sin 2\alpha$$



Geometrická transformace souřadnic při pootočení os

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

72

72

Kvadratické momenty k pootočeným osám

Geometrická transformace souřadnic při pootočení souřadnicových os:

$$x' = x \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \quad z' = x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha$$

$$2. \quad I_{z'} = \iint_A x'^2 dA$$

$$I_{z'} = \iint_A (x \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha \cdot \iint_A x^2 dA - 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \iint_A x \cdot z dA + \sin^2 \alpha \cdot \iint_A z^2 dA =$$

$$= I_x \cdot \cos^2 \alpha - D_{xz} \cdot \sin 2\alpha + I_z \cdot \sin^2 \alpha = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_z \cdot \cos^2 \alpha - D_{xz} \cdot \sin 2\alpha$$

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

73

73

Kvadratické momenty k pootočeným osám

Geometrická transformace souřadnic při pootočení souřadnicových os:

$$x' = x \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \quad z' = x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha$$

$$3. \quad D_{x'z'} = \iint_A x' \cdot z' dA$$

$$D_{x'z'} = \iint_A (x \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha) \cdot (x \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha) dA =$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \iint_A x^2 dA + (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot \iint_A x \cdot z dA - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \iint_A z^2 dA =$$

$$= I_z \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha + D_{xz} \cdot \cos 2\alpha - I_x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha = (I_z - I_x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha + D_{xz} \cdot \cos 2\alpha$$

Určení pootočení os setrvačnosti α , kdy oba momenty setrvačnosti nabývají **extrémních** hodnot (maximální a minimální).

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

74

74

Kvadratické momenty k pootočeným osám

Derivace obou momentů setrvačnosti podle α je rovna 0:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I_{x'} &= -I_x \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_z \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + D_{xz} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = \\ &= (I_z - I_x) \cdot \sin 2\alpha + D_{xz} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot D_{xz}' = 0 \Rightarrow D_{xz}' = 0 \end{aligned}$$

Závěr: Oba momenty setrvačnosti nabývají extrémní hodnoty, když je deviační moment nulový. Jeden z nich je maximální, druhý minimální.

Hlavní osy setrvačnosti se sklonem α_0 :

$$(I_z - I_x) \cdot \sin 2\alpha_0 + D_{xz} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot D_{xz}}{I_x - I_z} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha_0) + I_z \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha_0) + D_{xz} \cdot \sin 2\alpha_0 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) + \frac{1}{2} \cdot (I_x - I_z) \cdot \cos 2\alpha_0 + D_{xz} \cdot \sin 2\alpha_0 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) + \frac{1}{2} \cdot (I_x - I_z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} + D_{xz} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} \end{aligned}$$

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

75

75

Kvadratické momenty k pootočeným osám

Hlavní centrální momenty setrvačnosti:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_z)^2 + 4 \cdot D_{xz}^2}$$

Znaménko před odmocninou: **plus** $\rightarrow I_1 = I_{\max}$, **minus** $\rightarrow I_2 = I_{\min}$

Hlavní osy setrvačnosti se sklonem $\alpha_{1,2}$:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2} - I_x}{D_{xz}} \quad \alpha_1 \rightarrow I_{\max} \quad \alpha_2 \rightarrow I_{\min} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$$

Poučka:

Součet momentů setrvačnosti ke dvěma vzájemně kolmým osám setrvačnosti se při otáčení obou os kolem počátku nemění, zůstává **konstantní** (neměnný, invariantní).

$$I_x + I_z = I_{x'} + I_{z'} = I_1 + I_2$$

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

76

76

Kvadratické momenty k pootočeným osám, Příklad 9

Požadavek:

Určení hlavních centrálních momentů setrvačnosti a sklony jim příslušných hlavních os

Postup:

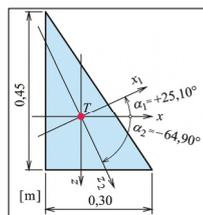
- Centrální kvadratické momenty k vodorovné a svislé ose
- Hlavní centrální momenty setrvačnosti
- Sklon hlavních centrálních os setrvačnosti

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_z)^2 + 4 \cdot D_{xz}^2}$$

$$I_1 = I_{\max} = 0,0008997 \text{ m}^4$$

$$I_2 = I_{\min} = 0,0002189 \text{ m}^4$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2} - I_x}{D_{xz}}$$



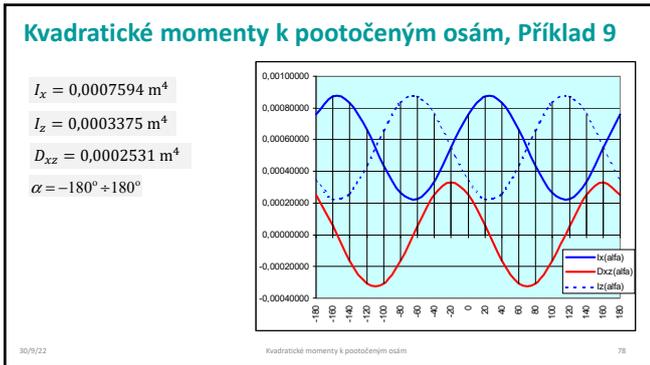
Příklad 9

30/9/22

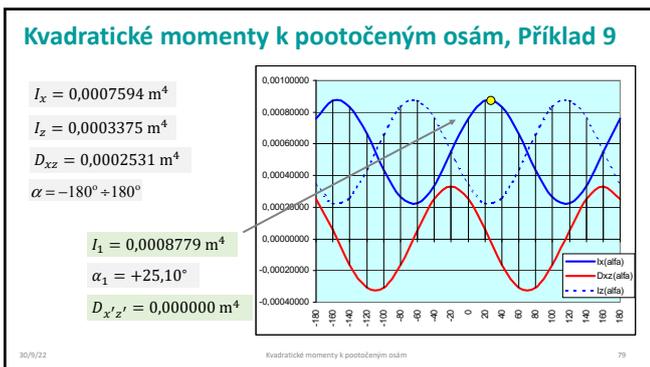
Kvadratické momenty k pootočeným osám

77

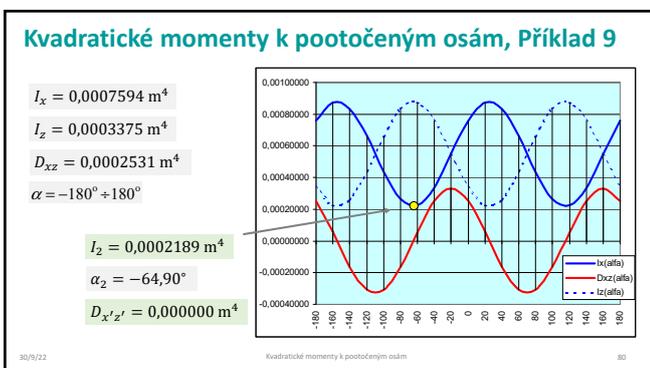
77



78



79



80

Kvadratické momenty k pootočeným osám, Příklad 10

Požadavek:
Určení hlavních centrálních momentů setrvačnosti a sklony jim příslušných hlavních os

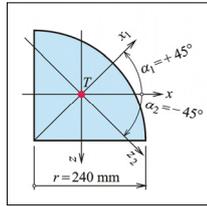
- Postup:**
- Centrální kvadratické momenty k vodorovné a svislé ose
 - Hlavní centrální momenty setrvačnosti
 - Sklon hlavních centrálních os setrvačnosti

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_y) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot D_{xy}^2}$$

$$I_1 = I_{\max} = 2,3672 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = I_{\min} = 1,2743 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\text{tg } \alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2} - I_x}{D_{xy}}$$



Příklad 10

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

81

81

Kvadratické momenty k pootočeným osám, Příklad 11

Požadavek:
Určení hlavních centrálních momentů setrvačnosti a sklony jim příslušných hlavních os

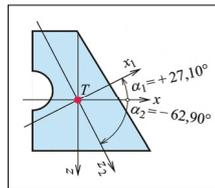
- Postup:**
- Centrální kvadratické momenty k vodorovné a svislé ose
 - Hlavní centrální momenty setrvačnosti
 - Sklon hlavních centrálních os setrvačnosti

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_y) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot D_{xy}^2}$$

$$I_1 = I_{\max} = 0,007605 \text{ m}^4$$

$$I_2 = I_{\min} = 0,002957 \text{ m}^4$$

$$\text{tg } \alpha_{1,2} = \frac{I_{1,2} - I_x}{D_{xy}}$$



Příklad 11

30/9/22

Kvadratické momenty k pootočeným osám

82

82

Poloměr setrvačnosti

Geometrická charakteristika průřezu:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti pro **obdélníkový** průřez (šířka b , výška h):

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot h \approx 0,2887 \cdot h \quad i_{\min} \approx 0,2887 \cdot b$$

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti pro **čtvercový** průřez (o straně a):

$$i_{\max} = i_{\min} \approx 0,2887 \cdot a$$

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti pro **kruhový** průřez: $i_{\max} = i_{\min} = \sqrt{\frac{\pi \cdot r^4}{4 \cdot \pi \cdot r^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}$

30/9/22

Poloměr setrvačnosti

83

83

Polární moment setrvačnosti

Polární moment setrvačnosti (p je vzdálenost od pólu): $I_p = \iint_A p^2 dA$

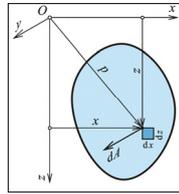
Kvadratický moment, rozměr [délka⁴], obvykle m⁴ nebo mm⁴

$$I_p = \iint_A (x^2 + z^2) dA = \iint_A x^2 dA + \iint_A z^2 dA = I_z + I_x = I_x + I_z$$

Poučka:

Polární moment setrvačnosti k pólu O je roven součtu axiálních momentů setrvačnosti k jakýmkoli dvěma vzájemně kolmým osám setrvačnosti, které tímto pólem procházejí.

Ve stavebské praxi – pólem je výhradně **těžiště průřezu**, **centrální polární moment setrvačnosti**, využití u rotačně symetrických průřezů.



K výkladu polárního momentu setrvačnosti

30/9/22

Polární moment setrvačnosti

84

84

Polární moment setrvačnosti, Příklad 12

Požadavek: Určení centrálního polárního momentu setrvačnosti ocelové trubky

Řešení:

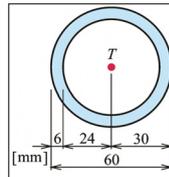
Centrální polární moment setrvačnosti pro **kruh**: $I_p = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^4 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^4$

Centrální polární moment setrvačnosti pro **mezikruží**:

$$I_p = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r_1^4 - r_0^4)$$

Konkrétně: $r_1 = 30 \text{ mm}$ $r_0 = 24 \text{ mm}$

$$I_p = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (30^4 - 24^4) = 7,5119 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$



Zadání příkladu 12

30/9/22

Polární moment setrvačnosti

85

85
