



Přednáška z předmětu: Pružnost a plasticita II

Téma č.11: Úvod do energetických variačních metod

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Obsah

1. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Obsah

1	Základní pojmy a postupy variačního počtu ve stavební mechanice	3
2	Energetické variační metody	10
2.1	Deformační (Lagrangeův) variační princip	12
2.2	Silový (Castiglianův) variační princip	12
3	Deformační (Lagrangeův) variační princip	14
3.1	Podrobnější výklad deformačního variačního principu	14
3.2	Jednoduché příklady použití	23
4	Silový (Castiglianův) variační princip	39
4.1	Podrobný výklad silového variačního principu	39
4.2	Jednoduché příklady použití	51
	Literatura	59



Obsah

2. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 1

Základní pojmy a postupy variačního počtu ve stavební mechanice

Vlastnosti variačních funkcí

Variační funkce jsou předmětem řešení variačních úloh. Ve většině praktických aplikací mají variační funkce tvar

$$\mathbf{f}(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad (1.1)$$

kde $f_i(x)$ ($i = 0, \dots, n$) jsou funkce (nejčastěji polynomy), které jsou spojité v hodnotách

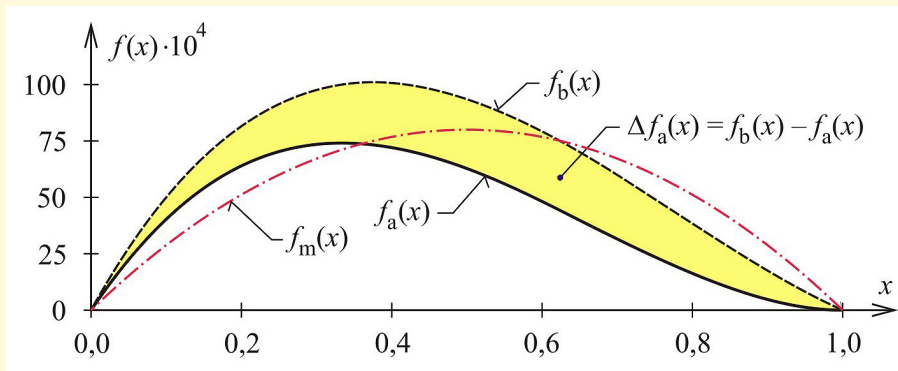
[Obsah](#)[3. strana ze 59](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

i ve svých derivacích v celém zkoumaném intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ a a_i jsou konstanty (tzv. *parametry*). Funkce f_i musí rovněž splňovat okrajové podmínky úlohy při jakýchkoliv hodnotách konstant a_i .

Příkladem funkce (1.1) je kubická parabola z obrázku 1.1 ve tvaru:

$$f(x) = a_1x(1-x) + a_2x(1-x^2). \quad (1.2)$$

Variace funkce



Obr. 1.1 Příklad změny průběhu funkce

Na obrázku 1.1 jsou rovněž znázorněny grafy funkcí označené $f_a(x)$ s konkrétně zadanými parametry $a_1 = 0,100$, $a_2 = -0,050$ a $f_b(x)$ s parametry $a_1 = 0,105$ a $a_2 = -0,045$.



Obsah

4. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Žlutá plocha vyjadřuje *změnu průběhu* původní funkce $f_a(x)$ pozměněnými hodnotami konstant a_1 a a_2 , tedy $\Delta f_a(x) = f_b(x) - f_a(x)$. Hodnoty konstant a_i byly pozměněny o *konečné přírůstky*, a proto byla změna průběhu $\Delta f_a(x)$ také konečná. Při nekonečně malých změnách konstant a_i dojde také k nekonečně malé změně průběhu funkce - **variaci funkce**.

Funkcionál

Funkci (1.1) lze označit zjednodušeně jako $f = f(x)$ a její derivace podle nezávislé proměnné x pak f' , f'' , Funkcionálem pak bude integrál:

$$\Pi = \int_a^b F(f, f', f'', \dots) dx, \quad (1.3)$$

kde F je funkce funkcí f, f', f'', \dots - **funkcionál**. V úlohách stavební mechaniky bývají funkcionály popsány zpravidla jako součet několika integrálů. V případě, že funkcionál obsahuje např. funkci (1.1) a její derivace, po integraci podle x s uvažováním mezi a a b jeho hodnota závisí pouze na hodnotách parametrů a_i .

Příklad 1.1. Určete hodnotu funkcionálu

$$\Pi = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} [f''(x)]^2 - 0,768f(x) \right\} dx, \quad (1.4)$$

pro parametry a_i funkcí $f_a(x)$ a $f_b(x)$ z obrázku 1.1.

Řešení. Funkce (1.2) má druhou derivaci rovnu $f''(x) = -2a_1 - 6a_2$. Po dosazení $[f''(x)]^2$ a $f(x)$ do (1.4) lze získat:



Obsah

5. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



$$II = \int_0^1 [2a_1^2 + 12a_1a_2x + 18a_2^2x^2 - 0,768a_1(x - x^2) - 0,768a_2(x - x^3)] dx \quad (1.5)$$

a po integraci

$$II = 2a_1^2 + 6a_1a_2 + 6a_2^2 - 0,128a_1 - 0,192a_2. \quad (1.6)$$

Hodnota funkcionálu (1.6) pro parametry funkce $f_a(x)$ z obrázku 1.1 $a_1 = 0,100$ a $a_2 = -0,050$ se rovná $II_a = 0,00180$.

Pro funkci $f_b(x)$ s parametry $a_1 = 0,105$ a $a_2 = -0,045$ je hodnota funkcionálu $II_b = 0,00105$.



Variace funkcionálu

V případě variace funkce $f = f(x)$ i jejích derivací f' , f'' , ... se změnila hodnota funkcionálu II - **variace funkcionálu**.

Poznámka 1.2. Při integraci funkcionálu podle nezávislé proměnné x vystupovaly parametry a_i jako konstanty např. (1.5). Po provedení integrace např. (1.6) je v souvislosti s variací funkcionálu nutné tyto parametry považovat za nezávislé proměnné a funkcionál za funkci n těchto proměnných parametrů a_i :

$$II = II(a_1, \dots, a_n). \quad (1.7)$$

Obsah

6. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Variační úloha

Řešením tzv. **variační úlohy** je nalezení průběhu funkce $f = f(x)$ a jejích derivací f' , f'' , ... při němž bude mít funkcionál (1.3) extrémní hodnotu. Řešení spočívá ve stanovení číselných hodnot všech součinitelů a_i funkcionálu Π , k čemuž se v úlohách stavební mechaniky používají většinou *přímé metody*.

Funkcionál bude nabývat svou extrémní hodnotu, pokud budou všechny parciální derivace funkce Π podle všech proměnných a_k ($k = 1, \dots, n$) nulové.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0. \quad (1.8)$$

Variační úloha pak vede k řešení systému n rovnic s kořeny a_i . Funkce $f_m(x)$, zajišťující extrémní hodnotu funkcionálu, se nazývá **extremála**.

Příklad 1.3. Určete extrémní hodnotu funkcionálu (1.4) z příkladu 1.1 a jeho extremálu $f_m(x)$.

Řešení. Parciální derivace (1.8) podle a_1 a a_2 sestavíme pro odvozený výraz (1.6):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 4a_1 + 6a_2 - 0,128 = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 6a_1 + 12a_2 - 0,192 = 0. \quad (1.10)$$

Řešením těchto dvou rovnic lze získat kořeny soustavy $a_1 = 0,032$ a $a_2 = 0$.

Dosazením obou parametrů do výrazu (1.6) vychází minimální hodnota funkcionálu $\Pi_{\min} = -0,002048$.



Obsah

7. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Případným vložení hodnot obou vypočtených parametrů do (1.2) je určena extrémála, která nabývá tvar

$$f_m(x) = 0,032x(1 - x) \quad (1.11)$$

a odpovídá tedy rovnici kvadratické paraboly (je zobrazena na obrázku 1.1).



Poznámka 1.4. Při řešení úloh stavební mechaniky variačními metodami není nutno určovat extrémní hodnoty funkcionálu Π_{\min} nebo Π_{\max} , a proto je vhodnější nejprve v rovnici (1.3) derivovat integrand F podle parametru a_k a pak teprve integrovat podle x :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_k} F(f, f', f'', \dots) dx = 0 \quad (1.12)$$

pro $k = 1, \dots, n$.

Příklad 1.5. Určete rovnice (1.8) z příkladu 1.3 způsobem popsaným v poznámce 1.4.

Řešení. Při řešení výrazu (1.4) podle (1.12) lze získat:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2f''(x) \frac{\partial f''(x)}{\partial a_k} - 0,768 \frac{\partial f(x)}{\partial a_k} \right\} dx = 0 \quad (1.13)$$

pro $k = 1, 2$. Při dosazení $f''(x) = -2a_1 - 6a_2x$; $\frac{\partial f''(x)}{\partial a_1} = -2$ a $\frac{\partial f(x)}{\partial a_1} = x(1 - x)$ pro $k = 1$; $\frac{\partial f''(x)}{\partial a_2} = -6x$ a $\frac{\partial f(x)}{\partial a_2} = x(1 - x^2)$ pro $k = 2$ je možno získat po integraci rovnice (1.9) a (1.10), aniž by se sestavovaly funkcionály (1.5) a (1.6).



Obsah

8. strana ze 59

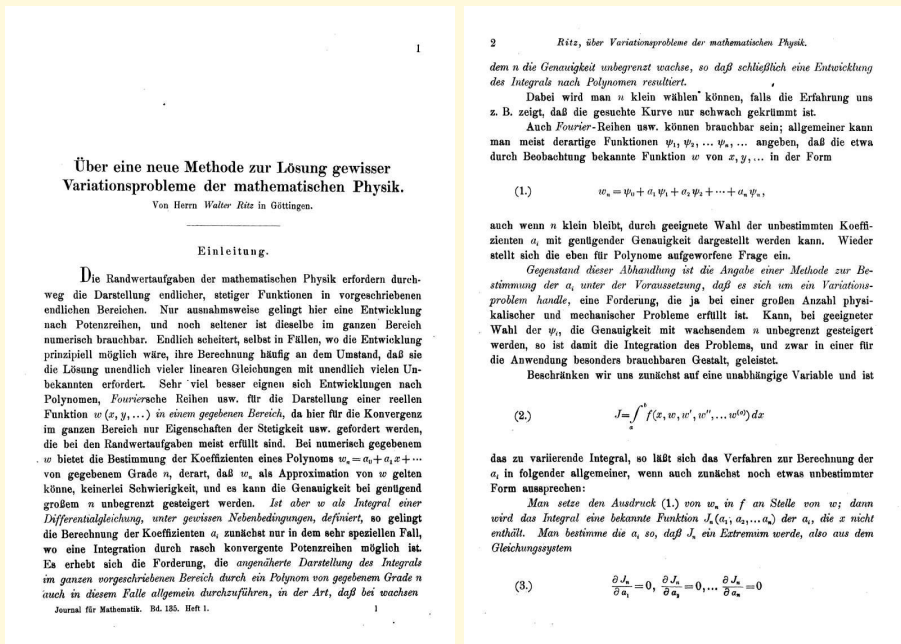


Zavřít dokument

Konec

Čelá obrazovka/Okno

Uvedené pojetí variační úlohy ve stavební mechanice bývá označováno jako **Ritzova metoda**. Walter Ritz (1878-1909) postup použil v roce 1908 při řešení tenkých desek.



Obr. 1.2: Ukázka Ritzovy práce

Obsah

9. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 2

Energetické variační metody

Vlastnosti konstrukce v reálném zatěžovacím stavu, které jsou důležité pro další výpočet:

1. V zatížené konstrukci vzniká tzv. *pole napětí*, tj. souhrn **normálových napětí** σ a **smykových napětí** τ ve všech bodech tělesa tvořícího konstrukci. U prutové konstrukce je pole napětí vyjádřeno prostřednictvím **průběhu vnitřních sil** ve všech průřezech prutů. Vnitřní síly splňují **diferenciální podmínky rovnováhy** na všech elementech konstrukce a spolu s vnějšími silami tvoří **rovnovážnou soustavu sil**.
2. V deformované konstrukci vzniká tzv. pole deformací, tj. souhrn **poměrných protažení** ε a **zkosení** γ ve všech bodech tělesa tvořícího konstrukci. U prutové konstrukce je pole deformací vyjádřeno prostřednictvím **elastických čar** prutů. Deformace splňují **podmínky kompatibility** na všech elementech konstrukce a elastické čáry respektují **kinematické podmínky** předepsané vnějšími vazbami.

Obsah

10. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. Pole napětí (resp. vnitřní síly) a pole deformací (resp. elastické čáry) jsou vzájemně vázána **fyzikálními rovnicemi** (u lineárně pružného materiálu tedy Hookovým zákonem).
4. Vnější síly zatížené a deformované konstrukce vykazují potenciální energii (stručněji *reálný potenciál*) Π_e , vnitřní síly pak potenciální energii Π_i . **Celkový reálný potenciál soustavy Π je dán součtem $\Pi = \Pi_e + \Pi_i$ a je roven nule: $\Pi = 0$.**

Pomocí celkového potenciálu soustavy lze vyřešit neznámé vnitřní síly, reakce a deformace konstrukce. Metody výpočtu jsou z matematického hlediska založeny na použití variačního počtu a jsou označovány jako **energetické variační metody**. Energetických variačních metod je v současnosti známo několik. Z fyzikálního hlediska se liší tzv. **energetickým variačním principem**. Zásadní postavení mají zejména dva tzv. *klasické variační principy*, které jsou historicky nejstarší a také nejpoužívanější:

- Deformační (Lagrangeův) variační princip
- Silový (Castiglianův) variační princip



Obsah

11. strana ze 59



Zavřít dokument

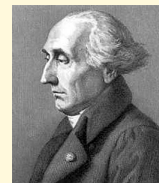
Konec

Celá obrazovka/Okno

2.1. Deformační (Lagrangeův) variační princip

Definice 2.1. Ze všech možných aproximací pole deformací (elastické čáry), které splňují podmínky kompatibility a okrajové podmínky předepsané vnějšími vazbami, je nejuvstíženější ta, která minimalizuje deformační potenciál $^d\Pi$.

Deformační variační princip je pojmenován podle francouzského matematika a fyzika Josepha-Louise Lagrangeho (1736-1813), který se jako první zabýval počátkem 19.století využitím pojmu mechanické práce ke studiu statické rovnováhy tuhých (nedeformovatelných) těles.



2.2. Silový (Castiglianův) variační princip

Definice 2.2. Ze všech možných aproximací pole napětí (vnitřních sil), které splňují diferenciální podmínky rovnováhy a vyhovují podmínkám rovnováhy vnitřních a vnějších sil, je nejuvstíženější ta, která minimalizuje silový potenciál $^s\Pi$.

Silový variační princip je pojmenován podle italského vědce Carla Alberta Castigliana (1847-1884), který v roce 1875 poprvé publikoval ucelenou teorii výpočtu pružných soustav založenou na pojmu přetvárné práce.

Poznámka 2.3. Mezi oběma principy existuje teoretická souvislost, zvaná **du-alita**. Záměnou odpovídajících pojmů (*pole napětí* \leftrightarrow *pole deformací*, *podmínky rovnováhy* \leftrightarrow *podmínky kompatibility* apod.) přejde jeden princip v druhý.

[Obsah](#)

12. strana ze 59

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Poznámka 2.4. Energetické variační metody jsou metody **přibližné**. Přesné řešení lze získat pouze ve zvláštních případech, kdy skutečný tvar elastické čáry nebo skutečný průběh vnitřních sil je obsažen ve zvolené aproximační funkci.

Poznámka 2.5. U prutových soustav se energetické variační principy používají jen k řešení jednoduchých úloh (např. k výpočtu deformací v zadaných bodech konstrukce nebo k výpočtu reakcí staticky neurčitých nosníků), kde se většinou získá i přesné řešení. Hlavní uplatnění energetických variačních metod je třeba hledat při řešení plošných a masivních prostorových konstrukcí metodou konečných prvků.

[Obsah](#)

13. strana ze 59

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Kapitola 3

Deformační (Lagrangeův) variační princip

3.1. Podrobnější výklad deformačního variačního principu

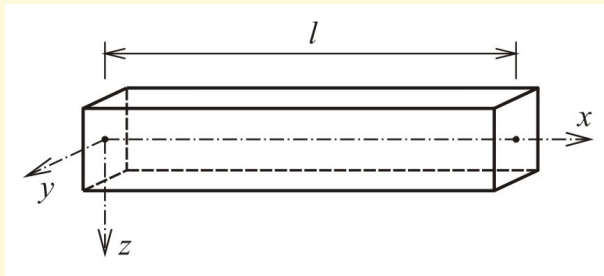
Aproximace elastických čar

Pro případ obecně namáhaného přímého prutu v prostoru (umístěného v lokální souřadnicové soustavě podle obrázku 3.1) lze aproximovat, za předpokladu zanedbání vlivu posouvajících sil na deformaci, čtyři elastické čáry s využitím polynomů:

(a) rovnice osových posunů:

$$u = u(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i, \quad (3.1)$$

[Obsah](#)[14. strana ze 59](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Obr. 3.1 Souřadnicová soustava přímého prutu v prostoru

(b) rovnice ohybové čáry v hlavní rovině x,z :

$$w = w(x) = \sum_{i=1}^n a_i w_i, \quad (3.2)$$

(c) rovnice ohybové čáry v hlavní rovině x,y :

$$v = v(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad (3.3)$$

(d) rovnice pootočení při kroucení:

$$\vartheta = \vartheta(x) = \sum_{i=1}^n a_i \vartheta_i, \quad (3.4)$$



Obsah

15. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

V rovnicích (3.1) až (3.4) představují a_i parametry aproximačních funkcí, $u_i = u_i(x)$ až $v_i = v_i(x)$ dílčí aproximační polynomy zvolené tak, aby funkce (3.1) až (3.4) vyhovovaly okrajovým podmínkám, které jsou předepsány vnějšími vazbami.

Poznámka 3.1. Výsledky variačních řešení lze superponovat, proto lze každou elastickou čáru vyšetřovat v samostatné úloze. Z tohoto důvodu jsou parametry a_i i jejich počet n označeny v rovnicích (3.1) až (3.4) stejně.

Poznámka 3.2. Aproximační polynomy v rovnicích (3.1) až (3.4) jsou po celé délce prutu spojité ve všech hodnotách i derivacích. K uspokojivým výsledkům pak mohou vést pouze při zatíženích, které neobsahují osamělé síly nebo momenty, jež by způsobovaly nespojitosti v derivacích ohybových čar.

Deformační potenciál vnějších sil

Energie vnějších sil působících na vyšetřovaný prut je u jednotlivých elastických čar dána vzorcí:

$$u(x) : {}^d\Pi_e = - \sum_j P_{x,j} u_j - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x) u \, dx, \quad (3.5)$$

$$w(x) : {}^d\Pi_e = - \sum_j P_{z,j} w_j - \sum_j M_{y,j} w'_j - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} q_{z,j}(x) w \, dx, \quad (3.6)$$

$$v(x) : {}^d\Pi_e = - \sum_j P_{y,j} v_j - \sum_j M_{z,j} v'_j - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} q_{y,j}(x) v \, dx, \quad (3.7)$$



Obsah

16. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$\vartheta(x) : {}^d\Pi_e = - \sum_j M_{x,j} \vartheta_j - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} m_{x,j}(x) \vartheta \, dx. \quad (3.8)$$

Na energii vnějších sil daného prutu se tedy podílejí:

- Osamělé síly $P_{x,j}, P_{y,j}, P_{z,j}$ působící ve směrech jednotlivých souřadnicových os, které konají práci na posunech svých působišť u_j, v_j, w_j v týchž směrech,
- Spojitá silová zatížení $n_{x,j}(x)$ působící v ose prutu x , která konají práci na osových posunech u ,
- Spojitá příčná silová zatížení $q_{y,j}(x), q_{z,j}(x)$ působící ve směrech souřadnicových os y, z , která konají práci na pořadnicích ohybových čar v, w ,
- Osamělé ohýbající momenty $M_{y,j}, M_{z,j}$ působící v hlavních rovinách prutu x, z a x, y , které konají práci na pootočeních, tedy na derivacích ohybových čar w'_j, v'_j v místech svých působišť,
- Osamělé zkrucující momenty $M_{x,j}$, které konají práci na krutových pootočeních ϑ_j svých působišť,
- Spojitá momentová zkrucující zatížení $m_{x,j}(x)$, která konají práci na krutových pootočeních ϑ .

Kladné smysly uvedených veličin jsou znázorněny na obrázku 3.2.



Obsah

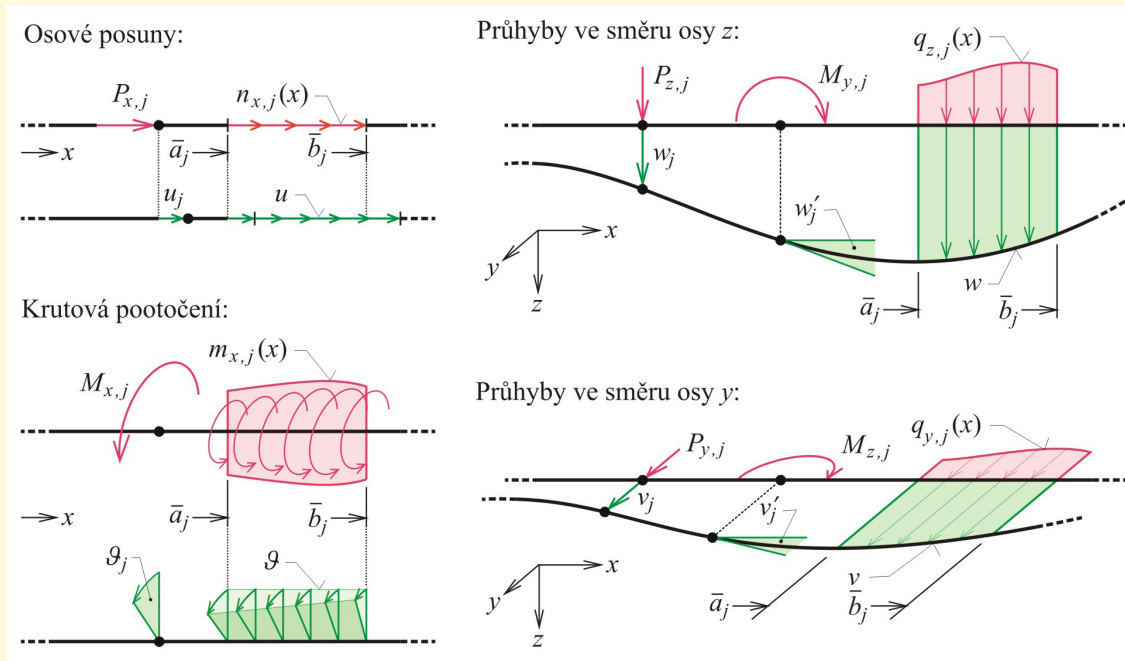
17. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.2 Deformační potenciál vnějších sil na jednotlivých elastických čárách

Deformační potenciál vnitřních sil

U fyzikálně lineárního materiálu je závislost mezi normálovou silou N a poměrným protažením ε dána Hookovým zákonem $N = EAu' = EA\varepsilon$. Pokud se ve variační úloze mění tvar



Obsah

18. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

elastické čáry (tedy funkce $u(x)$ a tím i poměrné protažení ε), změnou jejich aproximačních parametrů (tedy čistě matematickými prostředky bez ohledu na vnější síly) vystupuje protažení ε jako nezávisle proměnná veličina a energii (zápornou práci) připadající na elementární vrstvičku o tloušťce dx lze získat integrací:

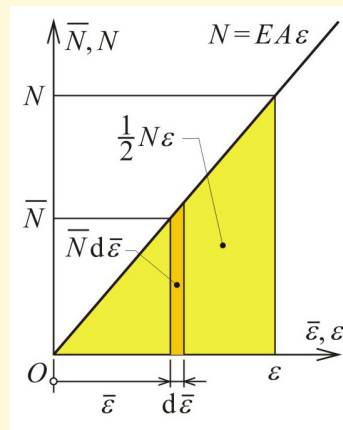
$$\frac{d^d \Pi_i}{dx} = -\frac{dL_i}{dx} = \int_0^\varepsilon \bar{N} d\bar{\varepsilon} = EA \int_0^\varepsilon \bar{\varepsilon} d\bar{\varepsilon} = EA \frac{1}{2} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} EA u'^2. \quad (3.9)$$

Na obrázku 3.3 je tato energie vrstvičky taženého prutu znázorněna žlutě vybarveným trojúhelníkem o ploše $\frac{1}{2} N \varepsilon$. Obdobně lze odvodit energii i pro ostatní elastické čáry. Vzorec pro deformační potenciál vnitřních sil přímého prutu pro fyzikálně lineární materiál s aproximačními funkcemi s měnitelnými parametry pak má tvar:

$$d^d \Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^l (EA u'^2 + EI_y w''^2 + EI_z v''^2 + GI_t \vartheta'^2) dx. \quad (3.10)$$

Výpočet extrémál

Celkový deformační potenciál soustavy je dán součtem $d^d \Pi = d^d \Pi_i + d^d \Pi_e$. Podmínka pro stanovení minima tohoto funkcionálu je nulová hodnota jeho variace, tj. $\delta^d \Pi = \delta^d \Pi_i + \delta^d \Pi_e = 0$, neboli



Obr. 3.3 Deformační potenciál taženého prutu



Obsah

19. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$\delta^d \Pi_i = -\delta^d \Pi_e. \quad (3.11)$$

Tato podmínka bude splněna, vyjádří-li se variace obou potenciálů v rovnici (3.11) daných vztahy (3.5) až (3.8) pomocí parciálních derivací podle aproximačních parametrů. Pro elastickou čáru $u = u(x)$ tak lze získat n dvojic výrazů ($k = 1, \dots, n$):

$$\frac{\partial^d \Pi_i}{\partial a_k} = \frac{1}{2} \int_0^l EA 2u' \frac{\partial u'}{\partial a_k} dx = \int_0^l EA \left(\sum_{i=1}^n a_i u'_i \right) u'_k dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_0^l EA u'_i u'_k dx, \quad (3.12)$$

$$-\frac{\partial^d \Pi_e}{\partial a_k} = \sum_j P_{x,j} \left(\frac{\partial u}{\partial a_k} \right) + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x) \frac{\partial u}{\partial a_k} dx = \sum_j P_{x,j}(u_k)_j + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x) u_k dx. \quad (3.13)$$

Vznikne tak soustava n rovnic ($k = 1, \dots, n$) pro výpočet parametrů a_i ($i = 1, \dots, n$):

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^l EA u'_i u'_k dx = \sum_j P_{x,j}(u_k)_j + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x) u_k dx. \quad (3.14)$$

Soustavu rovnic (3.14) lze zapsat přehledněji maticově:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Z} \rightarrow [k_{i,k}] \cdot \{a_i\} = \{Z_k\}. \quad (3.15)$$

kde \mathbf{k} značí matici levých stran rovnic tzv. *matici tuhosti*, \mathbf{a} sloupcový vektor aproximačních součinitelů a \mathbf{Z} sloupcový vektor pravých stran rovnic tzv. *zatěžovací vektor*.



Obsah

20. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Obdobně lze odvodit soustavy rovnic i pro ostatní tři typy elastických čar. Pro složky matice tuhosti a zatěžovacího vektoru pak u jednotlivých typů elastických čar platí:

(a) rovnice osových posunů $u = u(x)$:

$$k_{i,k} = \int_0^l EA u'_i u'_k dx; Z_k = \sum_j P_{x,j}(u_k)_j + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x) u_k dx, \quad (3.16)$$

(b) rovnice ohybové čáry $w = w(x)$ v hlavní rovině x, z :

$$k_{i,k} = \int_0^l EI_y w''_i w''_k dx; Z_k = \sum_j P_{z,j}(w_k)_j + \sum_j M_{y,j}(w'_k)_j + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} q_{z,j}(x) w_k dx, \quad (3.17)$$

(c) rovnice ohybové čáry $v = v(x)$ v hlavní rovině x, y :

$$k_{i,k} = \int_0^l EI_z v''_i v''_k dx; Z_k = \sum_j P_{y,j}(v_k)_j + \sum_j M_{z,j}(v'_k)_j + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} q_{y,j}(x) v_k dx, \quad (3.18)$$

(d) rovnice pootočení při kroucení $\vartheta = \vartheta(x)$:

$$k_{i,k} = \int_0^l GI_t \vartheta'_i \vartheta'_k dx; Z_k = \sum_j M_{x,j}(\vartheta_k)_j + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} m_{x,j}(x) \vartheta_k dx. \quad (3.19)$$

Po vyřešení kterékoliv z těchto soustav lze získat hodnoty parametrů a_i a tím i extrémálu čili nejvýstižnější aproximaci (případně i přesný tvar) příslušné elastické čáry.



Obsah

21. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Vnitřní síly a reakce ve vnějších vazbách

Průběhy vnitřních sil lze stanovit z derivací elastických čar:

(a) Normálová síla N

$$N = EA \frac{du}{dx} = EAu', \quad (3.20)$$

(b) Ohybový moment M_y v hlavní rovině x, z

$$M_y = -EI_y \frac{d\varphi_y}{dx} = -EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -EI_y w'', \quad (3.21)$$

(c) Ohybový moment M_z v hlavní rovině x, y

$$M_z = -EI_z v'', \quad (3.22)$$

(d) Kroutící moment T

$$T = GI_t \vartheta'. \quad (3.23)$$

Vzhledem k zanedbání vlivu posouvajících sil na deformace se průběhy posouvajících sil V_z a V_y určí jako derivace odpovídajících ohybových momentů:

(e) Posouvající síla V_z v hlavní rovině x, z

$$V_z = \frac{dM_y}{dx} = -EI_y w''', \quad (3.24)$$

(f) Posouvající síla V_y v hlavní rovině x, y

$$V_y = \frac{dM_z}{dx} = -EI_z v'''. \quad (3.25)$$



Obsah

22. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Reakce ve vnějších vazbách se pak určí pomocí hodnot vnitřních sil v podporových bodech nebo z podmínek rovnováhy.

Poznámka 3.3. Vzhledem k omezenému rozsahu přednášky se další výklad nezabývá výpočtem zatěžovacího stavu zadaných popuštění podpor nebo oteplením konstrukce.

3.2. Jednoduché příklady použití

Příklad 3.4. Železobetonový pilíř obdélníkového průřezu s proměnnou výškou průřezu podle obrázku 3.4 je namáhán jen vlastní tíhou. Měrná hmotnost staviva je $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, modul pružnosti v tahu a tlaku $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kPa}$. Pomocí deformačního variačního principu určete:

- tvář elastické čáry $u = u(x)$,
- průběh normálových sil N ,
- reakce $R_{a,b}$ a $R_{b,a}$.

Přípravný výpočet

- Počátek lokálních souřadnic x je v horní podpoře a a její kladný smysl směřuje k dolnímu konci b .
- Proměnnou výšku průřezu lze vyjádřit pomocí $h - h(x) = h_a - \frac{h_a - h_b}{l}x = 1,6 - 0,2x \text{ [m]}$.
- Proměnná průřezová plocha je pak rovna $A = A(x) = b \cdot h = 1,6 - 0,2x \text{ [m]}$.
- Měrná tíha: $\gamma = \rho \cdot 10 = 24000 \text{ N/m}^3 = 24 \text{ kN/m}^3$.
- Spojité osové zatížení: $n_x = n_x(x) = \gamma \cdot A = 24 \cdot (1,6 - 0,2x) = 38,4 - 4,8x \text{ [kN/m]}$.
- Celková tíha pilíře se pak rovná $Q = \frac{1,6+0,8}{2} \cdot 4 \cdot 24 = 115,2 \text{ [kN]}$.



Obsah

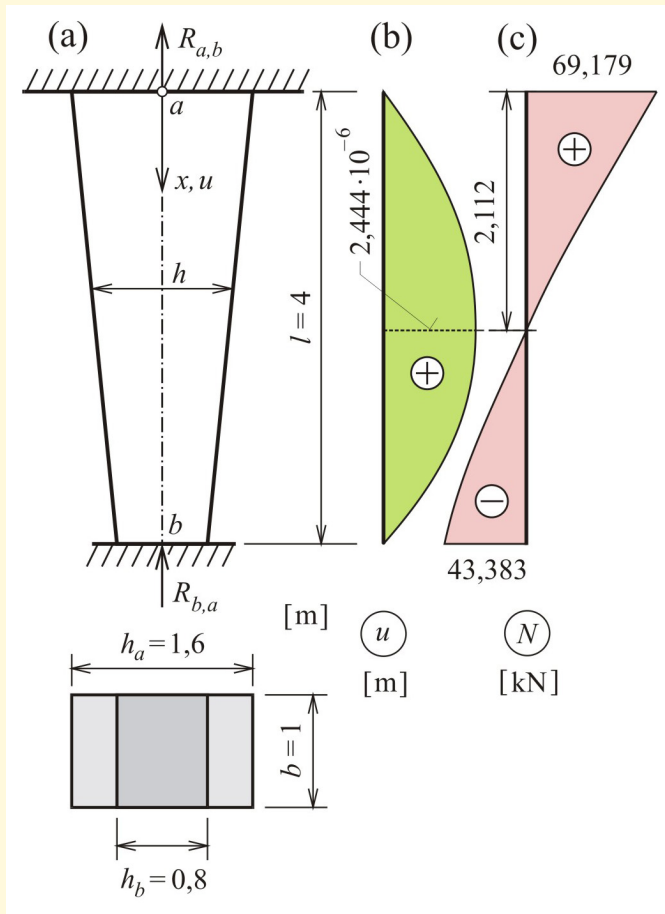
23. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.4 Zadání a řešení příkladu 3.4



Obsah

24. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Volba aproximačního polynomu:

V případě stálého průřezu by elastická čára osových posunů byla vyjádřena polynomem 2°. Při proměnném průřezu je její tvar složitější (nemá podobu polynomu, ale logaritmické funkce) a pro její aproximaci je účelné zvolit vyšší polynom. Pro jednoduchost výkladu je zvolen polynom 3°. Pro posuny je zvolen stejný počátek i kladný smysl jako pro souřadnici x .

$$u = u(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

Tento polynom musí splňovat okrajové podmínky (hodnoty posunů v obou podporách musí být rovny nule), díky čemuž se z polynomu vyliminují dvě konstanty:

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0,$$

$$u(l) = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2l - c_3l^2 = -4c_2 - 16c_3.$$

Po dosazení do polynomu a úpravě lze získat:

$$u = c_2(x^2 - 4x) + c_3(x^3 - 16x).$$

S ohledem na označení v předchozím výkladu se názvy parametrů přejmenují: $a_1 \equiv c_2$ a $a_2 \equiv c_3$. Aproximační polynom se dvěma členy ($n = 2$) má tento výsledný tvar:

$$u = a_1(x^2 - 4x) + a_2(x^3 - 16x).$$

Dílní aproximační polynomy a jejich derivace se pak rovnají:

$$u_1 = (x^2 - 4x), \quad u_1' = (2x - 4).$$

$$u_2 = (x^3 - 16x), \quad u_2' = (3x^2 - 16).$$



Obsah

25. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Složky matice tuhosti:

Matice tuhosti \mathbf{k} je čtvercová matice řádu $n = 2$ a vzhledem k symetrii matice má 3 neznámé členy, které lze určit pomocí vztahu (3.16).

$$k_{1,1} = E \int_0^l Au_1' u_1' dx = E \int_0^4 (1,6 - 0,2x)(2x - 4)^2 dx = E \cdot 25,6 \text{ [kNm}^3\text{]},$$

$$k_{2,2} = E \int_0^l Au_2' u_2' dx = E \int_0^4 (1,6 - 0,2x)(3x^2 - 16)^2 dx = E \cdot 901,12 \text{ [kNm}^5\text{]},$$

$$k_{1,2} = k_{2,1} = E \int_0^l Au_1' u_2' dx = E \int_0^4 (1,6 - 0,2x)(2x - 4)(3x^2 - 16) dx = E \cdot 146,77\bar{3} \text{ [kNm}^4\text{]}.$$

Složky zatěžovacího vektoru:

Zatěžovací vektor \mathbf{Z} má dva členy, jež lze určit podle vztahu (3.16):

$$Z_1 = \int_0^l n_x u_1 dx = \int_0^4 (38,4 - 4,8x)(x^2 - 4x) dx = -307,2 \text{ [kNm}^2\text{]},$$

$$Z_2 = \int_0^l n_x u_2 dx = \int_0^4 (38,4 - 4,8x)(x^3 - 16x) dx = -1802,24 \text{ [kNm}^3\text{]}.$$



Obsah

26. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Soustava rovnic a její kořeny:

Soustava rovnic (3.15) po vydělení obou stran modulem pružnosti E nabývá tvaru:

$$\begin{bmatrix} 25,6 & 146,77\bar{3} \\ 146,77\bar{3} & 901,12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -307,2 \\ -1802,24 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{E}.$$

Vyřešením soustavy rovnic lze získat kořeny: $a_1 = \frac{-8,061069}{E} [\text{m}^{-1}]$ a $a_2 = \frac{-0,687023}{E} [\text{m}^{-2}]$.

Elastická čára:

Dosazením kořenů do rovnice aproximačního polynomu je možno získat aproximaci elastické čáry. Posuny u vznikají v ose prutu. Na obrázku 3.4 jsou vykresleny pro názornost kolmo k ose prutu. Horní část pilíře se prodlouží, spodní část se zkrátí. Maximální hodnota posunutí činí $u_{max} = 2,444 \cdot 10^{-6} [\text{m}]$ a vzniká ve vzdálenosti $x = 2,112 [\text{m}]$ od horního konce pilíře.

Průběh normálových sil:

Podle rovnice (3.20) je průběh normálových sil popsán funkcí:

$$N = EAu' = E(1,6 - 0,2x)[a_1(2x - 4) + a_2(3x^2 - 16)] [\text{kN}],$$

do které se dosadí vypočtené parametry. Průběh normálových sil je zobrazen na obrázku 3.4. Horní část pilíře je tažená, spodní tlačena. Největší posunutí nastává v průřezu s nulovou normálovou silou.



Obsah

27. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Reakce v podporách:

Reakce ve vnějších vazbách lze vypočítat z krajních hodnot normálových sil:

$$R_{a,b} = N(0) = E \cdot 1,6(-4a_1 - 16a_2) = 69,179 \text{ [kN]},$$

$$R_{b,a} = N(4) = E \cdot 0,8(4a_1 + 32a_2) = 43,383 \text{ [kN]}.$$

Součet obou reakcí je 112,562 kN, což se nerovná celkové tíze pilíře 115,2 kN. Podmínka rovnováhy není v důsledku přibližného řešení splněna.

Poznámka 3.5. Přesnost výsledků: V následující tabulce jsou pro srovnání uvedeny hodnoty obou reakcí pro aproximační řešení polynomem 3°, polynomem 4° a přesné řešení. Tabulka rovněž obsahuje relativní chyby v procentech.

způsob řešení	$R_{a,b}$ [kN]	$\Delta R_{a,b}$ [%]	$R_{b,a}$ [kN]	$\Delta R_{b,a}$ [%]
polynom 3°	69,179	-1,88	43,383	-2,94
polynom 4°	70,760	+0,37	44,440	-0,58
přesné řešení	70,501	0	44,699	0

Z tabulky vyplývá, že zvýšením stupně aproximačního polynomu se zpřesní výsledky. Naprosto přesného řešení však polynomem nelze dosáhnout.



Obsah

28. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklad 3.6. Jednoduchý staticky neurčitý nosník podle obrázku 3.5 je zatížen spojitým trojúhelníkovým zatížením. Nosník je tvořen ocelovým válcovaným prutem profilu I140. Pomocí deformačního variačního principu stanovte:

- (a) tvar elastické (ohybové) čáry $w = w(x)$ (se zanedbáním vlivu posouvajících sil na deformace),
 (b) průběhy vnitřních sil $V = V_z$ a $M = M_y$,
 (c) reakce $R_{a,b}$, $R_{b,a}$ a $M_{a,b}$.

Vstupní údaje a přípravný výpočet:

- a) Ohybová tuhost: $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kPa}$, $I_y = 5,72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $EI_y = 1201,2 \text{ kNm}^2$.
 b) Příčné zatížení: $q_z = q = \frac{q_b}{l}x = 7,5x \text{ [kN/m]}$.
 c) Celkové zatížení: $Q = \frac{q_b l}{2} = 60 \text{ [kN]}$.

Volba aproximačního polynomu:

Výslednou ohybovou čáru lze nejlépe aproximovat polynomem 5° s kladným směrem průhybu dolů:

$$w = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$$

Poznámka 3.7. Tímto způsobem lze získat přesné řešení, jelikož ohybová čára dané konstrukce se zadaným zatížením skutečně nabývá tvaru daného polynomem 5°.

Polynom musí splňovat okrajové podmínky, pomocí nichž lze vyloučit čtveřici konstant:

- $w(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$,
- $w'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$,



Obsah

29. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. $w(l) = 0 \Rightarrow c_2 + c_3l + c_4l^2 + c_5l^3 = 0,$
 4. $M_y(l) = 0 \Rightarrow w''(l) = 0 \Rightarrow 2c_2 + 6c_3l + 12c_4l^2 + 20c_5l^3 = 0.$

Z posledních dvou podmínek lze vyeliminovat:

$$c_2 = \frac{3}{2}c_4l^2 + \frac{7}{2}c_5l^3, \quad c_3 = -\frac{5}{2}c_4l - \frac{9}{2}c_5l^2.$$

Aproximační polynom pak nabude tvaru:

$$w = c_4 \left(x^4 - \frac{5}{2}lx^3 + \frac{3}{2}l^2x^2 \right) + c_5 \left(x^5 - \frac{9}{2}l^2x^3 + \frac{7}{2}l^3x^2 \right).$$

Změnou označení $a_1 \equiv c_4$, $a_2 \equiv c_5$ a dosazením $l = 4\text{ m}$ lze získat výsledný tvar aproximačního polynomu ($n = 2$):

$$w = a_1(24x^2 - 10x^3 + x^4) + a_2(224x^2 - 72x^3 + x^5).$$

Dílní aproximační polynomy a jejich derivace pak jsou rovny:

$$w_1 = 24x^2 - 10x^3 + x^4, \quad w_1' = 48x - 30x^2 + 4x^3, \quad w_1'' = 48 - 60x + 12x^2,$$

$$w_2 = 224x^2 - 72x^3 + x^5, \quad w_2' = 448x - 216x^2 + 5x^4, \quad w_2'' = 448 - 432x + 20x^3.$$



Obsah

30. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Složky matice tuhosti:

Složky matice tuhosti \mathbf{k} se stanoví na základě vztahu (3.17):

$$k_{1,1} = EI_y \int_0^l w_1'' w_1'' dx = EI_y \int_0^4 (48 - 60x + 12x^2)^2 dx = EI_y \cdot 1843,2 \text{ [kNm}^7\text{]},$$

$$k_{2,2} = EI_y \int_0^l w_2'' w_2'' dx = EI_y \int_0^4 (448 - 432x + 20x^3)^2 dx = EI_y \cdot 231716,6 \text{ [kNm}^9\text{]},$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} = k_{2,1} &= EI_y \int_0^l w_1'' w_2'' dx = EI_y \int_0^4 (48 - 60x + 12x^2)(448 - 432x + 20x^3) dx = \\ &= EI_y \cdot 20480,0 \text{ [kNm}^8\text{]}. \end{aligned}$$

Složky zatěžovacího vektoru:

Složky zatěžovacího vektoru \mathbf{Z} se rovněž určí podle vztahu (3.17):

$$Z_1 = \int_0^l q w_1 dx = \int_0^4 7,5x(24x^2 - 10x^3 + x^4) dx = 1280,0 \text{ [kNm}^4\text{]},$$

$$Z_2 = \int_0^l q w_2 dx = \int_0^4 7,5x(224x^2 - 72x^3 + x^5) dx = 14482,3 \text{ [kNm}^5\text{]}.$$



Obsah

31. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Soustava rovnic a její kořeny:

Soustavu rovnic (3.15) po vydělení obou stran konstantní ohybovou tuhostí EI_y lze upravit do tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1843,2 & 20480,0 \\ 20480,0 & 231716,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1280,0 \\ 14482,3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EI_y}.$$

Kořeny soustavy rovnic po vyřešení vycházejí: $a_1 = 0$ a $a_2 = \frac{0,0625}{EI_y} [\text{m}^{-4}]$.

Ohybová čára:

Dosazením vypočtených kořenů do odvozeného polynomu $w = a_1(24x^2 - 10x^3 + x^4) + a_2(224x^2 - 72x^3 + x^5)$ lze získat rovnici ohybové čáry, která po úpravě nabývá tvaru:

$$w = (14x^2 - 4,5x^3 + 0,0625x^5) \cdot \frac{1}{EI_y} [\text{m}].$$

Největší průhyb nastane v průřezu vzdáleném 2,390 m od levé podpory a jeho velikost činí $w_{max} = 19,488 [\text{mm}]$. Výsledný tvar ohybové čáry je zobrazen na obrázku 3.5(d).

Průběhy vnitřních sil:

Průběhy vnitřních sil je možno určit z derivací ohybové čáry:

$$M_y = -EI_y w'' = -28 + 27x - 1,25x^3 [\text{kNm}], \quad V_z = -EI_y w''' = 27 - 3,75x^2 [\text{kN}].$$

Největší ohybový moment $M_{y,max} = 20,299 [\text{kNm}]$ vznikne v průřezu s nulovou posouvající silou V_z , tedy ve vzdálenosti $x_m = 2,683 [\text{m}]$. Průběhy vnitřních sil jsou zobrazeny na obrázku 3.5(b),(c).



Obsah

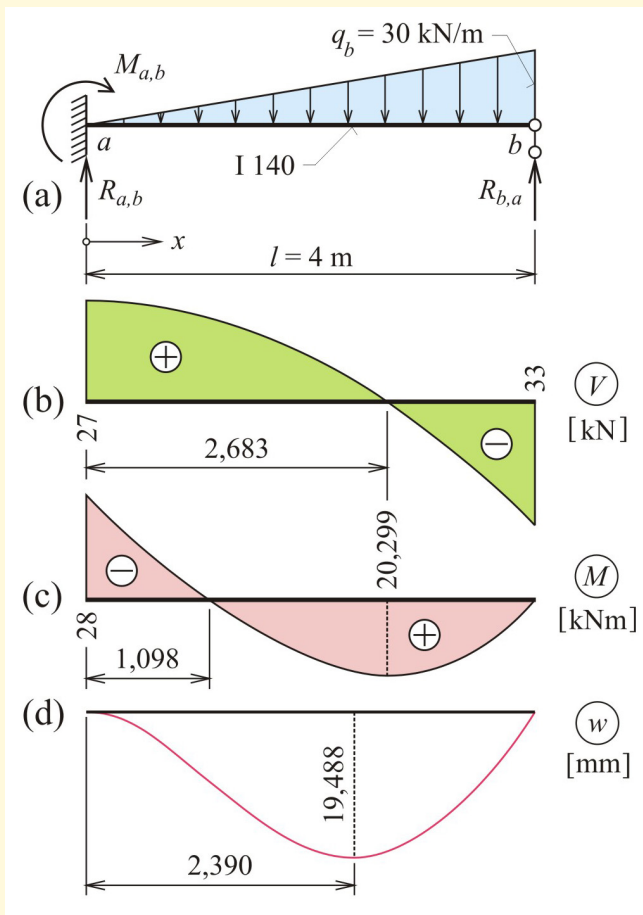
32. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.5 Zadání a řešení příkladu 3.6

Obsah

33. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Reakce ve vnějších vazbách:

Veškeré reakce ve vnějších vazbách se určí z rovnic vnitřních sil po dosazení souřadnic krajních bodů:

$$R_{a,b} = V_z(0) = 27 \text{ [kN]}, \quad R_{b,a} = -V_z(4) = 33 \text{ [kN]}, \quad M_{a,b} = M_y(0) = -28 \text{ [kNm]}.$$

Pomocí silové a momentové podmínky rovnováhy lze snadno ověřit, že dosažené výsledky odpovídají přesnému řešení (podle předpokladu v poznámce 3.7).

Příklad 3.8. Jednoduchý prostě podepřený nosník konstantního průřezu podle obrázku 3.6 je zatížen spojitým rovnoměrným zatížením. Přibližným způsobem podle Lagrangeova variačního principu užitím aproximace průhybové funkce jednou sinusovou půlvlnou určete:

- obecně tvar elastické (ohybové) čáry $w = w(x)$,
- průběh ohybových momentů $M = M_y(x)$,
- určete přesnost (chybu) výpočtu pro hodnoty v polovině nosníku u obou funkcí w, M .

Vstupní údaje

- Počátek lokálních os x a z je v podpoře a , kladný smysl osy x směřuje k podpoře b a kladný smysl osy z směřuje dolů.
- Průhyb v polovině rozpětí : $w(l/2) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_y}$ [mm].
- Ohybový moment v polovině rozpětí : $M_y(l/2) = \frac{1}{8} ql^2$ [kNm].



Obsah

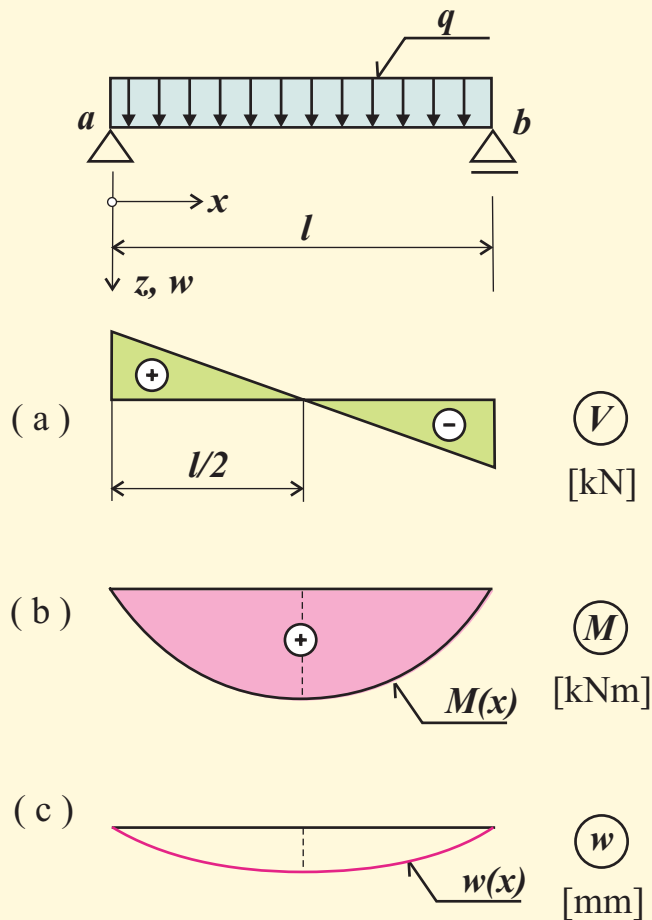
34. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.6 Zadání a řešení příkladu 3.8



Obsah

35. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Volba aproximačního polynomu:

Skutečný průběh ohybové čáry je dán polynomem 4. stupně, takže podle předchozího příkladu 3.7 je možno získat přesné řešení. V tomto příkladě v souladu se zadáním je průhybová funkce aproximována funkcí goniometrickou, takže získáme přibližné řešení. Je zvolen jeden člen řady podle vzorce (3.2) :

$$w = w(x) = \sum_{i=1}^n a_i w_i = a_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Tato aproximace splňuje okrajové deformační podmínky nulového průhybu nad podporami:

1. $w(0) = 0 \Rightarrow a_1 \cdot \sin 0 = 0$,
2. $w(l) = 0 \Rightarrow a_1 \cdot \sin \pi = 0$.

Pro další výpočty budeme potřebovat druhou derivaci aproximační funkce ohybové čáry:

$$w'' = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Potenciální energie vnějších sil (od rovnoměrného zatížení):

$$H_e = - \int_0^l q w(x) dx = -q a_1 \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = -q a_1 \left[-\frac{l}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \right]_0^l = -\frac{2ql}{\pi} a_1$$



Obsah

36. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y w''^2 dx = \frac{1}{2} EI_y \int_0^l \left(-a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{4} \frac{EI_y}{l^3} a_1^2$$

Celková potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e$$

Z podmínky minima tohoto funkcionálu získáme rovnici:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta a_1} = 0 \Rightarrow -\frac{2}{\pi} ql + \frac{\pi^4}{4} \frac{EI_y}{l^3} 2a_1 = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme neznámý parametr a_1 :

$$a_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI_y} \doteq 0,01307 \frac{ql^4}{EI_y}.$$

Ohybová čára:

Dosazením vypočteného parametru a_1 do aproximační funkce $w(x) = a_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$ získáme přibližný tvar ohybové čáry:

$$w(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI_y} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$



Obsah

37. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Hodnota průhybu uprostřed rozpětí je rovna přímo parametru a_1 :

$$w(l/2) = a_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = a_1 \doteq 0,01307 \frac{ql^4}{EI_y}.$$

Srovnáním s přesnou hodnotou průhybu $w(l/2) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_y} \doteq 0,01302 \frac{ql^4}{EI_y}$ zjistíme, že chyba ve vypočteném průhybu uprostřed rozpětí je nepatrná (0,005%).

Průběh ohybových momentů:

Momentová funkce odvozená z druhé derivace aproximační funkce bude mít tvar:

$$M(x) = -EI_y w'' = -EI_y \left(-a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right) = \frac{4}{\pi^3} ql^2 \sin \frac{\pi x}{l} \doteq 0,129 ql^2 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Dosazením hodnoty $l/2$ za x dostaneme velikost maximálního ohybového momentu uprostřed rozpětí $M(l/2) \doteq 0,129 ql^2$. Srovnáním s přesnou hodnotou ohybového momentu $M_y(l/2) = \frac{1}{8} ql^2$ zjistíme, že chyba je 0,4%.



Obsah

38. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 4

Silový (Castiglianův) variační princip

4.1. Podrobný výklad silového variačního principu

Silový variační princip je *duálním obrazem* deformačního variačního principu (viz poznámka 2.3). Jednotlivé výpočetní kroky jsou však u silového variačního principu značně rozdílné, což je při řešení konkrétní nosné konstrukce způsobeno zejména odlišnými požadavky na variaci pole napětí (průběhu vnitřních sil) než na variaci pole deformací (elastických čar).

U konstrukcí staticky určitých je možno průběhy vnitřních sil stanovit na základě podmínek rovnováhy a není důvod používat variační výpočet. Použití Castiglianova variačního principu je proto u prutových soustav opodstatněné pouze u dvou typů úloh:

- výpočet staticky neurčitých veličin (u staticky neurčitých soustav),

[Obsah](#)[39. strana ze 59](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



b) výpočet posunů nebo pootočení v zadaných bodech řešené konstrukce.

Aproximace průběhů vnitřních sil

Aproximace průběhů vnitřních sil je prvním krokem výpočtu podle silového variačního principu. V případě obecně namáhaného přímého prutu v prostoru (umístěného v lokální souřadnicové soustavě podle obrázku 3.1) lze aproximovat funkcemi polynomů šest průběhů vnitřních sil:

(a) průběh normálových sil:

$$N = N(x) = N_0 + \sum_{i=1}^n a_i N_i, \quad (4.1)$$

(b) průběh ohybových momentů v hlavní rovině x, z :

$$M_y = M_y(x) = M_{y,0} + \sum_{i=1}^n a_i M_{y,i}, \quad (4.2)$$

(c) průběh ohybových momentů v hlavní rovině x, y :

$$M_z = M_z(x) = M_{z,0} + \sum_{i=1}^n a_i M_{z,i}, \quad (4.3)$$

(d) průběh posouvajících sil v hlavní rovině x, z :

$$V_z = V_z(x) = V_{z,0} + \sum_{i=1}^n a_i V_{z,i}, \quad (4.4)$$

Obsah

40. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

(e) průběh posouvajících sil v hlavní rovině x, y :

$$V_y = V_y(x) = V_{y,0} + \sum_{i=1}^n a_i V_{y,i}, \quad (4.5)$$

(f) průběh krouticích momentů:

$$T = T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^n a_i T_i. \quad (4.6)$$

Poznámka 4.1. Průběhy posouvajících sil V_z a V_y se při výpočtu uplatní pouze v případě, že uvažujeme vliv posouvajících sil na deformaci prutu. Jejich zavedení do variačního výpočtu je u silového principu podstatně jednodušší.

V rovnicích (4.1) až (4.6) jsou a_i parametry aproximačních funkcí a N_i až T_i ($i = 0, 1$ až n) jsou dílčí aproximační polynomy. Tyto polynomy jsou zvoleny tak, aby funkce (4.1) až (4.6) splňovaly podmínky rovnováhy vnitřních a vnějších sil v každém průřezu. Dílčí aproximační funkce s nulovým indexem $i = 0$ vyjadřuje průběh vnitřních sil od zadaného zatížení na zadané nebo zvolené základní *staticky určité* soustavě. Každá z dílčích aproximačních funkcí (pro $i > 0$) popisuje průběh vnitřních sil od jednotkové hodnoty jedné staticky neurčité veličiny na téže základní staticky určité soustavě. Parametr a_i vyjadřuje právě sledovanou staticky neurčitou veličinu. Počet parametrů n je v tomto případě roven stupni statické neurčitosti n_s řešeného nosníku. Popsaný význam aproximačních funkcí je názorně zobrazen na obrázku 4.1 u příčně zatíženého oboustranně vetknutého nosníku $n_s = 2$.

Poznámka 4.2. Pro výpočty složitějších případů zatížení a podepření je nutno připustit, že aproximační funkce (4.1) až (4.6) mohou být na řešeném prutu spojité jen po částech s odlišně definovanými funkčními předpisy.



Obsah

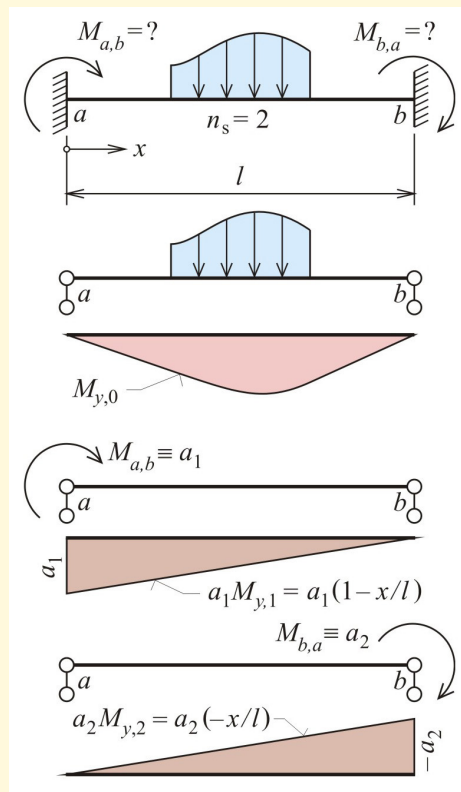
41. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 4.1 Aproximace při výpočtu staticky neurčitých veličin

Obsah

42. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Poznámka 4.3. U plošných a masivních prostorových konstrukcí není pojem „základní staticky určitá soustava“ k dispozici. Sestrojení aproximačních funkcí pole napětí je u nich zpravidla velmi obtížné, což je jeden z důvodů, proč se pro řešení plošných a prostorových konstrukcí používá silového principu jen zřídka. Naopak u prutových konstrukcí je přesné určení aproximačních funkcí poměrně snadné.

Silový potenciál vnějších sil

Silový potenciál ${}^s\Pi$ je stanoven pro nezatížený stav konstrukce, v němž je potenciální energie vnějších i vnitřních sil nulová. Reakce při nehybném podepření nekonaají práci a jejich potenciál je skutečně nulový. Variace silového potenciálu vnějších sil je proto

$$\delta {}^s\Pi_e = 0. \quad (4.7)$$

Zadané zatížení a ani jeho silový potenciál tedy není funkcí aproximačních parametrů.

Silový potenciál vnitřních sil

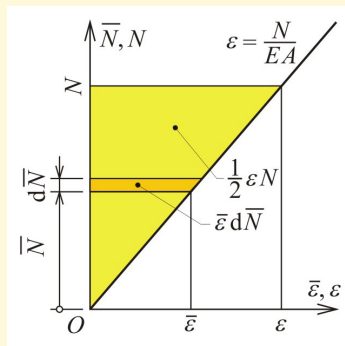
U osově namáhaného prutu s fyzikálně lineárním chováním materiálu je závislost mezi poměrným protažením ε a normálovou silou N dána Hookovým zákonem $\frac{du}{dx} = u' = \varepsilon = \frac{N}{EA}$ (viz obrázek 4.2). Mění-li se v silové variační úloze průběh vnitřních sil (zde tedy funkce $N = N(x)$) změnou aproximačních parametrů (tedy čistě matematickými prostředky bez ohledu na skutečný tvar elastické čáry), normálová síla N ve výpočtu vystupuje jako nezávisle proměnná veličina a energii (zápornou práci) připadající na elementární vrstvičku o tloušťce dx lze získat integrací:

[Obsah](#)

43. strana ze 59

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

$$\frac{d^s \Pi_i}{dx} = -\frac{dL_i}{dx} = \int_0^N \bar{\varepsilon} d\bar{N} = \frac{1}{EA} \int_0^N \bar{N} d\bar{N} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA}. \quad (4.8)$$



Obr. 4.2 Silový potenciál taženého prutu

Na obrázku 4.2 je tato energie vrstvičky taženého prutu znázorněna žlutě vybarveným trojúhelníkem o ploše $\frac{1}{2}\varepsilon N$.

Obdobně se v případě výpočtu energie postupuje i u ostatních vnitřních sil. Vzorec pro silový potenciál přímého prutu s fyzikálně lineárním chováním materiálu pro všechny vnitřní síly, jejichž průběhy jsou vyjádřeny aproximačními funkcemi s měnitelnými parametry, pak nabývá tvaru:

$${}^s \Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{V_z^2}{GA_z^*} + \frac{V_y^2}{GA_y^*} + \frac{T^2}{GI_t} \right) dx. \quad (4.9)$$



Obsah

44. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Výpočet extrémál

Celkový silový potenciál konstrukce je dán součtem ${}^s\Pi = {}^s\Pi_i + {}^s\Pi_e$. Podmínka pro stanovení minima tohoto funkcionálu je nulová hodnota jeho variace, tedy $\delta {}^s\Pi = \delta {}^s\Pi_i + \delta {}^s\Pi_e = 0$, čili

$$\delta {}^s\Pi_i = -\delta {}^s\Pi_e. \quad (4.10)$$

Podmínka bude splněna, budou-li variace obou potenciálů v rovnici (4.10) vyjádřeny pomocí parciálních derivací podle aproximačních parametrů. Potenciály jsou dány vztahy (4.9) a (4.7). Protože se však podle (4.7) hodnota $\delta {}^s\Pi_e$ rovná nule, a tedy i $\frac{\partial {}^s\Pi_e}{\partial a_k} = 0$, podmínky minima potenciálu taženého prutu nabývají tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^s\Pi_i}{\partial a_k} &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{EA} \cdot 2N \frac{\partial N}{\partial a_k} dx = \int_0^l \frac{1}{EA} \left(N_0 + \sum_{i=1}^n a_i N_i \right) N_k dx = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_0^l \frac{N_i N_k}{EA} dx + \int_0^l \frac{N_0 N_k}{EA} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Členy, které neobsahují neznámý parametr a_i , se mohou převést na pravou stranu, čímž vznikne soustava n rovnic ($k = 1, \dots, n$) pro výpočet parametrů a_i :

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^l \frac{N_i N_k}{EA} dx = - \int_0^l \frac{N_0 N_k}{EA} dx, \quad (4.12)$$

která se dá přehledně zapsat v maticovém tvaru:



Obsah

45. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Z} \rightarrow [c_{i,k}] \cdot \{a_i\} = \{Z_k\}, \quad (4.13)$$

kde \mathbf{c} představuje čtvercovou matici levých stran rovnic tzv. *matici poddajnosti*, \mathbf{a} sloupcový vektor aproximačních součinitelů a \mathbf{Z} sloupcový vektor pravých stran rovnic tzv. *zatěžovací vektor*.

Obdobně lze odvodit soustavy rovnic i pro ostatní průběhy vnitřních sil. Pro složky matice poddajnosti a zatěžovacího vektoru pak u jednotlivých průběhů platí vzorce:

(a) průběh normálové síly $N = N(x)$:

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{N_i N_k}{EA} dx, \quad Z_k = - \int_0^l \frac{N_{0,k}}{EA} dx, \quad (4.14)$$

(b) průběh ohybového momentu $M_y = M_y(x)$ v hlavní rovině x,z :

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{M_{y,i} M_{y,k}}{EI_y} dx, \quad Z_k = - \int_0^l \frac{M_{y,0,k}}{EI_y} dx, \quad (4.15)$$

(c) průběh ohybového momentu $M_z = M_z(x)$ v hlavní rovině x,y :

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{M_{z,i} M_{z,k}}{EI_z} dx, \quad Z_k = - \int_0^l \frac{M_{z,0,k}}{EI_z} dx, \quad (4.16)$$

(d) průběh posouvající síly $V_z = V_z(x)$ v hlavní rovině x,z :

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{V_{z,i} V_{z,k}}{GA_z^*} dx, \quad Z_k = - \int_0^l \frac{V_{z,0,k}}{GA_z^*} dx, \quad (4.17)$$



Obsah

46. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

(e) průběh posouvající síly $V_y = V_y(x)$ v hlavní rovině x, y :

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{V_{y,i} V_{y,k}}{GA_y^*} dx, \quad Z_k = - \int_0^l \frac{V_{y,0} V_{y,k}}{GA_y^*} dx, \quad (4.18)$$

(f) průběh kroutícího momentu $T = T(x)$:

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{T_i T_k}{GI_t} dx, \quad Z_k = - \int_0^l \frac{T_0 T_k}{GI_t} dx. \quad (4.19)$$

Po vyřešení kterékoliv z těchto soustav lze získat hodnoty parametrů a_i , tedy hodnoty staticky neurčitých veličin, s jejichž využitím lze sestrojít výsledné průběhy vnitřních sil, které představují extrémální silové variační úlohy. Použití silového variačního principu vede vždy k přesnému řešení, jelikož dílčí aproximační funkce jsou sestrojeny jako přesné průběhy vnitřních sil.

Poznámka 4.4. Při výpočtu staticky neurčitých veličin pomocí silového variačního principu se uplatňuje pouze silový potenciál vnitřních sil, neboť podle vztahu (4.7) je variace silového potenciálu vnějších sil nulová. U lineárně pružných konstrukcí se silový potenciál vnitřních sil (4.9) shoduje s pružnou potenciální energií vnitřních sil reálného zatěžovacího stavu a zároveň s absolutní hodnotou přetvárné práce vnitřních sil. Popsaný způsob řešení staticky neurčitých veličin bývá proto v literatuře nazýván **Castiglianovým principem minima přetvárné práce vnitřních sil** a je formulován:

Definice 4.5. Staticky neurčité veličiny nabudou právě takových hodnot, při nichž je přetvárná práce vnitřních sil minimální.



Obsah

47. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

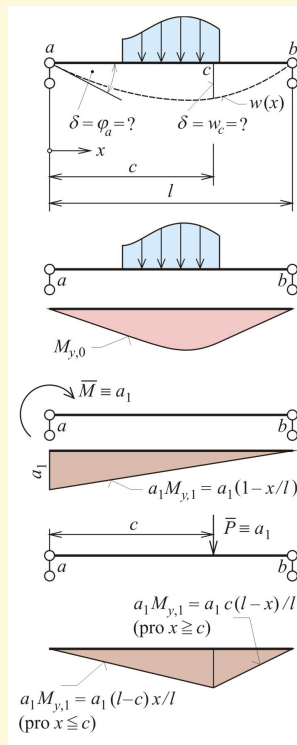
Celá obrazovka/Okno

Deformace prutu

Pokud je již průběh vnitřních sil znám (u prutu staticky určitého nebo neurčitého), elastickou čáru lze odvodit např. integrací příslušné diferenciální rovnice (3.20) až (3.25). V praktických úlohách je však nejčastějším požadavkem pouze výpočet deformace δ (posun nebo pootočení) v konkrétním bodě konstrukce, k čemuž lze s výhodou využít přímo silový variační princip.

V případě takového výpočtu se u aproximačních průběhů vnitřních sil ve vztazích (4.1) až (4.6) každého prutu použije pouze jediný aproximační parametr a_1 (n je pouze rovno 1). Dílčí aproximační funkce s nulovým indexem $i = 0$ pak vyjadřuje průběh vnitřních sil od zadaného zatížení na zadaném staticky určitém nosníku nebo průběh vnitřních sil vyřešeného staticky neurčitého nosníku. Dílčí aproximační funkce s indexem $i = 1$ vyjadřuje průběh vnitřních sil od jednotkové hodnoty vnější síly $\bar{P} \equiv a_1$, působící v místě a ve směru hledaného posunu, nebo od jednotkové hodnoty vnějšího momentu $\bar{M} \equiv a_1$, který působí v průřezu a v rovině hledaného pootočení. Síla \bar{P} a moment \bar{M} představují variaci daného zatížení a jejich průběh se zjišťuje buď na zadaném staticky určitém nosníku nebo na libovolné staticky určité soustavě, která byla použita pro řešení daného původně staticky neurčitého nosníku. Popsaný význam aproximačních funkcí je názorně ukázán na obrázku 4.3 s příklady výpočtu pootočení a posunu v zadaných průřezech příčně zatíženého prostého nosníku.

Jelikož síla \bar{P} , resp. moment \bar{M} , působí na již zdeformované



Obr. 4.3 Aproximace při výpočtu posunů a pootočení



Obsah

48. strana ze 59

◀ ◁ ▷ ▶

◀ ▶

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

konstrukci, vykonává práci na hledaném posunu δ , resp. na pootočení δ . Do silového potenciálu vnějších sil je pak nutno zahrnout i účinek $-a_1\delta$, takže parciální derivace silového potenciálu již není nulová, nýbrž rovna:

$$\frac{\partial^s \Pi_e}{\partial a_1} = -\delta. \quad (4.20)$$

Pro silový potenciál vnitřních sil však vztah (4.8) zůstává i nadále v platnosti. Podmínka (4.10) se pomocí parciálních derivací podle parametru a_1 zapíše ve tvaru $\frac{\partial^s \Pi_i}{\partial a_1} = -\frac{\partial^s \Pi_e}{\partial a_1} = +\delta$. Po úpravě a označení $a_1 \equiv \bar{P}$ nebo $a_1 \equiv \bar{M}$ lze získat:

$$\delta = \frac{\partial^s \Pi_i}{\partial \bar{P}} \quad (4.21)$$

nebo

$$\delta = \frac{\partial^s \Pi_i}{\partial \bar{M}}. \quad (4.22)$$

Rovnicemi (4.21) a (4.22) je vyjádřena tzv. **Castiglianova věta**:

Definice 4.6. Deformace (tj. posun nebo pootočení) v zadaném bodě prutu, vystaveného silovému zatěžovacímu stavu, je rovna parciální derivaci silového potenciálu vnitřních sil podle síly \bar{P} , účelově zadané v místě a ve směru hledaného posunu, nebo podle momentu \bar{M} , účelově zadaného v místě a v rovině hledaného pootočení.

Castiglianovu větu danou vztahy (4.21) a (4.22) lze z praktických důvodů upravit na bezprostředně použitelný tvar. Např. pro průběh normálových sil a pro $\bar{P} \equiv a_1$ ($n = 1$) pak vychází:



Obsah

49. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$\delta = \frac{\partial^s \Pi_i}{\partial a_1} = \int_0^l \frac{1}{EA} (N_0 + a_1 N_1) N_1 dx = a_1 \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA} dx. \quad (4.23)$$

Účelově zvolená síla $\bar{P} \equiv a_1$ na vyšetřovaný prut ve skutečnosti nepůsobí (byly použity pouze pro odvození variace zatížení), proto lze položit ve vzorci (4.24) parametr $a_1 = 0$, což vyplývá přímo z podstaty variačního principu: po splnění podmínky minima silového potenciálu (4.8) se aproximační funkce musí ztotožnit s reálným stavem. Obdobně se mohou získat vztahy i pro ostatní průběhy vnitřních sil:

(a) normálová síla N :

$$\delta = \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA} dx, \quad (4.24)$$

(b) ohybový moment M_y v hlavní rovině x, z :

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{y,0} M_{y,1}}{EI_y} dx, \quad (4.25)$$

(c) ohybový moment M_z v hlavní rovině x, y :

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{z,0} M_{z,1}}{EI_z} dx, \quad (4.26)$$

(d) posouvající síla V_z v hlavní rovině x, z :

$$\delta = \int_0^l \frac{V_{z,0} V_{z,1}}{EA_z^*} dx, \quad (4.27)$$



Obsah

50. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

(e) posouvající síla V_y v hlavní rovině x, y :

$$\delta = \int_0^l \frac{V_{y,0} V_{y,1}}{EA_y^*} dx, \quad (4.28)$$

(f) kroutící moment T :

$$\delta = \int_0^l \frac{T_0 T_1}{GI_t} dx. \quad (4.29)$$

Poznámka 4.7. Kladná hodnota deformace δ , vypočtená podle vzorců (4.24) až (4.29), znamená, že smysl deformace se shoduje se zvoleným smyslem parametru a_1 , tj. síly \bar{P} nebo momentu \bar{M} .

Poznámka 4.8. Vzhledem k omezenému rozsahu přednášky se další výklad nezabývá výpočtem zatěžovacího stavu zadaných popuštění podpor nebo oteplením konstrukce.

4.2. Jednoduché příklady použití

Příklad 4.9. U železobetonového pilíře z příkladu 3.4 a obrázku 3.4 s pomocí silového variačního principu vypočtete:

- staticky neurčitou reakci $R_{b,a}$,
- průběh normálových sil N a reakci $R_{a,b}$,
- místo a velikost maximálního osového posunu.



Obsah

51. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Přípravný výpočet

Přípravný výpočet je již proveden u příkladu 3.4.

Aproximační polynom

Osově namáhaná konstrukce je 1x staticky neurčitá ($n_s = n = 1$). Základní staticky určitou soustavu lze vytvořit odebráním vazby proti svislému posunutí v bodě dolního podepření b . V nultém ($i = 0$) zatěžovacím stavu (viz obrázek 4.4) na základní soustavu působí vlastní tíha n_x . Normálová síla N_0 se v obecném průřezu x rovná tíze části prutu pod průřezem:

$$\begin{aligned} N_0 = N_0(x) &= \frac{A(x) + A_b}{2}(l - x) \cdot \gamma = \frac{1,6 - 0,2x + 0,8}{2}(4 - x) \cdot 24 = \\ &= 115,2 - 38,4x + 2,4x^2 \text{ [kN]}. \end{aligned}$$

Normálová síla v prvním ($i = 1$) zatěžovacím stavu (viz obrázek 4.4) je konstantní po celé délce prutu a rovná se $-R_{b,a} = a_1(-1)$, takže dílčí aproximační funkce $N_1 = N_1(x) = -1$.

Složka matice poddajnosti:

Podle vzorce (4.14) je jediný prvek matice poddajnosti:

$$c_{1,1} = \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{1}{E} \int_0^4 \frac{1}{1,6 - 0,2x} dx = \frac{1}{E} \cdot 3,46574 \text{ [m/kN]}.$$



Obsah

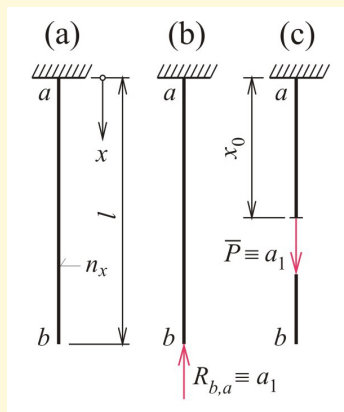
52. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 4.4 K řešení příkladu 4.9

Složka zatěžovacího vektoru:

Podle vzorce (4.14) je jediný prvek zatěžovacího vektoru:

$$Z_1 = - \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA} dx = + \frac{1}{E} \int_0^4 \frac{115,2 - 38,4x + 2,4x^2}{1,6 - 0,2x} dx = \frac{1}{E} \cdot 154,916 \text{ [m]}.$$

Rovnice a její kořen:

Z rovnice o jedné neznámé $c_{1,1} a_1 = Z_1$ se po vykrácení modulu pružnosti E určí:

$$a_1 = R_{b,a} = \frac{154,916}{3,46574} = 44,699 \text{ [kN]}.$$



Obsah

53. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Průběh normálových sil a reakce $R_{a,b}$:

Superpozicí nultého a prvního stavu se určí rovnice průběhu normálové síly:

$$N = N(x) = N_0 + a_1 N_1 = 115,2 - 38,4x + 2,4x^2 - 44,699 = 70,501 - 38,4x + 2,4x^2 \text{ [kN]}.$$

Dosazením hodnoty $x = 0$ pak z této rovnice vychází $R_{a,b} = N_0 = 70,501 \text{ [kN]}$.

Místo a velikost maximálního osového posunu:

Řešením kvadratické rovnice $N(x) = 0$ lze určit reálný kořen $x_0 = 2,116 \text{ [kN]}$, který představuje průřez s nulovou hodnotou normálové síly N . V tomto průřezu vzniká největší posun v ose prutu u_{max} . K výpočtu této deformace lze použít Castiglianovu větu danou vzorcem (4.24). Průběh N_0 v tomto případě představuje průběh normálové síly získaný výpočtem dané staticky neurčité konstrukce, tedy:

$$N(0) = N = 70,501 - 38,4x + 2,4x^2.$$

Pro zjištění průběhu N_1 je nutno vytvořit zatěžovací stav podle obrázku 4.4(c) s tím, že v místě hledaného posunutí bude působit pouze síla $\bar{P} \equiv a_1$. V horní části tak vznikne normálová síla $\bar{P} = a_1 \cdot 1$, tedy $N_1 = 1$. V dolní části pak bude normálová síla nulová. Výsledná deformace se vypočte:

$$\begin{aligned} \delta = u_{max} &= \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA} dx = \frac{1}{E} \int_0^{2,116} \frac{70,501 - 38,4x + 2,4x^2}{1,6 - 0,2x} dx = \\ &= \frac{1}{E} \cdot 48,629 = 2,431 \cdot 10^{-6} \text{ [m]}. \end{aligned}$$



Obsah

54. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Poznámka 4.10. Výsledky získané silovým variačním principem jsou přesné. V případě reakcí se o tom lze přesvědčit např. v tabulce poznámky 3.5.

Příklad 4.11. Oboustranně vetknutý staticky neurčitý nosník podle obrázku 4.5 stálého průřezu $EI_y = konst.$ je zatížen spojitým trojúhelníkovým zatížením. Pomocí silového variačního principu odvoďte obecně:

- vzorce pro staticky neurčité momentové složky reakcí ve vetknutí $M_{a,b}$ a $M_{b,a}$,
- průběhy vnitřních sil $V = V_z$ a $M = M_y$,
- silové složky reakcí ve vetknutí $R_{a,b}$ a $R_{b,a}$.

Při výpočtu zanedbejte vliv posouvajících sil na deformaci nosníku.

Aproximační polynom

Ohýbaná konstrukce je dvakrát staticky neurčitá ($n = 2$). Základní staticky určitou soustavu v podobě prostého nosníku lze vytvořit odebráním obou vazeb proti pootočení v bodech a i b . V nultém ($i = 0$) zatěžovacím stavu (viz obrázek 4.1) vyjadřuje dílčí aproximační funkce $M_{y,0}$ průběh ohybových momentů na prostém nosníku od zadaného zatížení:

$$M_{y,0} = \frac{1}{6}q_b l x - \frac{1}{2}q_b \frac{x}{l} \frac{x}{3} = \frac{q_b l^2}{6} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Další dvě dílčí aproximační funkce jsou znázorněny na obrázku 4.1, odkud lze převzít:

$$M_{y,1} = 1 - \frac{x}{l}, \quad M_{y,2} = -\frac{x}{l}.$$



Obsah

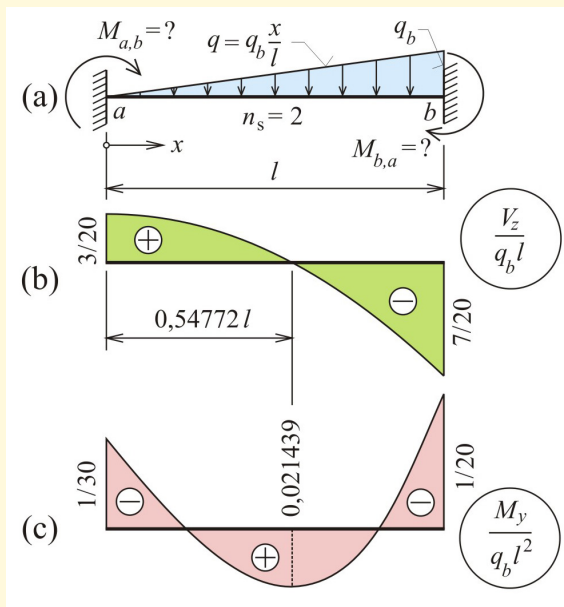
55. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 4.5 Zadání a řešení příkladu 4.11

Složky matice poddajnosti:

Čtyři členy matice poddajnosti lze získat s použitím vzorce (4.15):

$$c_{1,1} = \int_0^l \frac{M_{y,1}^2}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{EI_y} \frac{l}{3},$$

Obsah

56. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$c_{2,2} = \int_0^l \frac{M_{y,2}^2}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^l \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{EI_y} \frac{l}{3},$$

$$c_{1,2} = c_{2,1} = \int_0^l \frac{M_{y,1}M_{y,2}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(-\frac{x}{l}\right) dx = -\frac{1}{EI_y} \frac{l}{6}.$$

Složky zatěžovacího vektoru:

Oba členy zatěžovacího vektoru se získají s použitím vzorce (4.15):

$$Z_1 = - \int_0^l \frac{M_{y,0}M_{y,1}}{EI_y} dx = - \frac{1}{EI_y} \frac{q_b l^2}{6} \int_0^l \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = - \frac{1}{EI_y} \frac{7}{360} q_b l^3,$$

$$Z_2 = - \int_0^l \frac{M_{y,0}M_{y,2}}{EI_y} dx = - \frac{1}{EI_y} \frac{q_b l^2}{6} \int_0^l \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) \left(-\frac{x}{l}\right) dx = + \frac{1}{EI_y} \frac{1}{45} q_b l^3.$$

Soustava rovnic a její kořeny:

Soustava rovnic (4.13) po vykrácení ohybovou tuhostí EI_y nabývá tvaru:

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3} & -\frac{l}{6} \\ -\frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{7}{360} q_b l^3 \\ +\frac{1}{45} q_b l^3 \end{Bmatrix}.$$

Vyřešením soustavy rovnic lze získat kořeny: $a_1 = M_{a,b} = -\frac{1}{30} q_b l^2$ [kNm] a $a_2 = M_{b,a} = +\frac{1}{20} q_b l^2$ [kNm].



Obsah

57. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Průběhy ohybových momentů a posouvajících sil:

Průběh ohybového momentu M_y v hlavní rovině x, z lze získat rozepsáním aproximačního polynomu (4.2):

$$\begin{aligned} M_y &= M_{y,0} + a_1 M_{y,1} + a_2 M_{y,2} = \\ &= \frac{q_b l^2}{6} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) - \frac{1}{30} q_b l^2 \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{20} q_b l^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{60} q_b l^2 \left(-2 + 9 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} \right). \end{aligned}$$

Tento průběh je extrémou řešení variační úlohy a je znázorněn na obrázku 4.5(c). Průběh posouvající síly V_z v hlavní rovině x, z se určí pomocí derivace průběhu ohybových momentů:

$$V_z = \frac{dM_y}{dx} = \frac{1}{60} q_b l^2 \left(\frac{9}{l} - \frac{30x^2}{l^3} \right) = \frac{1}{20} q_b l \left(3 - 10 \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Průběh je znázorněn na obrázku 4.5(b).

Svislé složky reakcí:

Svislé složky reakcí lze stanovit z koncových hodnot posouvajících sil:

$$R_{a,b} = V_z(0) = \frac{3}{20} q_b l, \quad R_{b,a} = -V_z(l) = \frac{7}{20} q_b l.$$



Obsah

58. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Literatura

- [1] Benda, J. *Energetické principy a variační metody ve stavební mechanice*. 1. vydání. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2005. 103 s. Skriptum.
- [2] Krejsa, M. – Lausová, L. *Variační metody ve stavební mechanice*. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2010. 36 s. Učební texty a interaktivní materiály.
- [3] Šmírák, S. – Hlavinková, B. *Pružnost a plasticita I, příklady*. CERM Brno, 1999. 217 s. Skriptum.
- [4] Teplý, B. – Šmírák, S. *Pružnost a plasticita II*. CERM Brno, 1993. 199 s. Skriptum.
- [5] Servít, R. – Crha, M. – Doležalová, E. *Teorie pružnosti a plasticity, I.díl*. ČVUT v Praze, 1977. 386 s. Skriptum.

Obsah

59. strana ze 59



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno