

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky



10

Využití principu
virtuálních prací
pro řešení stability prutů



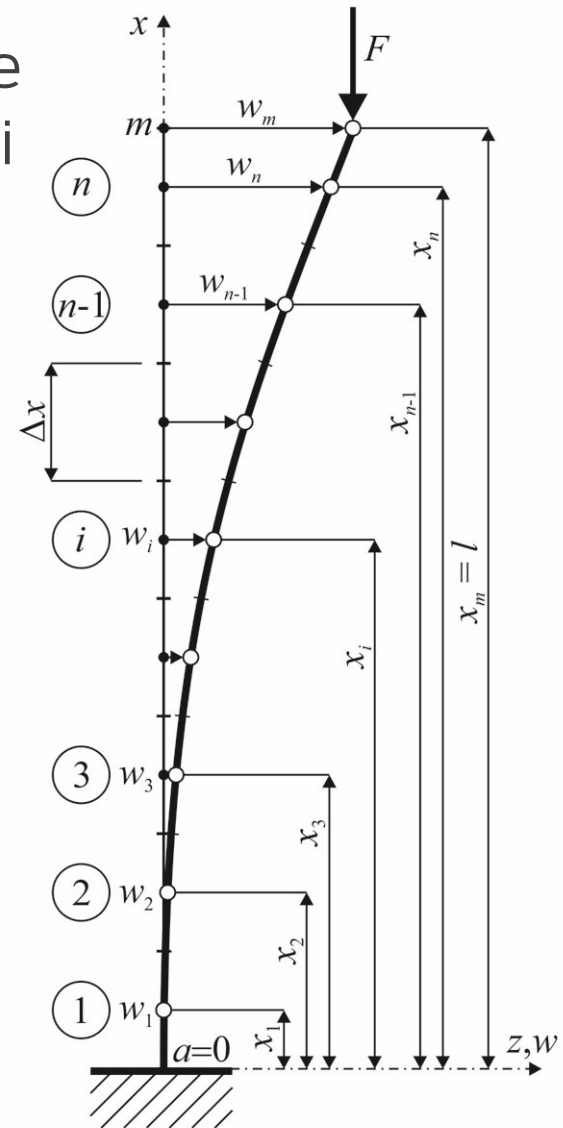
Teoretické pozadí výpočtu

Posunutí obecného bodu i kolmo k ose prutu lze při výpočtu vzpěrné únosnosti tlačенých prutů určit pro $EI_{\min} = \text{konst.}$ s využitím principu virtuálních prací podle vztahu:

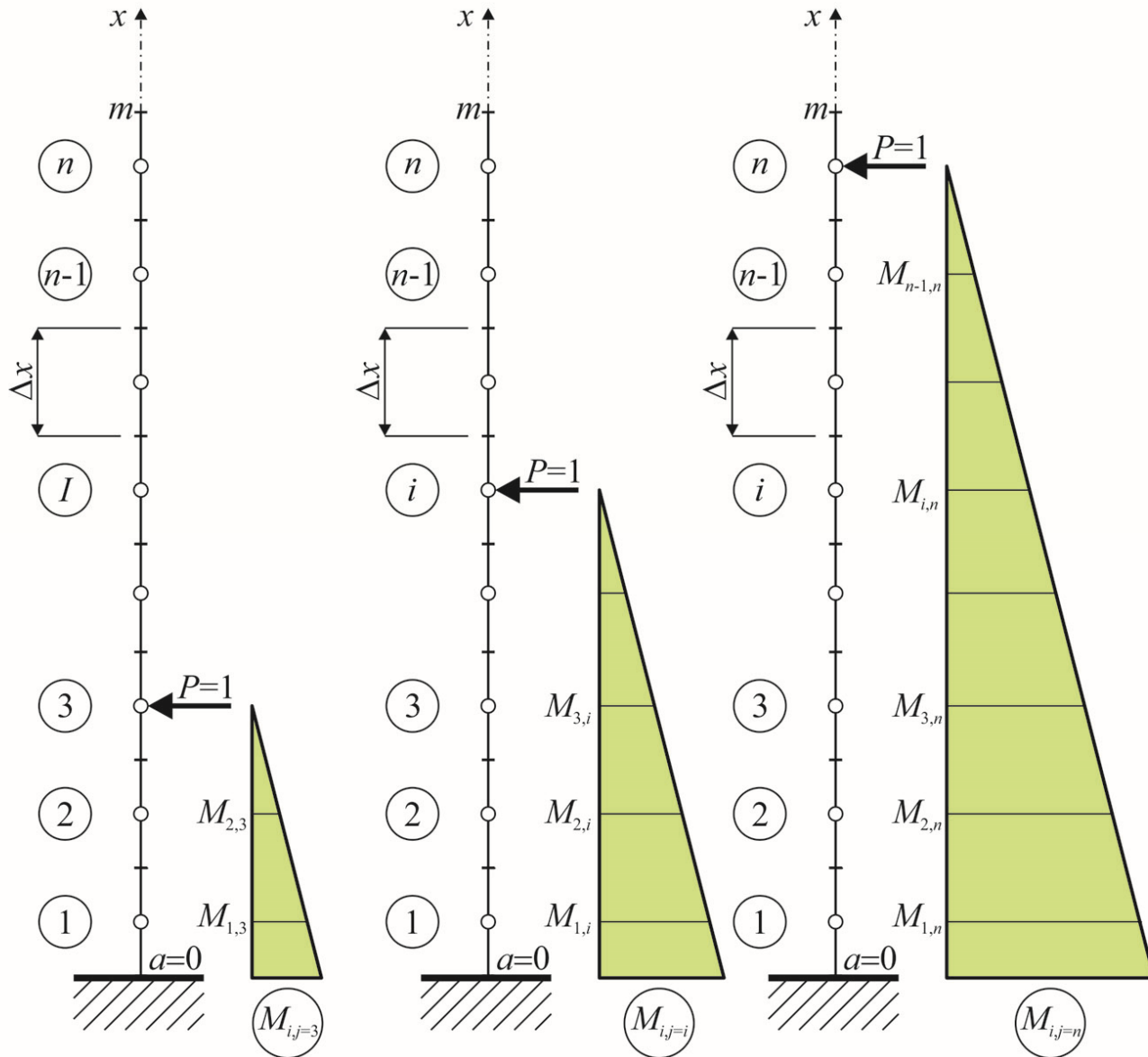
$$w_i = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}}{E \cdot I_{\min}} dx = \frac{1}{E \cdot I_{\min}} \cdot \int_0^l M_F \cdot \bar{M} dx =$$

$$= \frac{\Delta x}{E \cdot I_{\min}} \cdot \sum_{i=1}^n (M_{Fi} \cdot M_{i,j})$$

kde n je počet diferencí o délce $\Delta x = l/n$, M_F je ohybový moment od skutečného zatížení na zdeformovaném prutu, \bar{M} je ohybový moment od jednotkového virtuálního zatížení a $M_{i,j}$ je ohybový moment v bodě i od jednotkové virtuální síly v bodě j .



Výpočet ohybového momentu $M_{i,j}$

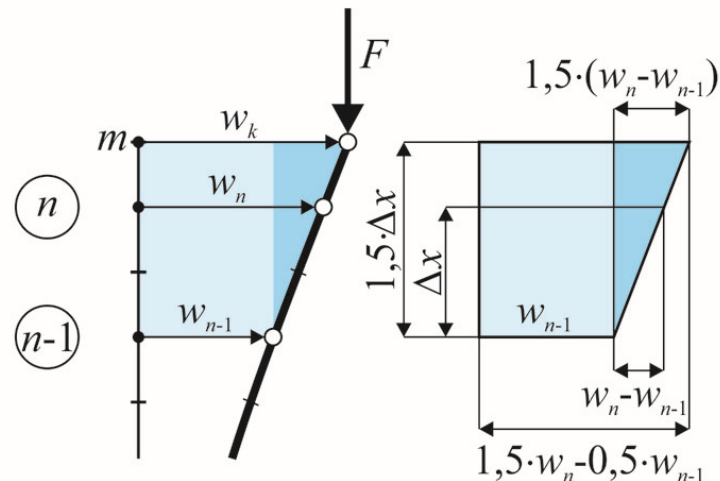


Teoretické pozadí výpočtu

- Znalost posunutí w_i umožňuje určit ohybový moment M_{F_i}
- Výpočet probíhá iteračně - v 1. iteračním cyklu je nutno vyvolat počáteční impulz a vhodně zvolit w_i
- V dalších iteračních krocích se bude w_i zpřesňovat
- Výsledná tlaková síla F tzv. kritického břemene je pak dána vzorcem:

$$F^k = F^{k-1} \cdot \frac{w_m^{k-1}}{w_m^k}$$

kde k je číslo iteračního cyklu a w_m maximální posunutí v příčném směru - např. na volném okraji:



$$\frac{w_n - w_{n-1}}{\Delta x} = \frac{1.5 \cdot (w_n - w_{n-1})}{1.5 \cdot \Delta x} \rightarrow w_m = 1.5 \cdot (w_n - w_{n-1}) + w_{n-1} = 1.5 \cdot w_n - 0.5 \cdot w_{n-1}$$

Teoretické pozadí výpočtu

- Iterační výpočet se ukončí po dosažení předepsané tolerance nepřesnosti ε na základě ukončovací podmínky:

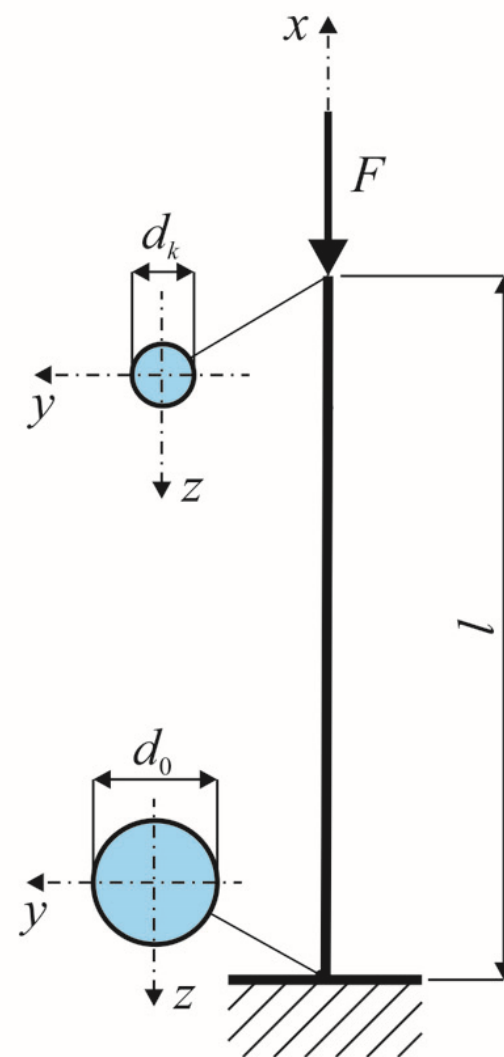
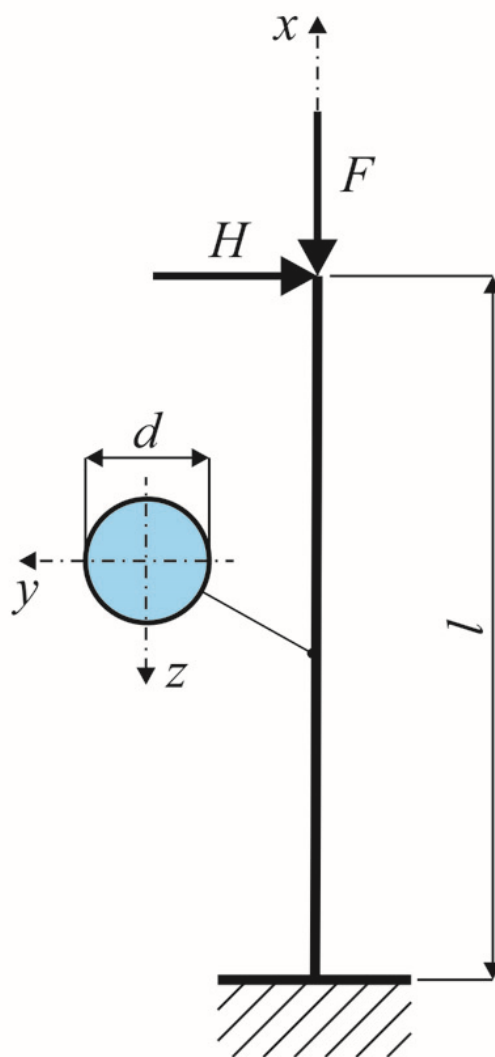
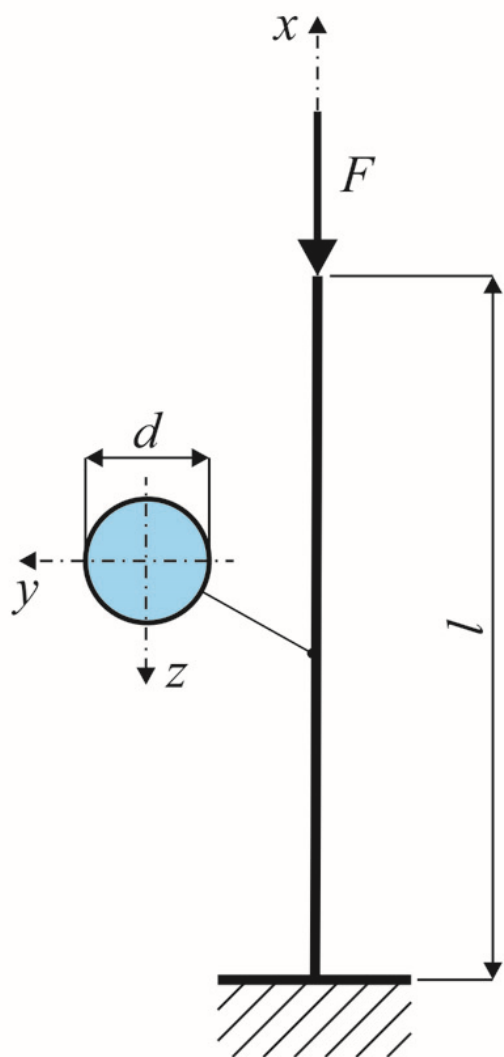
$$|F^k - F^{k-1}| \leq \varepsilon$$

- Výpočet lze provést také u tlačných prutů s proměnlivou hodnotou ohybové tuhosti $EI_{\min} \cong (EI_{\min})_i \neq \text{konst.}$ pomocí následujícího vztahu:

$$w_i = \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}}{(E \cdot I_{\min})_i} dx = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n \frac{M_F \cdot \bar{M}}{(E \cdot I_{\min})_i}$$

- Stabilita štíhlého tlačného prutu může být ovlivněna kromě osové síly také příčným silovým zatížením, excentricitou působení osové síly nebo imperfekcemi, což lze do výpočtu zahrnout prostřednictvím M_F .

Příklady na procvičení



Jednostranně vetknutý sloup

Výpočet posunutí w_i pro $EI_{\min} = \text{konst.}$ lze provést maticovou operací:

$$\{w\} = \frac{\Delta x}{E \cdot I_{\min}} \cdot [\bar{M}] \cdot \{M_F\}$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{Bmatrix} = \frac{\Delta x}{E \cdot I_{\min}} \cdot \begin{bmatrix} \bar{M}_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{M}_{2,1} & \bar{M}_{2,2} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \bar{M}_{j,1} & \bar{M}_{j,2} & \dots & \bar{M}_{j,j} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{M}_{n-1,1} & \bar{M}_{n-1,2} & \dots & \bar{M}_{n-1,j} & \dots & \bar{M}_{n-1,n-1} & 0 \\ \bar{M}_{n,1} & \bar{M}_{n,2} & \dots & \bar{M}_{n,j} & \dots & \bar{M}_{n,n-1} & \bar{M}_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{F_1} \\ M_{F_2} \\ \vdots \\ M_{F_j} \\ \vdots \\ M_{F_{n-1}} \\ M_{F_n} \end{Bmatrix}$$

Jednostranně vetknutý sloup

Výpočet posunutí w_i pro $EI_{\min} \cong (EI_{\min})_i \neq \text{konst.}$ lze provést maticovou operací:

$$\{w\} = \Delta x \cdot [\bar{M}] \cdot \left\{ \frac{M_F}{E \cdot I_{\min}} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{Bmatrix} = \Delta x \cdot \begin{bmatrix} \bar{M}_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{M}_{2,1} & \bar{M}_{2,2} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{M}_{j,1} & \bar{M}_{j,2} & \dots & \bar{M}_{j,j} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{M}_{n-1,1} & \bar{M}_{n-1,2} & \dots & \bar{M}_{n-1,j} & \dots & \bar{M}_{n-1,n-1} & 0 \\ \bar{M}_{n,1} & \bar{M}_{n,2} & \dots & \bar{M}_{n,j} & \dots & \bar{M}_{n,n-1} & \bar{M}_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{M_{F_1}}{(E \cdot I_{\min})_1} \\ \frac{M_{F_2}}{(E \cdot I_{\min})_2} \\ \vdots \\ \frac{M_{F_j}}{(E \cdot I_{\min})_j} \\ \vdots \\ \frac{M_{F_{n-1}}}{(E \cdot I_{\min})_{n-1}} \\ \frac{M_{F_n}}{(E \cdot I_{\min})_n} \end{Bmatrix}$$

Stabilita prutu s jiným podepřením

Výpočet je identický jako u předchozích příkladů, rozdíl je pouze ve výpočtu momentů \bar{M} a $M_{i,j}$, které musí respektovat vazby prutu v podporách.

V úvahu přichází:

- oboustranné vetknutí prutu,
- oboustranné kloubové uložení prutu s jednou posuvnou vazbou,
- jednostranné vetknutí prutu s druhou posuvnou kloubovou vazbou,
- další vazby prutu.

Příklady na procvičení

