

# Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.  
Katedra stavební mechaniky



# 9

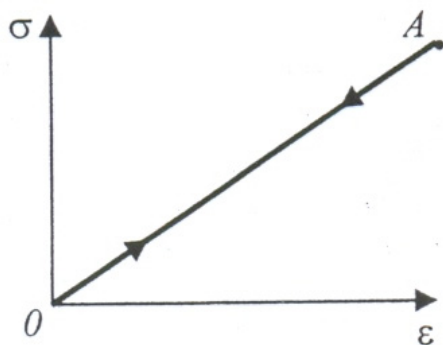
Nelineární chování  
materiálů,  
podmínky plasticity,  
mezní plastická únosnost

# Úvod, základní pojmy

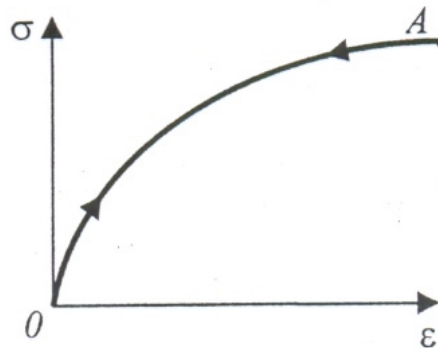
- Teorie plasticity se zabývá studiem stavu napjatosti a deformace těles, které se zcela nebo z části nacházejí v plastickém stavu.
- Plastický stav je charakterizován vznikem nepružných (nevratných deformací).
- Některé látky se chovají pružně téměř až do porušení, nevznikají v nich při zatěžování trvalé deformace a porušují se při zatěžování náhle, bez předchozího vzniku trvalých deformací (např. železniční kolejnice). Tato vlastnost je např. u oceli velmi závislá na chemickém složení, ale také na stavových podmínkách (teplota).
- Velká část látek se ale plasticky přetváří - např. kovy a zeminy.

# Úvod, základní pojmy

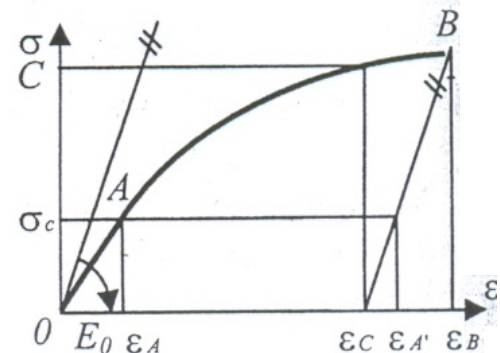
- **Pružnost tělesa** - vlastnost spojitého tělesa deformovat se působením vnějšího zatížení (síly, změna teploty atd.) a po odeznění těchto zatížení nabýt opět původní tvar - obr. **a)**, **b)**.
- Vztah mezi napětím a deformací může být přitom lineární - obr. **a)**, nebo nelineární - obr. **b)**.
- **Plasticita tělesa** - vlastnost spojitého tělesa deformovat se působením vnějšího zatížení (síly, změna teploty atd.) a po odeznění těchto zatížení nenabýt původní tvar - obr. **c)**.



a)



b)



c)

# Úvod, základní pojmy

Plastické chování tělesa je podstatně složitější, než chování pružné.

Jedné hodnotě napětí  $\sigma_A$  odpovídají na obr. dvě různé hodnoty deformace  $\varepsilon_A$  a  $\varepsilon_{A'}$ . Jedné hodnotě deformace  $\varepsilon_C$  pak dvě hodnoty napětí, a to  $\sigma_C$  a  $0$ .

Platí:  $\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}$  pro  $\varepsilon > \varepsilon_A$

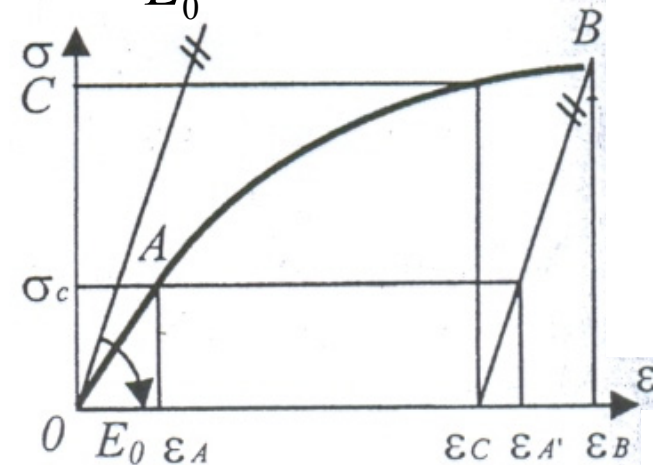
Pro pružnou deformaci:  $\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E_0}$   $E_0 \dots$  počáteční modul pružnosti

Pro plastickou deformaci:  $\varepsilon_{pl} = \varepsilon - \varepsilon_{el} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_0}$

**Při odlehčení:**

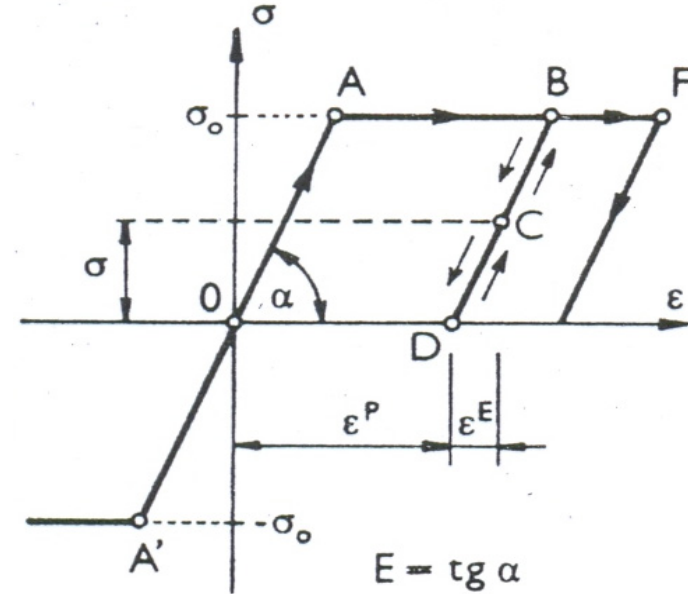
Deformace  $\varepsilon' = \varepsilon_B - \varepsilon = \varepsilon_B - \frac{\sigma_B - \sigma}{E}$

Napětí  $\sigma = \sigma_B - E \cdot (\varepsilon_B - \varepsilon')$



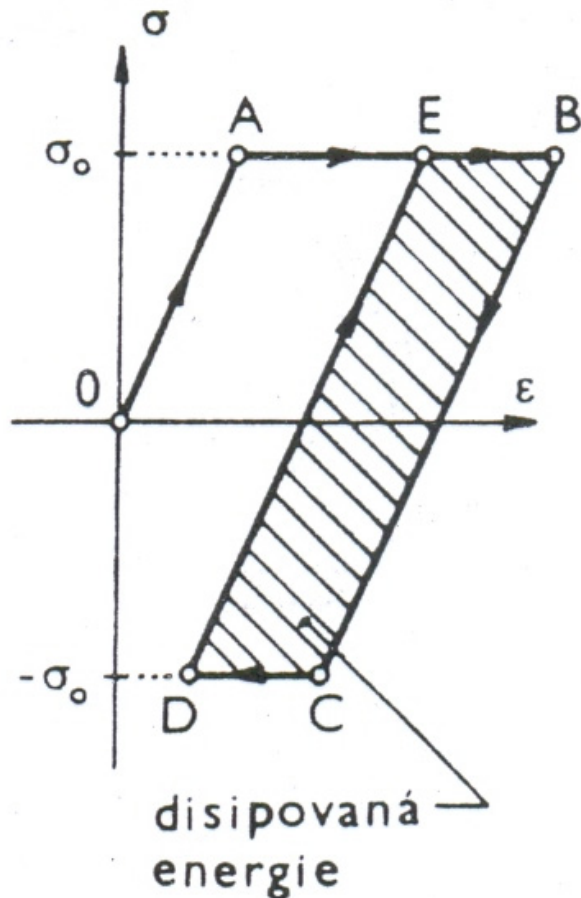
# Ideální pružně-plastický materiál

- Ve výchozím stavu se předpokládá materiál bez napětí. Při zatěžování se materiál chová podle **Hookova zákona** (je v pružném stavu) až do dosažení mezní hodnoty napětí  $\sigma_0$ . Pro  $\sigma < \sigma_0$  platí  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ .



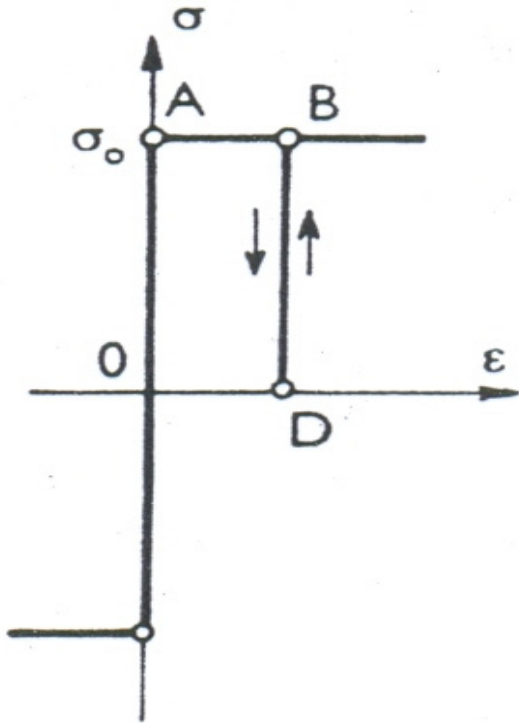
- Po dosažení napětí  $|\sigma| = \sigma_0$  je materiál v plastickém stavu. Mohou vznikat libovolné přírůstky plastických deformací, musí mít ovšem ovšem stejný smysl jako působící napětí.
- Odlehčení probíhá pružně, při  $\sigma < \sigma_0$  platí  $\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon_{el}$
- V obecném případě (bod C) je protažení tvořeno pružnou a plastickou částí. Velikost plastické deformace není jednoznačně daná, je výsledkem historie zatěžování.

# Ideální pružnoplastický materiál, střídavé zplastizování v tlaku a v tahu



- Při střídavém zplastizování v tahu a v tlaku dochází k **disipaci energie** (přeměně vykonané práce v teplo) - cyklus *EBCD*.
- Důsledkem může být **zlom materiálu** vlivem tzv. málocyklové únavy.
- Tam, kde je toto nebezpečí, je nutno vyloučit využití plasticity.

# Tuho-plastický materiál



- Tuho-plastický materiál je limitním případem ideálně pružně-plastického materiálu.
- U tohoto materiálu je pružná část deformace tělesa nulová nebo nevýznamná - **pružné deformace se zanedbávají**.
- Modelově se volí:  $E \rightarrow \infty$



# Podmínky plasticity

Podmínky plasticity definují přechod z pružného do plastického stavu.

## Huber-Mises-Henckyho podmínka plasticity:

*Při obecném stavu napjatosti dochází k plastickému přetvoření v okolí bodu tělesa v případě, když měrná hodnota potenciální energie odpovídající změně tvaru dosáhne stálé hodnoty, která se rovná hodnotě měrné potenciální energie při prostém tahu na mezi kluzu.*

Tato podmínka zapsaná pro obecnou napjatost v hlavních napětích má tvar:

$$f \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0$$

Lze použít pro materiál se stejnou pevností v tahu a tlaku.

# Podmínky plasticity

Huber-Mises-Henckyho podmínka plasticity:

$$f \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0$$

Pro jednoosou napjatost:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow f \equiv 2 \cdot \sigma_1^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0 \rightarrow \sigma_1 = \sigma_0$$

Pro rovinnou napjatost platí:

$$\sigma_3 = 0 \rightarrow f \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0$$

$$f \equiv \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$$

Čistý smyk

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau \rightarrow f \equiv (\tau + \tau)^2 + (\tau)^2 + (\tau)^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0$$

$$f \equiv 6 \cdot \tau^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0 \rightarrow 3 \cdot \tau^2 = \sigma_0^2 \rightarrow \tau = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_0$$

# Podmínky plasticity

Huber-Mises-Henckyho podmínka plasticity pro rovinnou napjatost:

$$f \equiv \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$$

Musí být splněno:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 \leq f_y^2$$

Ve složkách tenzoru napětí:

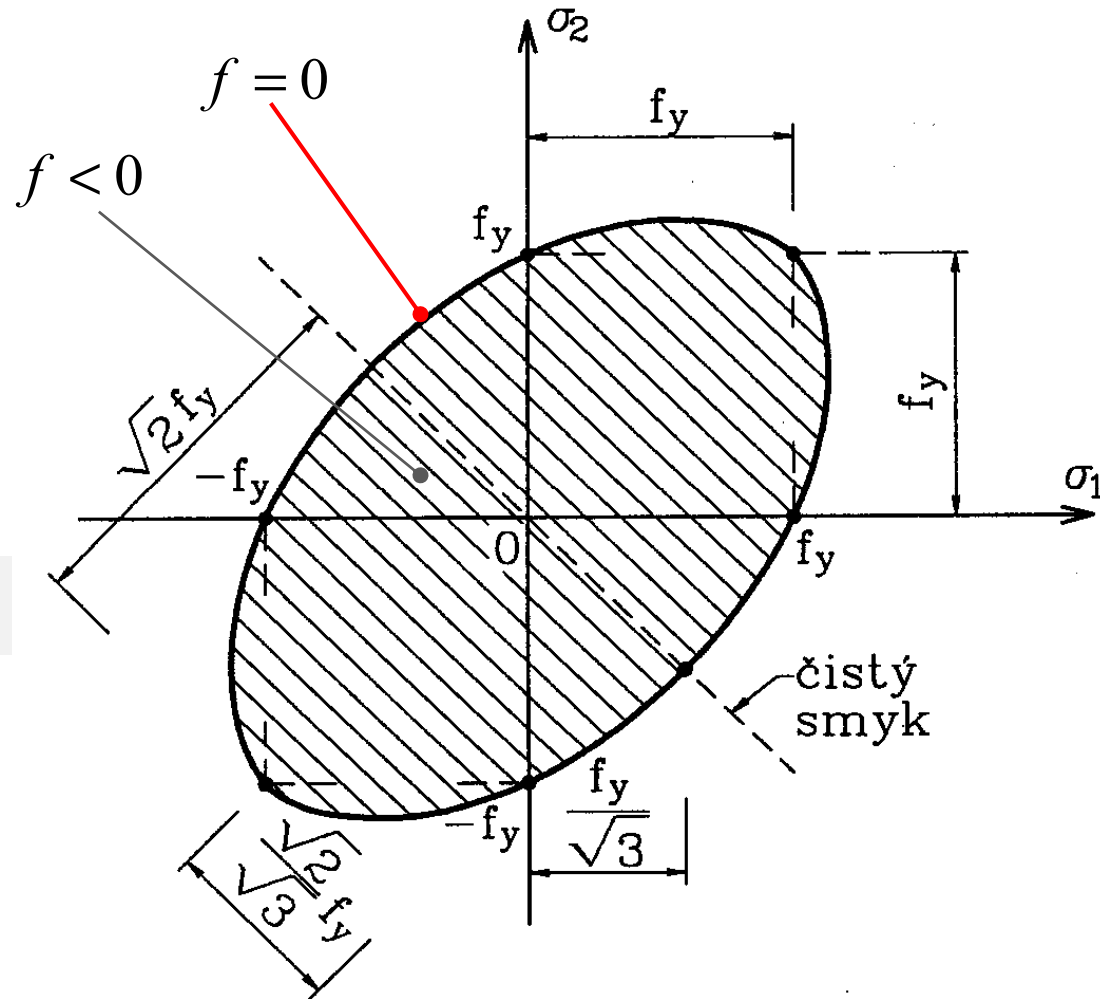
$$\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2 \leq f_y^2$$

Čistý tah:

$$\sigma_x \leq |f_y|$$

Čistý smyk:

$$|\tau_{xy}| \leq \frac{f_y}{\sqrt{3}}$$



# Podmínky plasticity

## Tresca-Saint Venantova podmínka plasticity:

*Při obecném stavu napjatosti dojde v okolí bodu tělesa k plastickému přetvoření, když maximální smykové napětí dosáhne smykového napětí při prostém tahu na mezi kluzu.*

Při prostorovém stavu napjatosti dojde k plastické deformaci při splnění některého ze vztahů:

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_0$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_0$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_0$$

Lze použít pro materiál se stejnou pevností v tahu a tlaku.

# Podmínky plasticity

**Tresca-Saint Venantova** podmínka plasticity se také nazývá podmínka maximálních smykových napětí.

Při rovinném stavu napjatosti (např.  $\sigma_3=0$ ) se vztahy zjednoduší:

$$f \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_0^2$$

Případně ve složkách tenzoru napětí:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

Pro čistý smyk:

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau \rightarrow \tau = \frac{\sigma_0}{2}$$

# Podmínky plasticity

Tresca-Saint Venantova podmínka plasticity:

$$f \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_0^2$$

Musí být splněno:

pro  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$

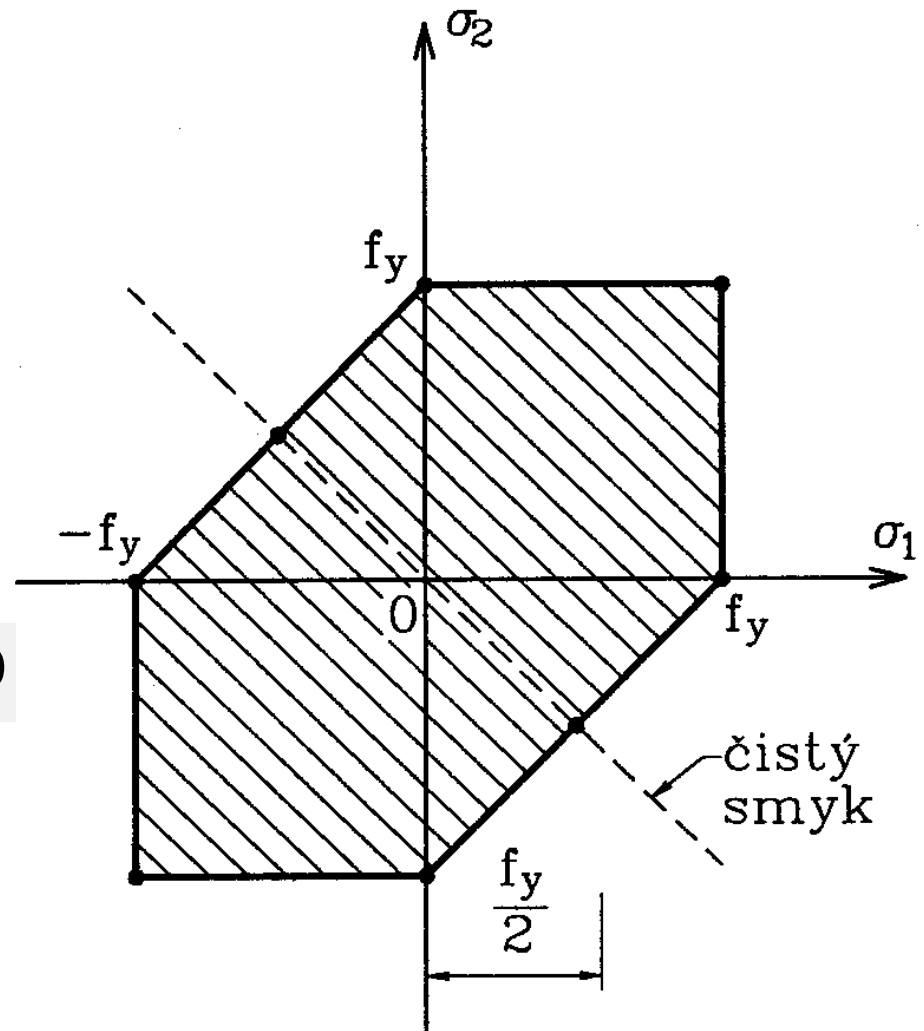
$$f \equiv (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - f_y^2 \leq 0$$

pro  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$

$$f \equiv \max(\sigma_1^2 - f_y^2, \sigma_2^2 - f_y^2) \leq 0$$

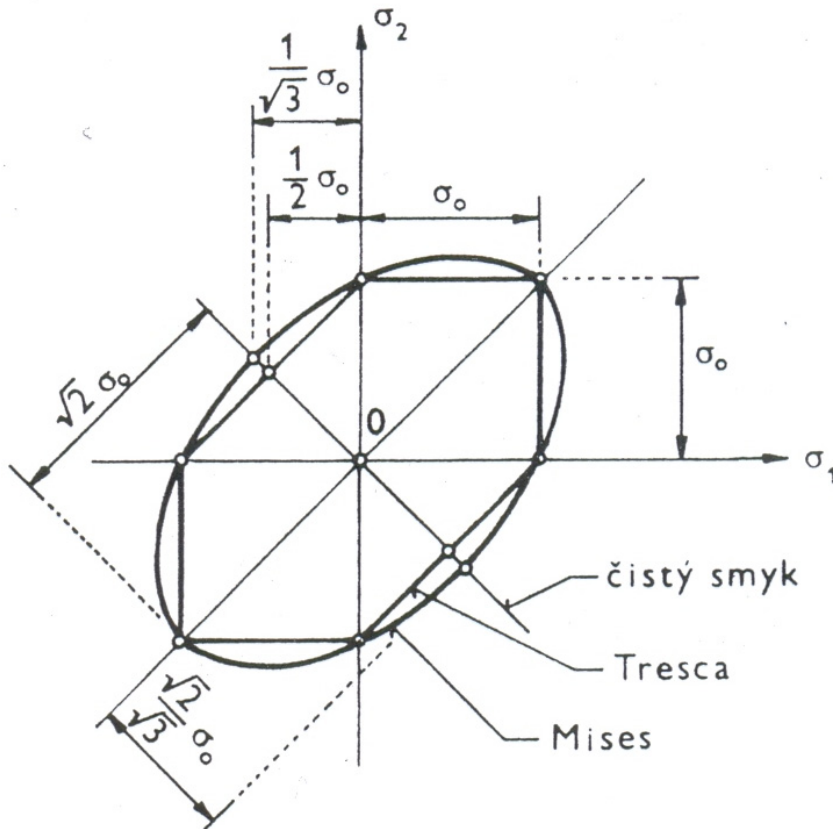
Čistý tah:  $\sigma_x \leq f_y$

Čistý smyk:  $|\tau_{xy}| \leq \frac{f_y}{2}$



# Podmínky plasticity

**Tresca-Saint Venantova** podmínka plasticity je v porovnání s Huber-Mises-Henckyho podmínkou bezpečnější (konzervativnější).



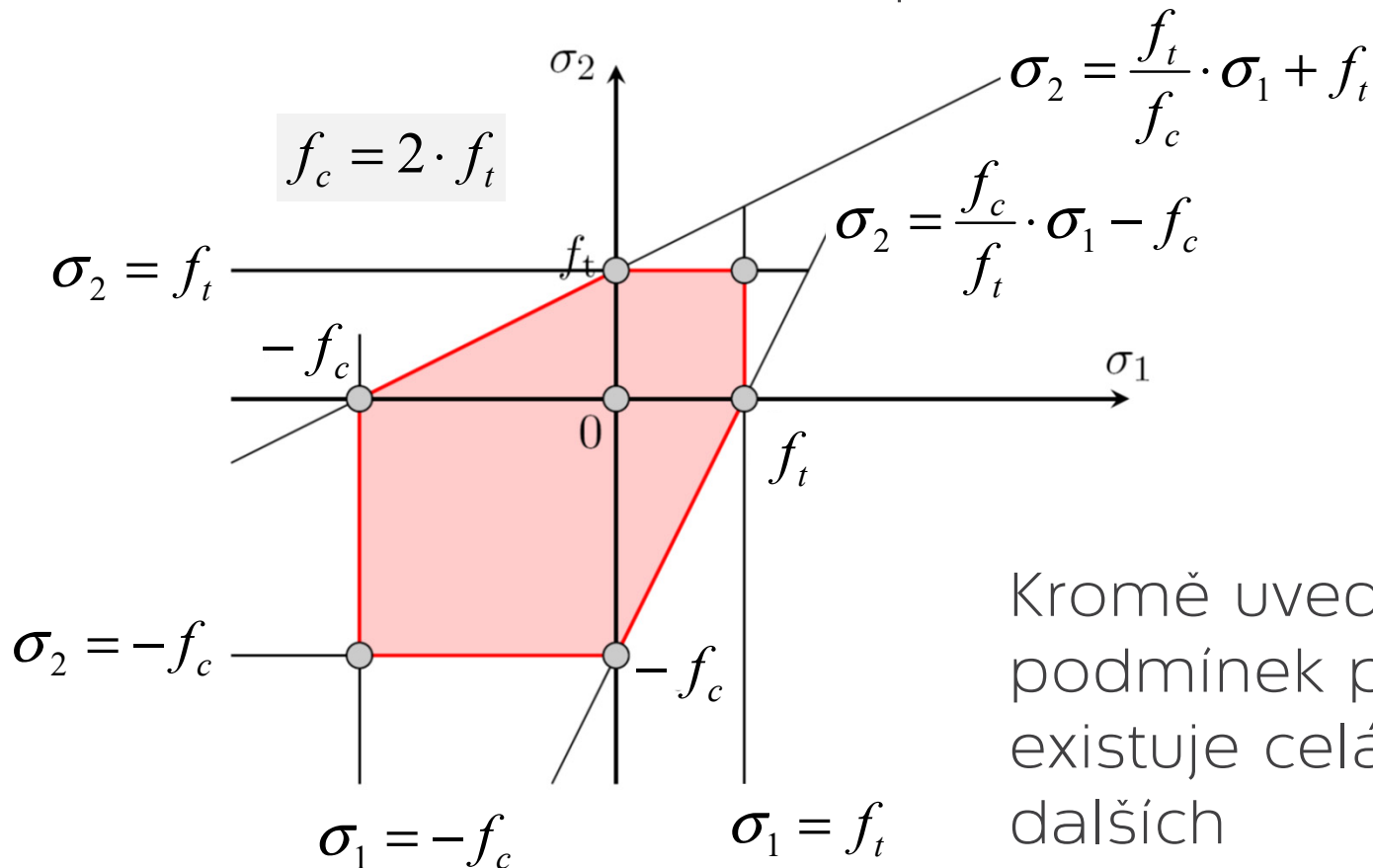
Význam funkce  $f$ :

- Pro  $f < 0$  je látka v pružném stavu
- Pro  $f = 0$  je látka v plastickém stavu
- Pro  $f > 0$  je stav fyzikálně nemožný

# Podmínky plasticity

Kritérium **Mohr-Coulomb**: podobné jako kritérium podle Tresci, umožňuje pracovat s materiály, které mají rozdílnou tahovou a tlakovou pevnost.

$$f_c \neq f_t$$



Kromě uvedených podmínek plasticity existuje celá řada dalších



# Plasticita, vztah mezi přírůstky napětí a deformací

Vztah mezi napětím a deformací lze vyjádřit rovnicí v přírůstkovém tvaru:

$$\{d\sigma\} = [D^{EP}] \cdot \{d\varepsilon\}$$

$[D^{EP}]$  je **pružně-plastická matice tuhosti**, která nahrazuje matici tuhosti materiálu v pružném stavu.

- Výsledný stav nelze získat přímo, je dán celou historií zatěžování.
- Jedná se úlohu velmi složitou, vztahy mezi napětími a deformacemi jsou nelineární, a proto při řešení nelze využít principu superpozice.

# Mezní únosnost konstrukce

- Při zvyšování zatížení konstrukce může nastat stav, kdy se celá konstrukce nebo její část, deformuje bez růstu zatížení.
- Konstrukce (nebo její část) se stává tvarově neurčitou a postupně dochází k tzv. kolapsu konstrukce.
- Deformačně-napět'ový stav konstrukce (vnitřní síly, napětí, deformace) odpovídající meznímu zatížení je nazýván mezním stavem nosné konstrukce.



# Mezní únosnost konstrukce

Analýza mezního stavu únosnosti konstrukce představuje:

- výpočet mezního zatížení,
- výpočet odpovídajících vnitřních sil,
- stanovení mezního mechanismu konstrukce.

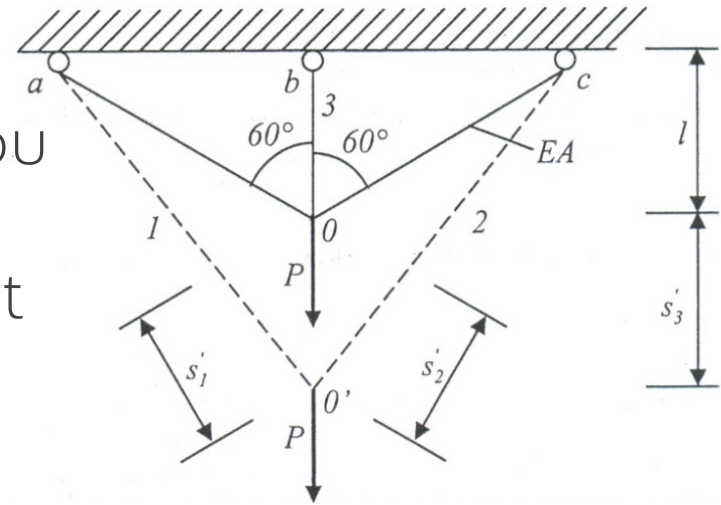
Mezní stav únosnosti konstrukce lze určit:

- pružně-plastickou analýzou konstrukce,
- analýzou vzniku mechanismu konstrukce.



# Jednoduché úlohy pružně-plastické rovnováhy, pružně-plastický tah

**Zadání:** Prutová soustava je 1x staticky neurčitá. Pruty mají stejnou tuhost  $EA$ . Mezní napětí každého prutu je  $\sigma_0$ . Určete mezní únosnost konstrukce.



**Řešení:**

Podmínka rovnováhy v uzlu  $O$  :

$$N_1 \cdot \cos 60^\circ + N_2 \cdot \cos 60^\circ + N_3 = P \rightarrow N_1 = N_2 = P - X \quad X = N_3$$

Deformační podmínka:

$$s'_1 = s'_2 = s'_3 \cdot \cos 60^\circ \rightarrow s'_1 = s'_2 = \frac{(P - X) \cdot l_1}{EA} = \frac{X \cdot l_3}{EA} \cdot \cos 60^\circ \rightarrow P - X = X \cdot \cos^2 60^\circ$$

Výsledné síly:  $X = N_3 = \frac{4}{5} \cdot P$        $N_1 = N_2 = \frac{1}{5} \cdot P$

# Jednoduché úlohy pružně-plastické rovnováhy, pružně-plastický tah

Největší normálová síla vznikne v prutu 3. Při dosažení napětí  $\sigma_0$  se prut 3 zplastizuje (při zatížení  $P_T$ ).

$$X = N_3 = \frac{4}{5} \cdot P \rightarrow P_T = \frac{5}{4} \cdot N_{3,pl} = \frac{5}{4} \cdot \sigma_0 \cdot A$$

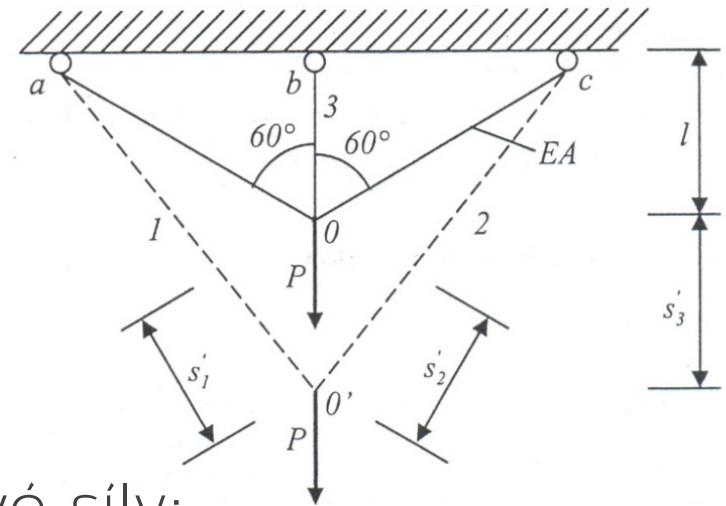
V prutech 1 a 2 budou přítomny osové síly:

$$N_1 = N_2 = P_T - X = \frac{5}{4} \cdot \sigma_0 \cdot A - \sigma_0 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot \sigma_0 \cdot A$$

Při dalším zatěžování už osová síla v prutu 3 neporoste, pruty 1 a 2 však mají ještě 75% rezervu únosnosti pro dosažení plastického stavu celé konstrukce.

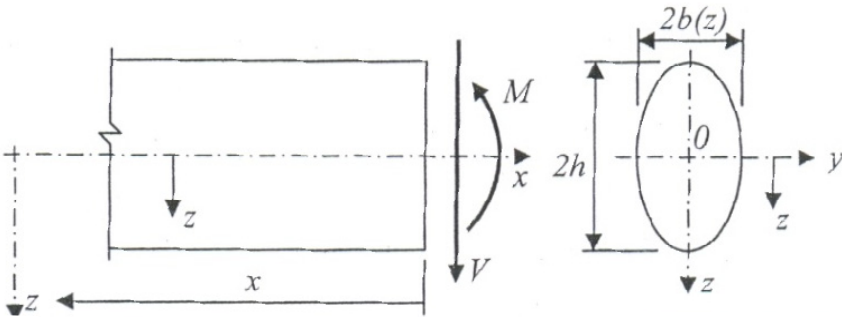
Mezní únosnost konstrukce je:

$$P_m = N_{1,m} \cdot \cos 60^\circ + N_{2,m} \cdot \cos 60^\circ + N_{3,m} = \sigma_0 \cdot A \cdot (0,5 + 0,5 + 1) = 2 \cdot \sigma_0 \cdot A = 1,6 \cdot P_T$$



# Jednoduché úlohy pružně-plastické rovnováhy, pružně-plastický ohyb

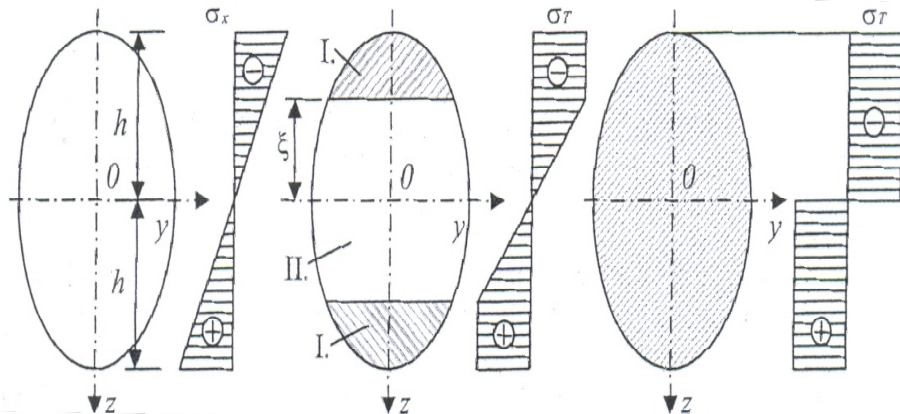
**Pružně-plastický ohyb** nosníku se dvěma osami symetrie zatíženém rovnoměrným postupně rostoucím zatížením.



Pro vnitřní síly platí známé vztahy:

$$M_y = -4 \cdot \int_0^h \sigma_x \cdot b(z) \cdot z \, dz$$

$$V(x) = -4 \cdot \int_0^h \tau_{xz} \cdot b(z) \, dz$$

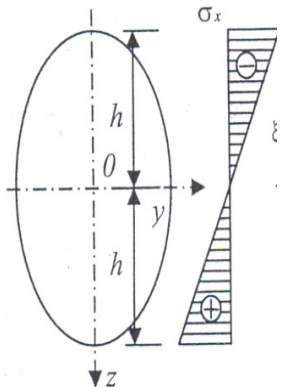


Nejexponovanější průřez prochází při postupném zatěžování stavem:

- pružným
- pružně-plastickým
- plastickým (po vytvoření plastického kloubu)

# Jednoduché úlohy pružně-plastické rovnováhy, pružně-plastický ohyb

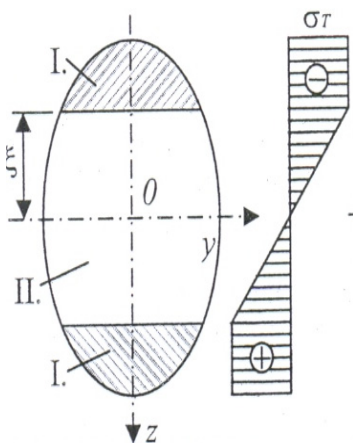
Stav pružný:



$$\sigma_x < |\sigma_T| \quad M_y = -EI_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (-h \leq z \leq h)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad \text{Pro: } z = \pm h \quad \sigma_x = \pm \frac{M_y}{W_y} \quad \text{kde } W_y = \frac{I_y}{h}$$

Stav pružně-plastický:



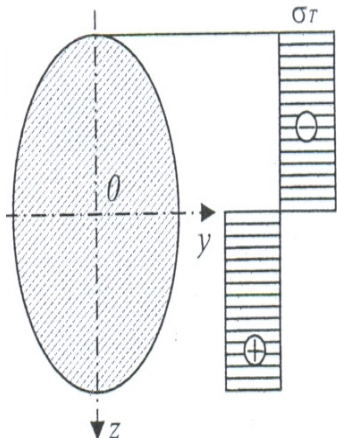
$$\text{Část I. } (\xi < |z| < h) \quad |\sigma_x| = \sigma_T \quad \chi = (\pm 1)$$

$$\text{Část II. } (0 \leq |z| < \xi) \quad \sigma_x = \chi \cdot \sigma_T \cdot \frac{z}{\xi} \quad (|z| = \xi \rightarrow \sigma_x = \chi \cdot \sigma_T)$$

$$M_y = \sigma_T \cdot \left( 2 \cdot S_1 + \frac{I_{II}}{\xi} \right) \quad \begin{array}{l} S_I \dots \text{statický moment části } I \\ \text{k ose } y \\ I_{II} \dots \text{moment setrvačnosti} \\ \text{části } II \text{ k ose } y \end{array}$$

# Jednoduché úlohy pružně-plastické rovnováhy, pružně-plastický ohyb

Stav plastický:



$$|\sigma_x| = \sigma_T \quad 0 < |z| \leq h \quad \sigma_x = \chi \cdot \sigma_T \quad \chi = (\pm 1)$$

$$M_y = M_T = 2 \cdot \chi \cdot \sigma_T \cdot S$$

Pro obdélníkový průřez o výšce  $2h$  a šířce  $2b$  platí:

$$S = 2 \cdot 2 \cdot b \cdot h \cdot \frac{h}{2} = 2 \cdot b \cdot h^2 = \frac{F \cdot h}{2} = W_{pl}$$

$$M_y = M_T = W_{pl} \cdot \sigma_T$$

$$M_{y,el} = W_{el} \cdot \sigma_T$$

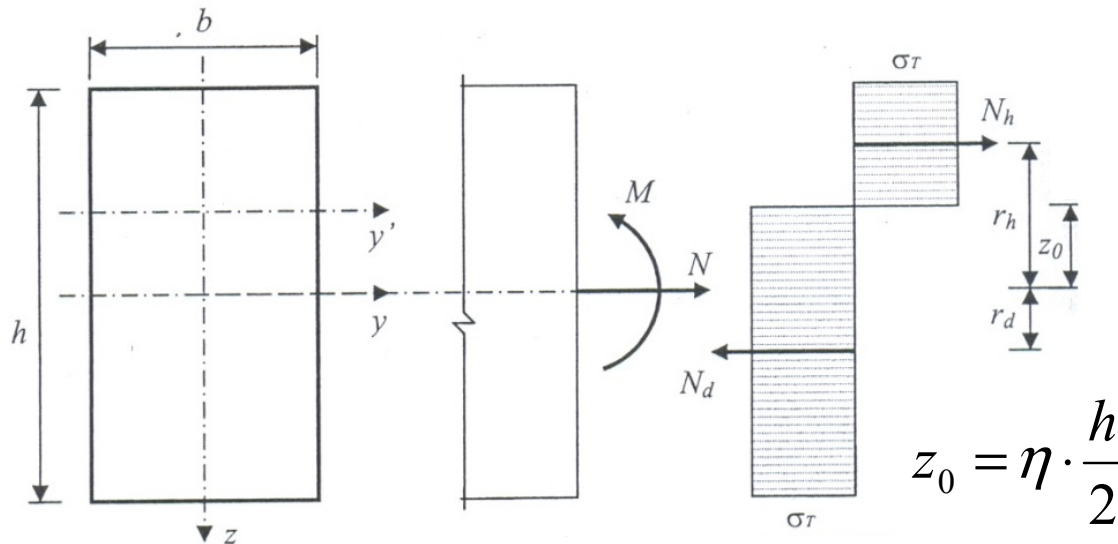
$$\frac{M_T}{M_{y,el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}} = \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{\frac{4}{3} \cdot b \cdot h^2} = \frac{6}{4} = 1,5$$

50% plastická rezerva



# Nosník namáhaný ohybem a osovým namáháním

Podmínka rovnováhy sil a statických momentů:



$$N + N_h - N_d = 0$$

$$M - N_h \cdot r_h - N_d \cdot r_d = 0$$

$$z_0 = \eta \cdot \frac{h}{2}$$

Pro normálové síly  $N_h$  a  $N_d$  a pro ramena  $r_h$  a  $r_d$  platí:

$$N_h = \sigma_T \cdot b \cdot \left( \frac{h}{2} - z_0 \right) = \sigma_T \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot (1 - \eta)$$

$$r_h = z_0 + \left( \frac{h}{2} - z_0 \right) \cdot \frac{1}{2} = h \cdot \frac{(1 + \eta)}{4}$$

$$N_d = \sigma_T \cdot b \cdot \left( \frac{h}{2} + z_0 \right) = \sigma_T \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot (1 + \eta)$$

$$r_d = \frac{h}{2} - \left( \frac{h}{2} - z_0 \right) \cdot \frac{1}{2} = h \cdot \frac{(1 - \eta)}{4}$$

# Nosník namáhaný ohybem a osovou silou

Pro kladnou osovou sílu o ohybový moment platí:

$$N = \sigma_T \cdot b \cdot h \cdot \eta = N_T \cdot \eta \quad M = -\frac{\sigma_T \cdot b \cdot h^2}{4} \cdot (1 - \eta^2) = M_T \cdot (1 - \eta^2)$$

Pro zápornou osovou sílu o ohybové momenty platí:

$$N = -N_T \cdot \eta \quad M = -M_T \cdot (1 - \eta^2)$$

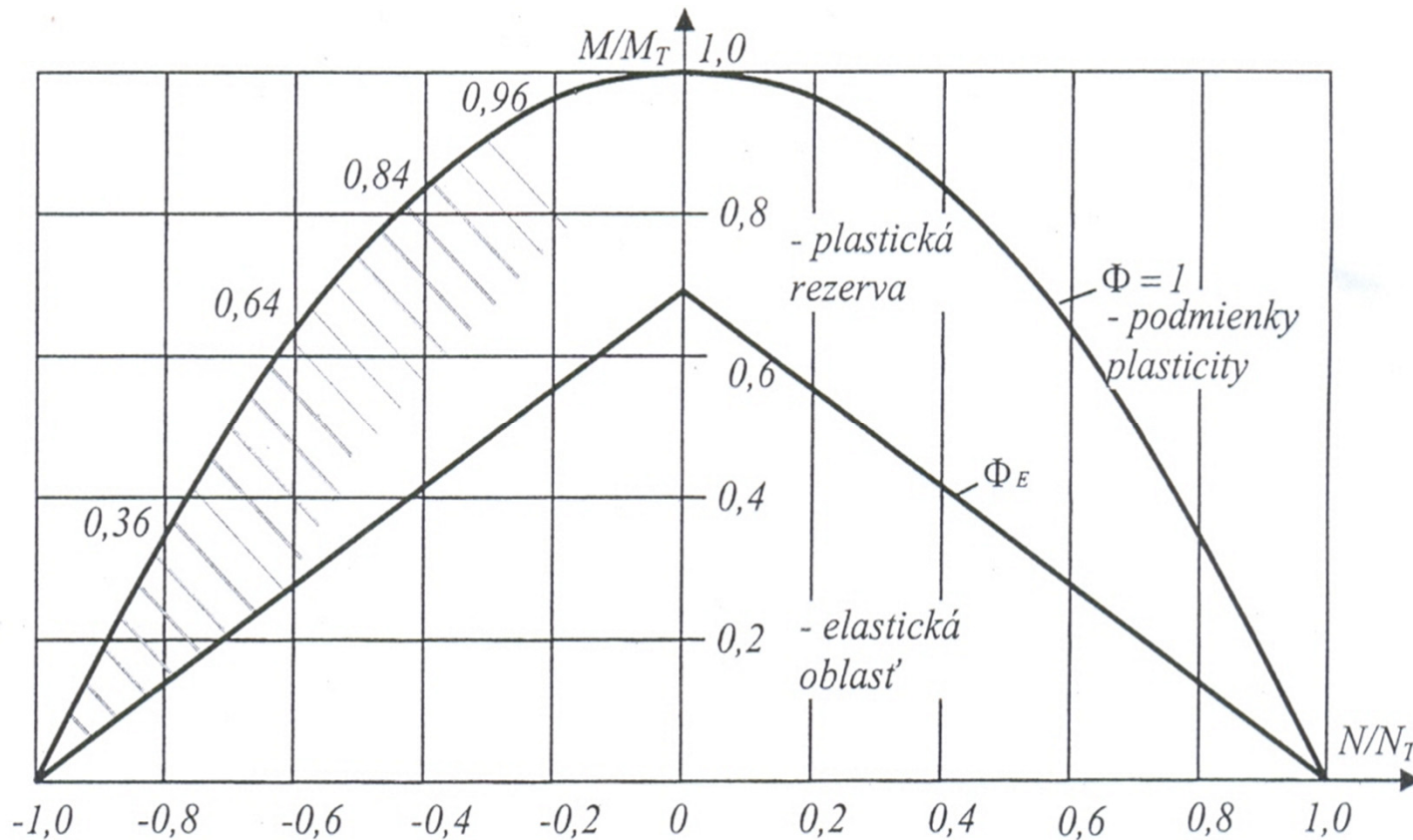
Úpravou výše uvedených vztahů lze odvodit:

$$\frac{|M|}{M_T} = 1 - \eta^2 = 1 - \left( \frac{N}{N_T} \right)^2$$

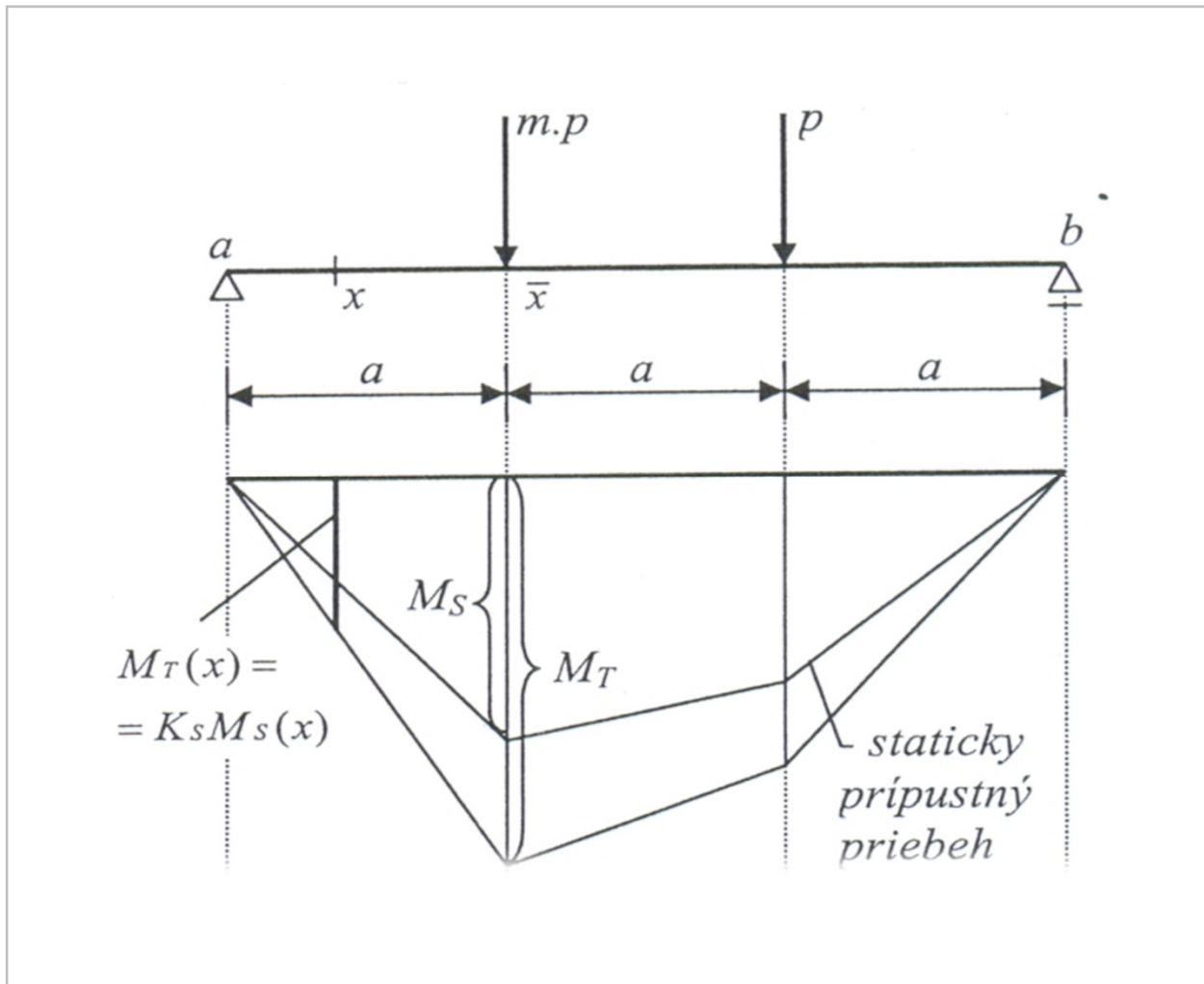
# Nosník namáhaný ohybem a osovou silou

Geometrická interpretace vztahu:

$$\Phi_{(M,N)} \equiv \frac{|M|}{M_T} + \left( \frac{N}{N_T} \right)^2 = 1$$



# Mezní únosnost nosníků



Průběh staticky přípustného ohybového momentu

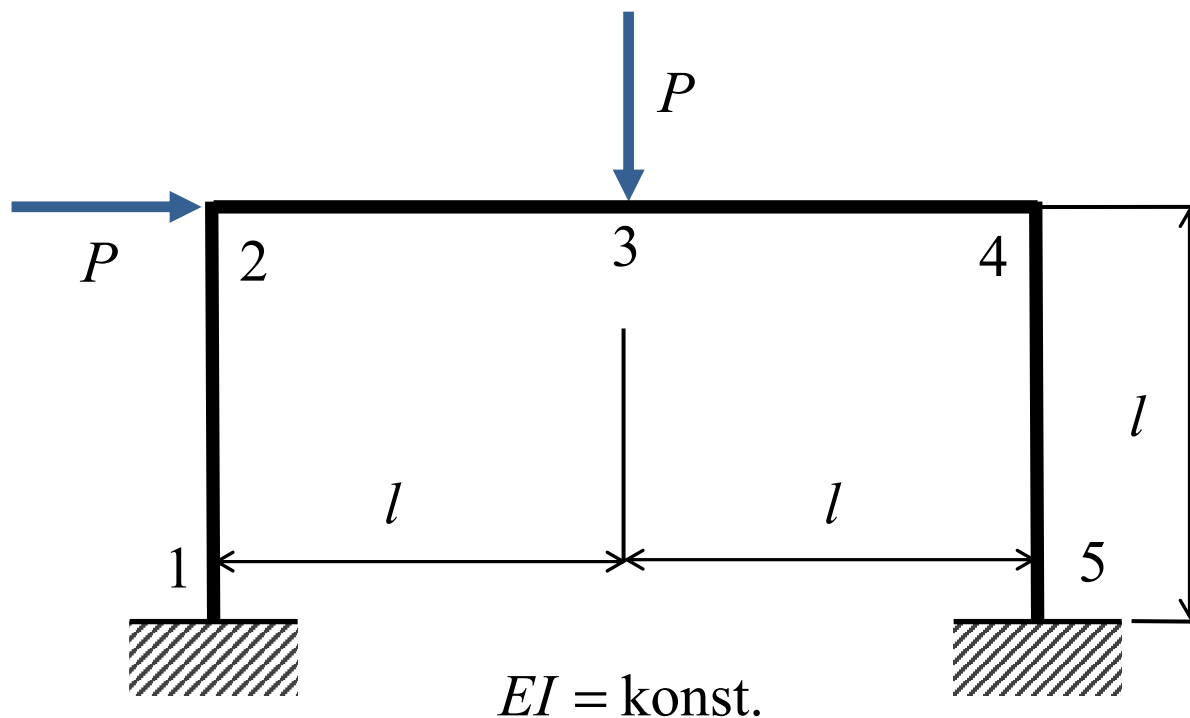
# Mezní únosnost rámových konstrukcí, statické řešení

- U statického řešení se hledá největší hodnota  $P_s \leq P_m$  ( $P_m$  je mezní zatížení), která vyvolává staticky možný průběh momentů a splňuje podmínky vnitřní a vnější rovnováhy konstrukce, při němž se v žádném průřezu nepřekročí velikost mezního ohybového momentu.
- Při statickém řešení se výpočtem přibližuje statické hodnotě mezního zatížení „zdola“, přičemž se stanoví dolní mez únosnosti konstrukce.

# Mezní stav únosnosti rámu

## Zadání:

Určete **statickou metodou** mezní sílu  $P_m$  oboustranně vetknutého rámu (3x S.N.), zatíženého podle obrázku.



K určení výsledného průběhu ohybových momentů lze využít např. silovou metodu.

# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 1

Výsledné ohybové momenty:

$$M_1 = -0,2125 \cdot P \cdot l = -0,51 \cdot \overline{M}_m$$

$$M_2 = -0,0125 \cdot P \cdot l = -0,03 \cdot \overline{M}_m$$

$$M_3 = +0,3 \cdot P \cdot l = 0,72 \cdot \overline{M}_m$$

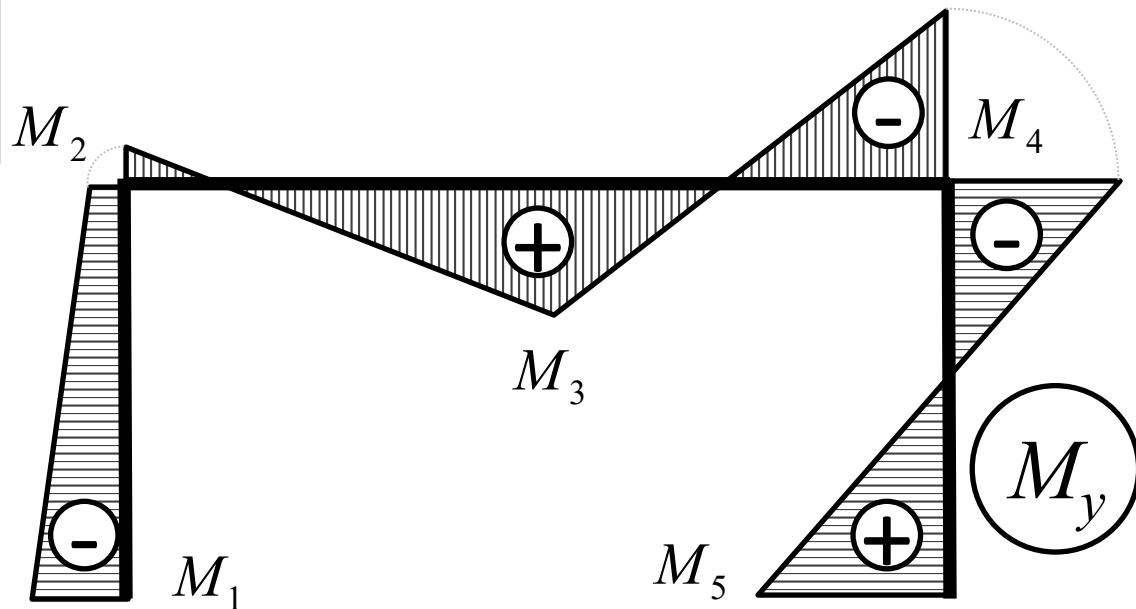
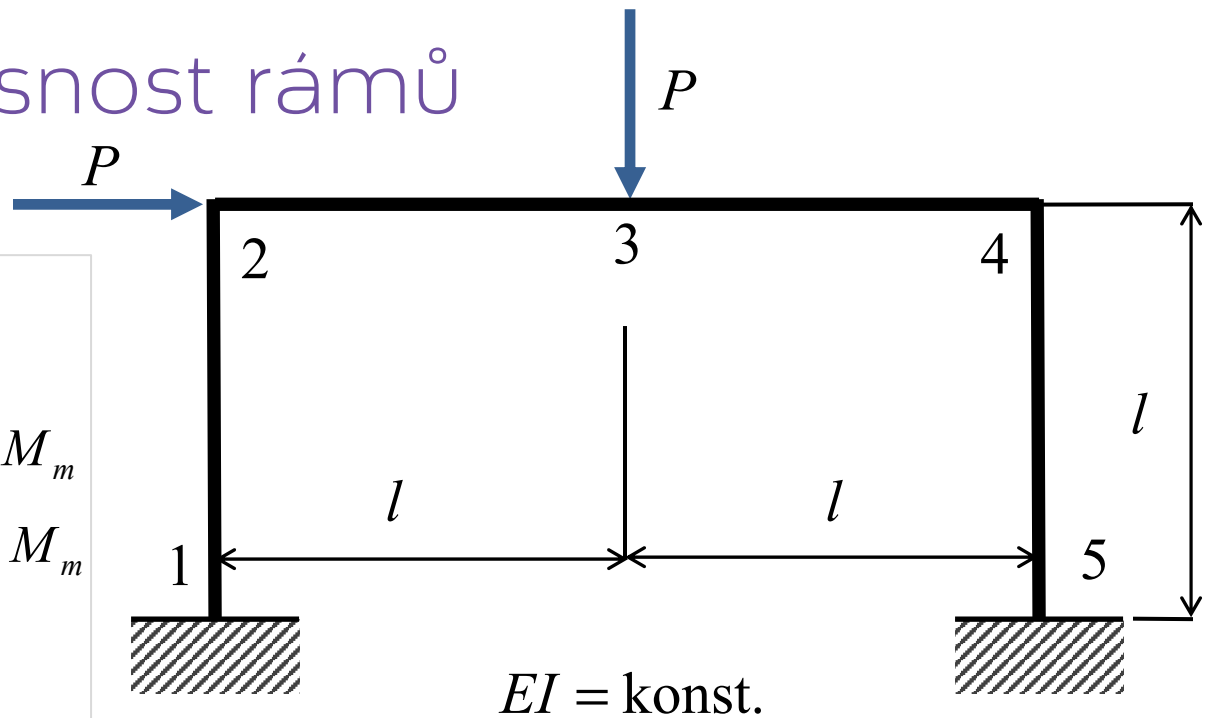
$$M_4 = -0,3875 \cdot P \cdot l = -0,93 \cdot \overline{M}_m$$

$$M_5 = +0,4125 \cdot P \cdot l = \overline{M}_m$$

$$|M_5| = \overline{M}_m = 0,4125 \cdot P \cdot l$$

$$P = 2,42 \cdot \frac{\overline{M}_m}{l}$$

Při tomto zatížení vznikne 1. plastický kloub v bodě 5 a 2x S.N. rám



# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 2

Výsledné ohybové momenty:

$$M_1 = -0,976 \cdot \Delta_1 P \cdot l$$

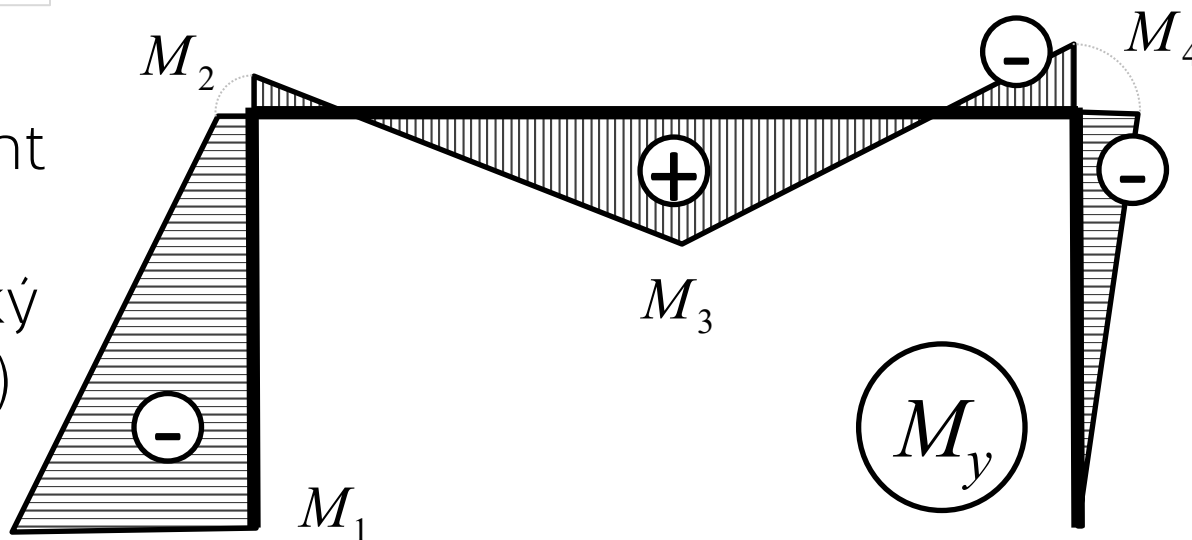
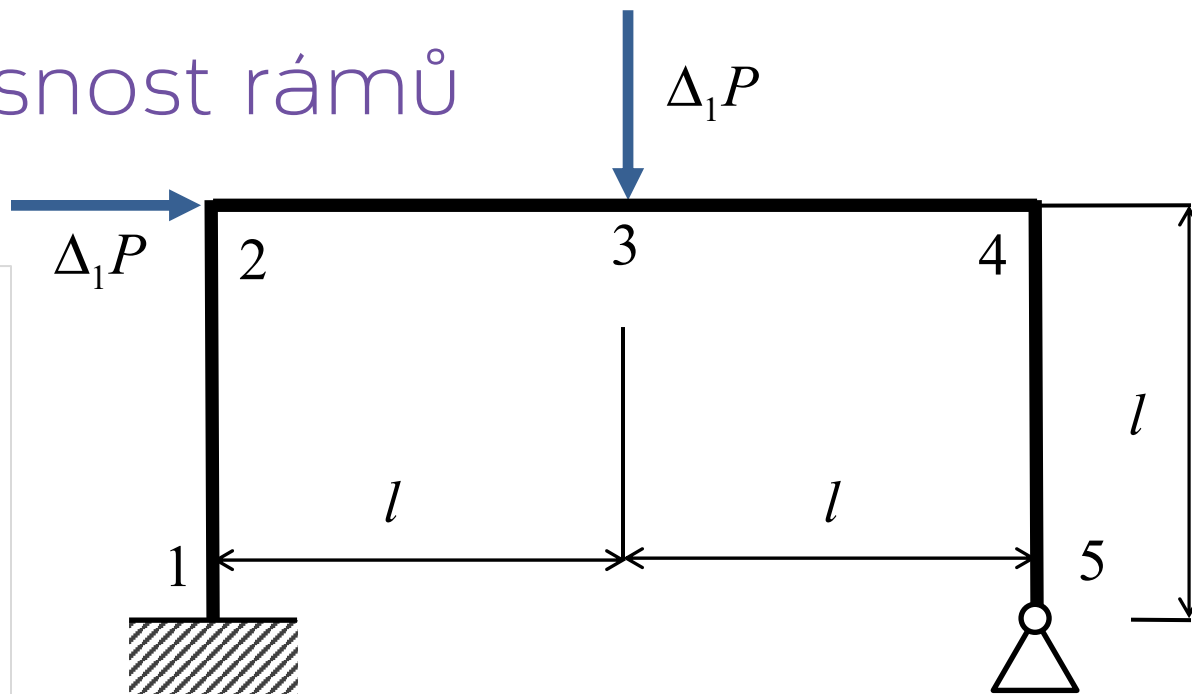
$$M_2 = -0,132 \cdot \Delta_1 P \cdot l$$

$$M_3 = +0,356 \cdot \Delta_1 P \cdot l$$

$$M_4 = -0,156 \cdot \Delta_1 P \cdot l$$

Ve stavu 1 byl 2. největší moment v bodě 4, kde vznikne 2. plastický kloub (1x S.N. rám)

$$M_4 = -0,93 \cdot \bar{M}_m$$





# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 2  $M_4$

$$|M_4| = M_m \rightarrow M_m - 0,93 \cdot M_m = 0,06 \cdot M_m = |-0,156| \cdot \Delta_1 P \cdot l \rightarrow \Delta_1 P = \frac{0,06}{0,156} \cdot \frac{M_m}{l} = 0,389 \cdot \frac{M_m}{l}$$

$$P = (2,42 + 0,39) \cdot \frac{M_m}{l} = 2,81 \cdot \frac{M_m}{l}$$

Při tomto zatížení vznikne 2. plastický kloub v bodě 4 a 1x S.N. rám

Velikosti ohybových momentů v uzlech 1 až 5 ve stavu 2

$M_i$	Stav 1	Stav 2	Stav 3	Stav 4	Celkem
$M_1$	$-0,51 \cdot M_m$	$-0,38 \cdot M_m$			$-0,8950 \cdot M_m$
$M_2$	$-0,03 \cdot M_m$	$-0,05 \cdot M_m$			$-0,0817 \cdot M_m$
$M_3$	$+0,72 \cdot M_m$	$0,14 \cdot M_m$			$+0,866 \cdot M_m$
$M_4$	$-0,93 \cdot M_m$	$-0,06 \cdot M_m$			$-M_m$
$M_5$	$+M_m$				$+M_m$

# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 3

Výsledné ohybové momenty:

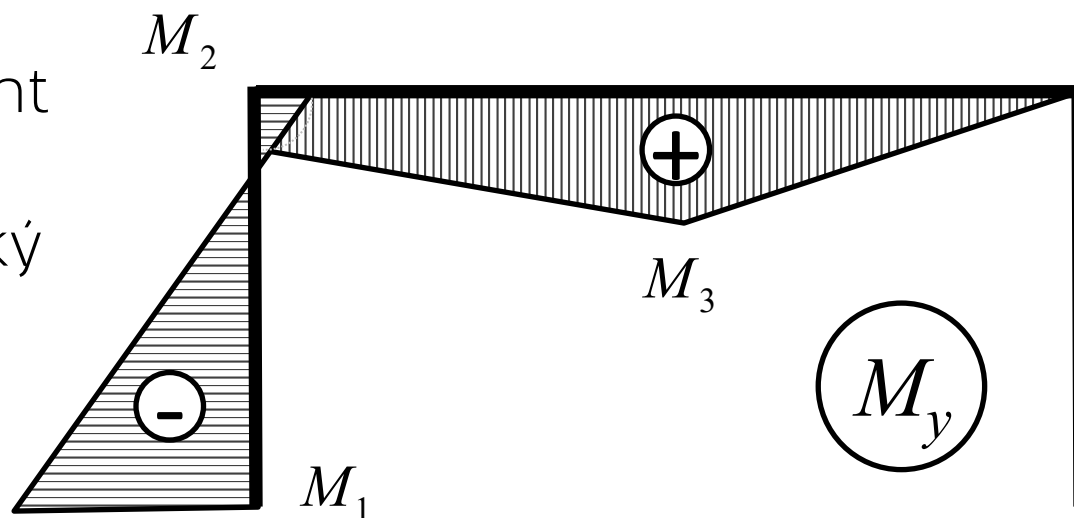
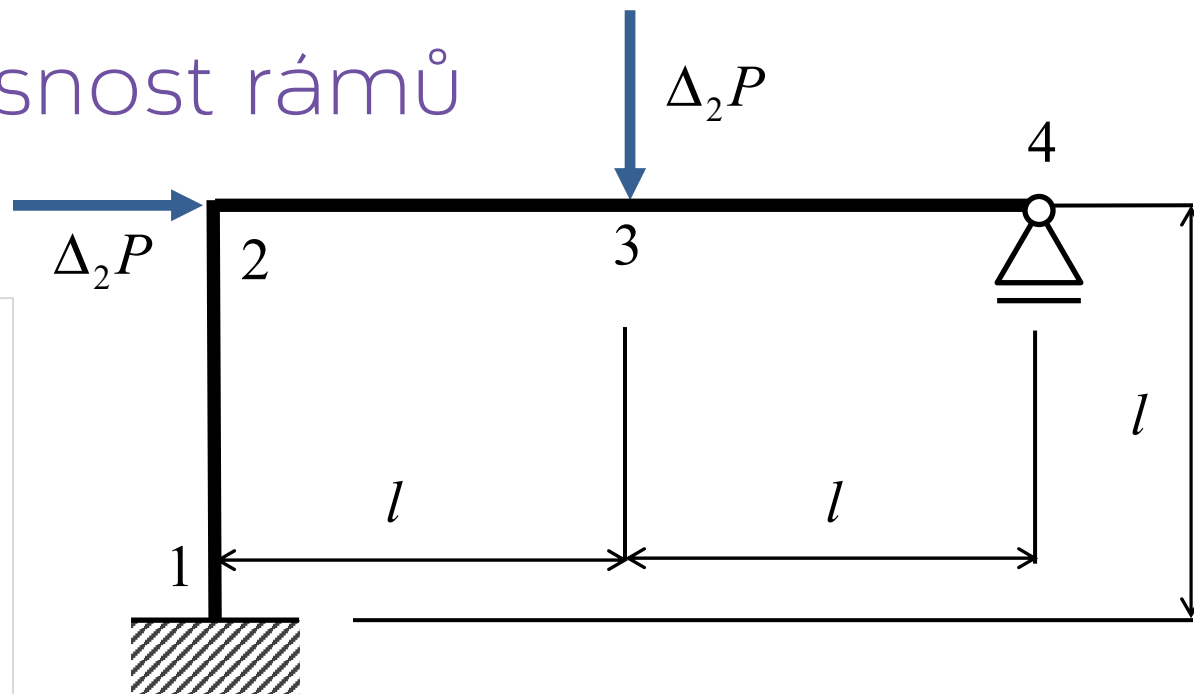
$$M_1 = -0,850 \cdot \Delta_2 P \cdot l$$

$$M_2 = +0,150 \cdot \Delta_2 P \cdot l$$

$$M_3 = +0,575 \cdot \Delta_2 P \cdot l$$

Ve stavu 2 byl 3. největší moment v bodě 1, kde vznikne 3. plastický kloub (S.U. rám)

$$M_1 = -0,8950 \cdot M_m$$



# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 3  $M_1$

$$|M_1| = M_m \rightarrow M_m - |-0,895| \cdot M_m = 0,105 \cdot M_m = |-0,85| \cdot \Delta_2 P \cdot l \rightarrow \Delta_2 P = \frac{0,105}{0,85} \cdot \frac{M_m}{l} = 0,124 \cdot \frac{M_m}{l}$$

$$P = (2,81 + 0,12) \cdot \frac{M_m}{l} = 2,94 \cdot \frac{M_m}{l}$$

Při tomto zatížení vznikne 3. plastický kloub v bodě 1 a S.U. rám

Velikosti ohybových momentů v uzlech 1 až 5 ve stavu 3

$M_i$	Stav 1	Stav 2	Stav 3	Stav 4	Celkem
$M_1$	$-0,51 \cdot M_m$	$-0,38 \cdot M_m$	$-0,10 \cdot M_m$		$-M_m$
$M_2$	$-0,03 \cdot M_m$	$-0,05 \cdot M_m$	$+0,02 \cdot M_m$		$-0,0632 \cdot M_m$
$M_3$	$+0,72 \cdot M_m$	$0,14 \cdot M_m$	$+0,07 \cdot M_m$		$+0,937 \cdot M_m$
$M_4$	$-0,93 \cdot M_m$	$-0,06 \cdot M_m$	-		$-M_m$
$M_5$	$+M_m$	-	-		$+M_m$

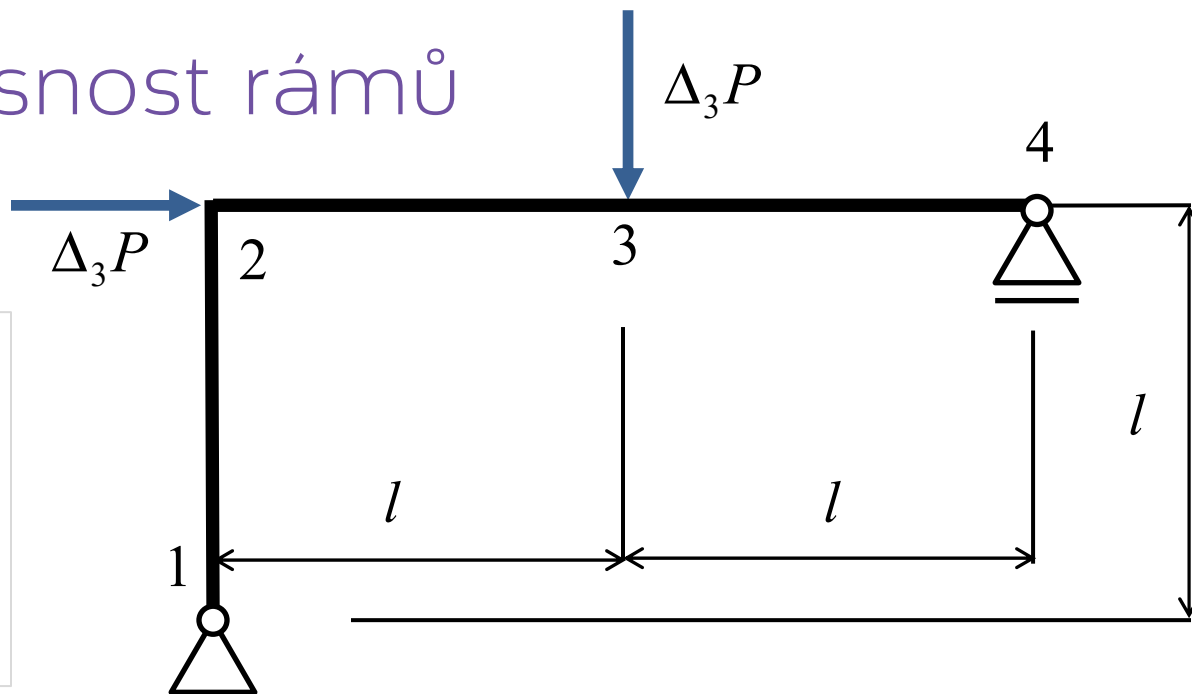
# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 4

Výsledné ohybové momenty:

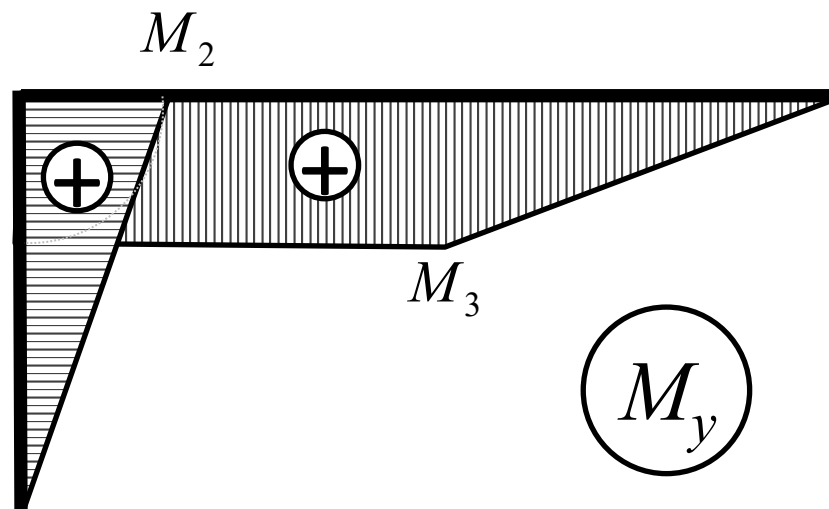
$$M_2 = \Delta_3 P \cdot l$$

$$M_3 = \Delta_3 P \cdot l$$



Ve stavu 3 byl  
4. největší moment v  
bodě 3, kde vznikne  
4. plastický kloub  
(mechanismus)

$$M_3 = +0,937 \cdot M_m$$



# Mezní únosnost rámu

Řešení: Stav 4

$M_3$

$$|M_3| = M_m \rightarrow M_m - 0,937 \cdot M_m = 0,063 \cdot M_m = \Delta_3 P \cdot l \rightarrow \Delta_3 P = 0,063 \cdot \frac{M_m}{l}$$

$$P_m = (2,94 + 0,06) \cdot \frac{M_m}{l} = 3,00 \cdot \frac{M_m}{l}$$

Vznikají plastické klouby v bodech 1, 3, 4 a 5 a pohyblivý mechanismus o 1 stupni volnosti

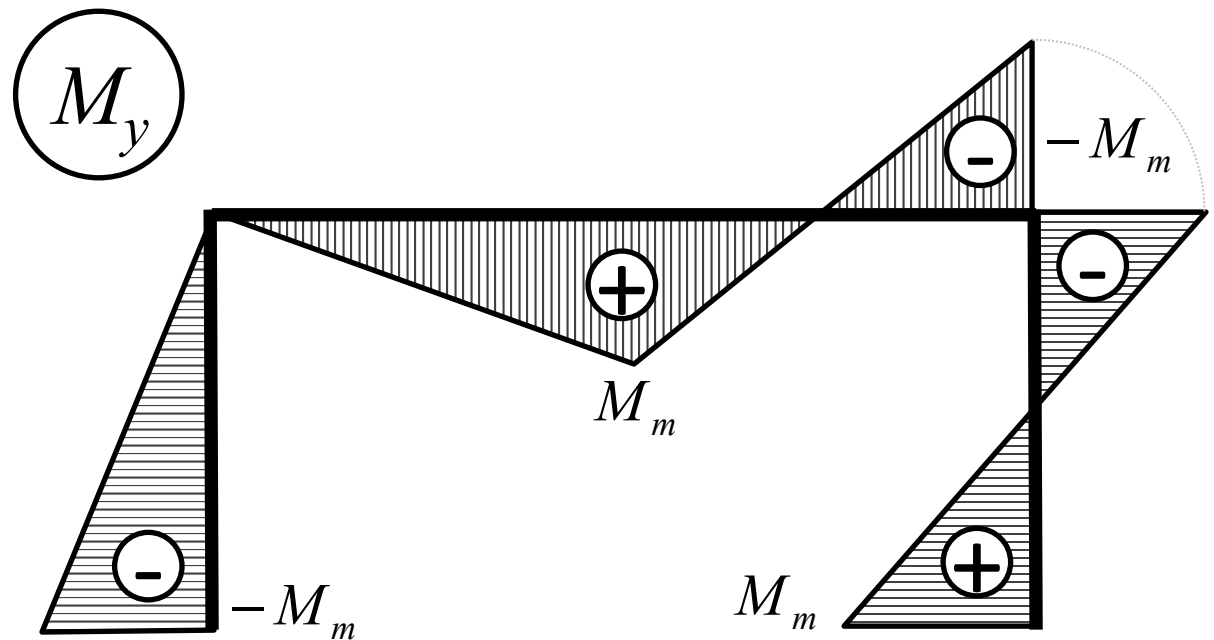
Velikosti ohybových momentů v uzlech 1 až 5 ve stavu 4

$M_i$	Stav 1	Stav 2	Stav 3	Stav 4	Celkem
$M_1$	$-0,51 \cdot M_m$	$-0,38 \cdot M_m$	$-0,10 \cdot M_m$	-	$-M_m$
$M_2$	$-0,03 \cdot M_m$	$-0,05 \cdot M_m$	$+0,02 \cdot M_m$	$+0,06 \cdot M_m$	0
$M_3$	$+0,72 \cdot M_m$	$0,14 \cdot M_m$	$+0,07 \cdot M_m$	$+0,06 \cdot M_m$	$+M_m$
$M_4$	$-0,93 \cdot M_m$	$-0,06 \cdot M_m$	-	-	$-M_m$
$M_5$	$+M_m$	-	-	-	$+M_m$

# Mezní únosnost rámu

## Výsledky statické metody

Výsledný průběh ohybových momentů



Mezní plastická únosnost 3x staticky  
neurčitého rámu:

$$P = 3,00 \cdot \frac{M_m}{l}$$

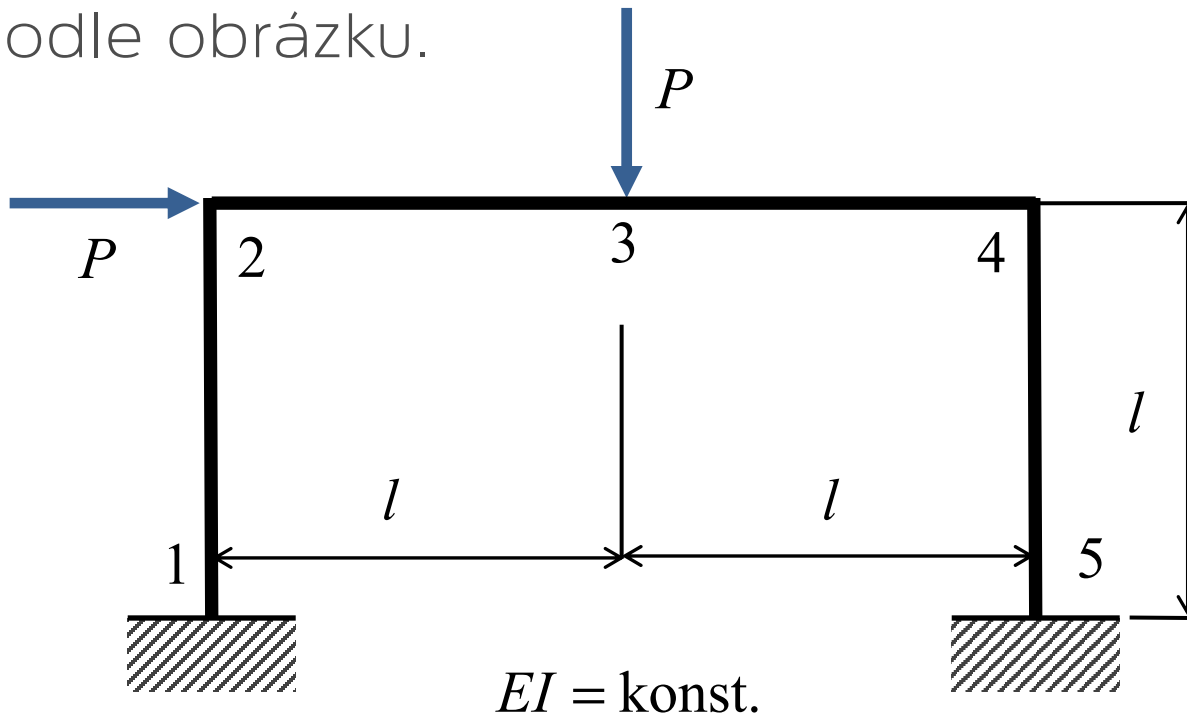
# Mezní únosnost rámových konstrukcí, kinematické řešení

- Při kinematickém řešení se provádí rozbor kinematicky přípustných mechanismů a hledá se nejnižší hodnota zatížení  $P_k \geq P_m$  ( $P_m$  je mezní hodnota zatížení), při němž se v žádném průřezu nepřekročí velikost mezního ohybového momentu.
- Kinematicky přípustný mechanismus vyvolaný zatížením  $P_k$  musí obsahovat takový počet plastických kloubů, aby byl umožněn virtuální pohyb celé konstrukce nebo její části. Virtuální práce vnějších sil musí být kladná.
- Při kinematickém řešení se výpočtem přibližuje skutečné hodnotě mezního zatížení „shora“, přičemž se stanoví horní mez únosnosti konstrukce.

# Mezní stav únosnosti rámu

## Zadání:

Určete **kinematickou metodou** mezní sílu  $P_m$  oboustranně vetknutého rámu (3x S.N.), zatíženého podle obrázku.



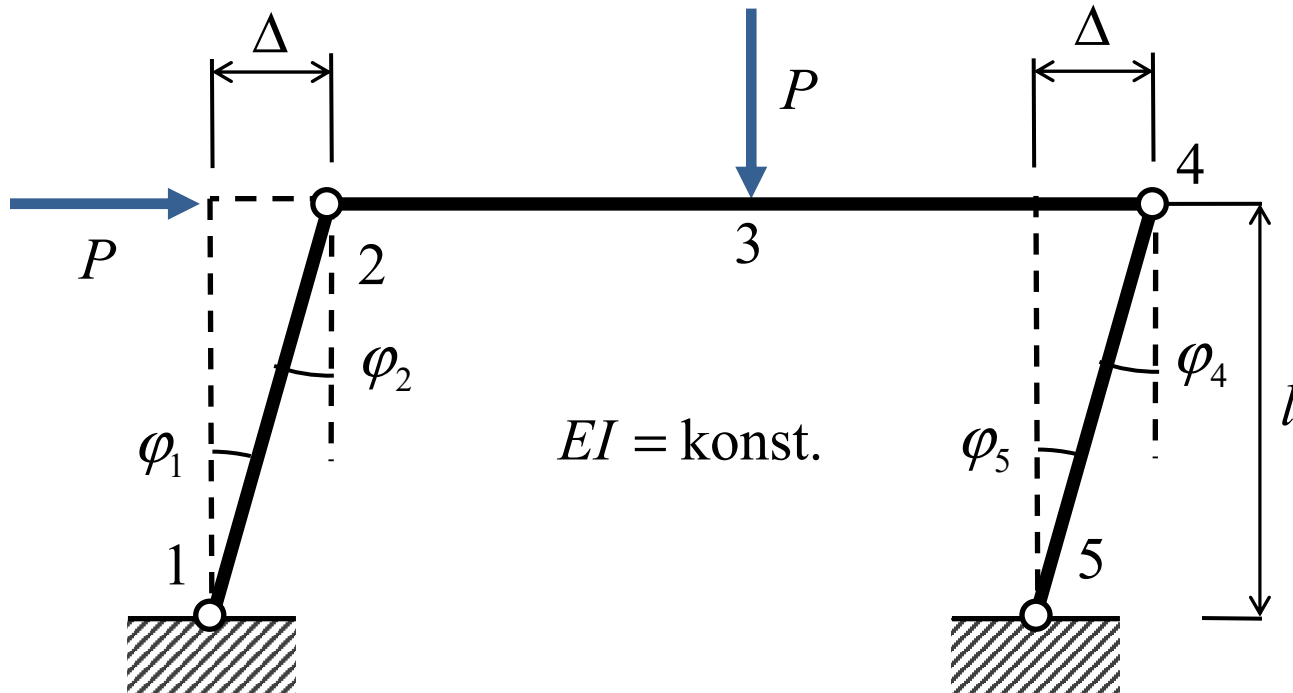
$$\sum_i F_i \cdot \delta_i = \sum_j M_j \cdot \varphi_j$$

**Platí:** práce silového zatížení  $F_i$  se rovná práci momentů  $M_j$  absorbované ve vzniklých plastických kloubech.



# Mezní stav únosnosti rámu

Řešení: Výhybkový mechanismus

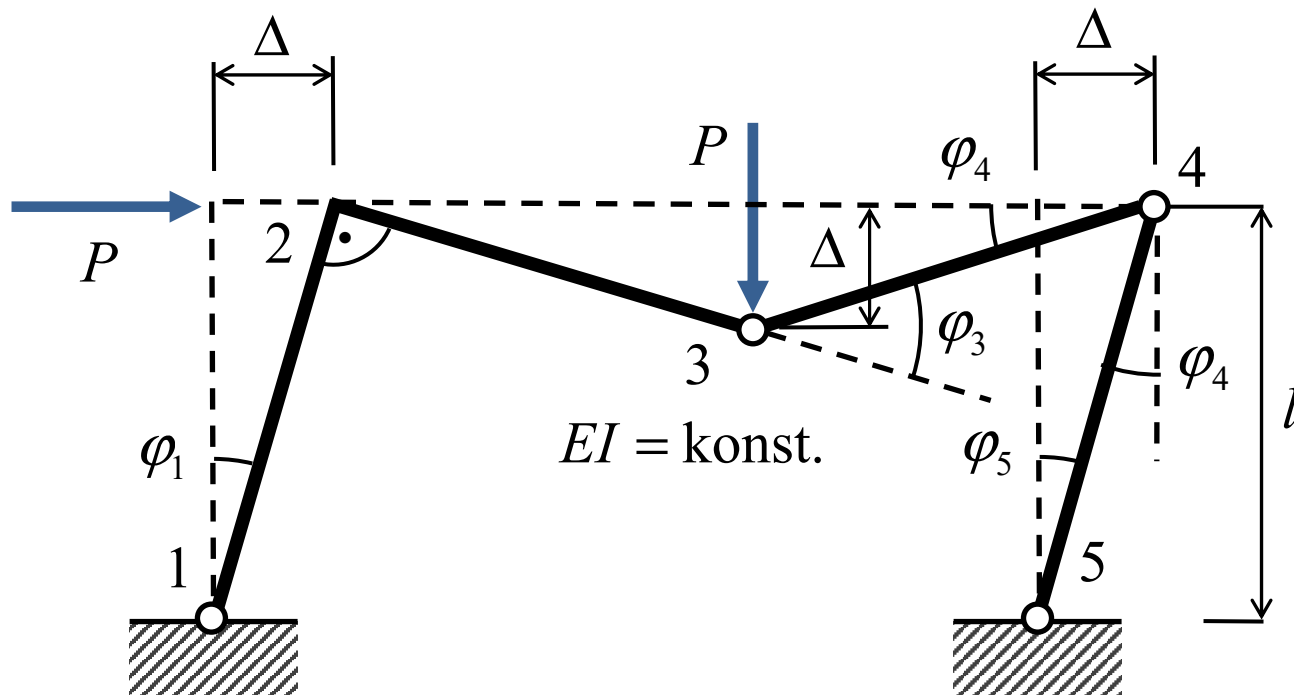


$$|\varphi_{1,2,4,5}| \cong \tan \varphi_i = \frac{\Delta}{l}$$

$$P \cdot \Delta = 4 \cdot M_m \cdot \frac{\Delta}{l} \rightarrow P = 4 \cdot \frac{M_m}{l}$$

# Mezní stav únosnosti rámu

**Řešení:** Kombinovaný mechanismus  
(kombinace mechanismu výchylkového s nosníkovým)



$$|\varphi_{1,5}| \cong \tan \varphi_i = \frac{\Delta}{l}$$

$$|\varphi_{3,4}| \cong \tan \varphi_i = \frac{2 \cdot \Delta}{l}$$

$$P \cdot \Delta + P \cdot \Delta = \varphi_1 \cdot M_m + \varphi_3 \cdot M_m + \varphi_4 \cdot M_m + \varphi_5 \cdot M_m \rightarrow P \cdot 2 \cdot \Delta = M_m \cdot \left( 6 \cdot \frac{\Delta}{l} \right)$$

$$P_m = 3 \cdot \frac{M_m}{l}$$

... výsledná mezní únosnost rámu  
(menší než u výchylkového mechanismu)