

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky



8

Modely podloží



Základové konstrukce

Základové konstrukce zajišťují:

- přenesení tíhy vrchní stavby do podloží (půdního tělesa),
- zachování kontaktního napětí v základové spáře a v podloží v přípustných mezích,
- sedání celého objektu v přípustných mezích.



Základové konstrukce, pokračování

- Nejběžnější typy základových konstrukcí:
 - základové patky,
 - základové pásy,
 - základové desky,
 - základové rošty,
 - piloty.
- Podloží je těleso s velmi složitými vlastnostmi (problematika mechaniky zemin).
- Pro statické výpočty se zpravidla užívá zjednodušených modelů podloží.



Základové konstrukce, pokračování

- V kontaktní spáře se často počítá pouze s normálovým napětím, smykové napětí se zanedbává.
- Vazba mezi základovou konstrukcí a podložím je jednostranná, nemůže zde vznikat napětí tahové.
- Úlohy interakce (spolupůsobení) základových konstrukcí s podložím se také označují jako kontaktní úlohy.



Tuhý nosník (patka) na pružném podkladu

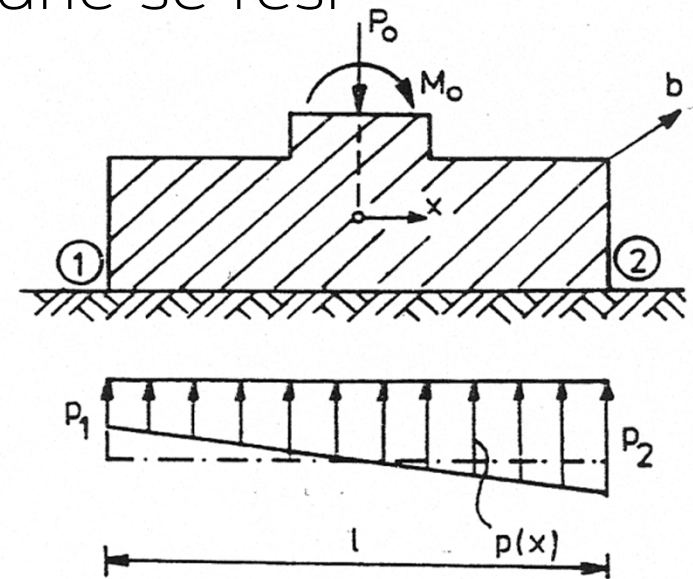
Předpoklady řešení:

- nosník (těleso) je dostatečně tuhý,
- průběh kontaktního napětí mezi nosníkem a podložím je lineární,
- kontaktní napětí je tlakové, případně se řeší s vyloučením tahu.

$$\sigma_{1,2} = \frac{P_0}{A} \pm \frac{M_0}{W} = \frac{P_0}{bl} \pm \frac{6M_0}{bl^2}$$

$$A = bl$$
$$W = \frac{1}{6}bl^2$$

$$p_{1,2} = \sigma_{1,2} \cdot b = \frac{P_0}{l} \pm \frac{6M_0}{l^2}$$

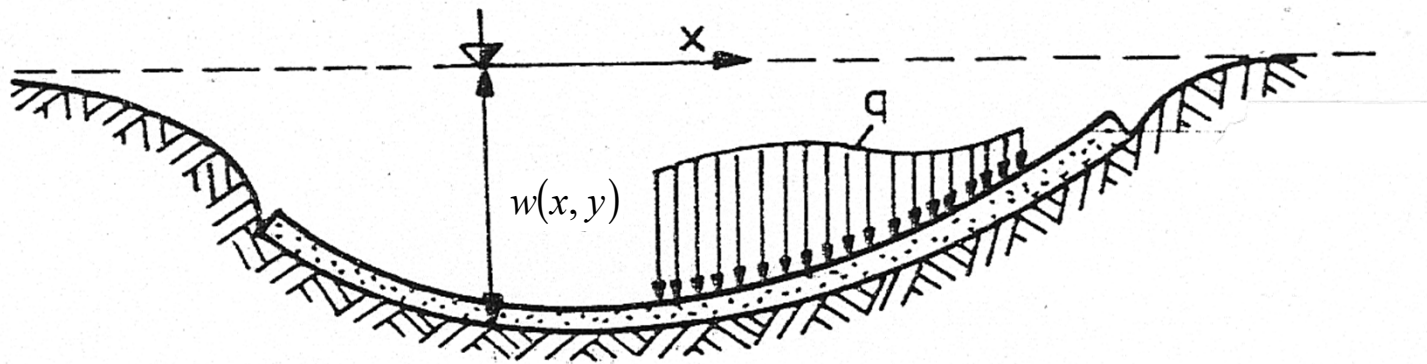


Uvedené řešení je zjednodušené (přibližné), nedostatečně zohledňuje interakci konstrukce s podložím.

Interakce nosníku s podložím

Nosník není zpravidla dostatečně tuhý a kontaktní napětí není lineární.

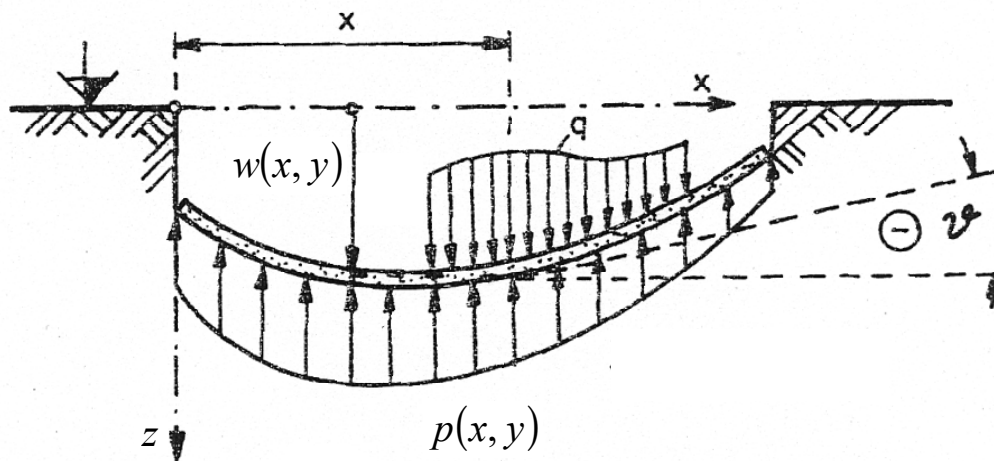
Kromě rovnovážných podmínek se na kontaktu uplatňují také podmínky deformační.



Pro řešení interakce konstrukce s podložím se uplatňují různé modely podloží, které reálné chování základové konstrukce a podloží vždy do určité míry idealizují.

Winklerův model podloží

Předpokládá, že reakce podloží je přímo úměrná zatlačení nosníku (desky, základu, konstrukce) do podloží.



Platí: $p(x, y) = C \cdot w(x, y)$

$p(x, y)$... reakce podloží [kNm^{-2}]

C ... součinitel stlačitelnosti podloží [kNm^{-3}]

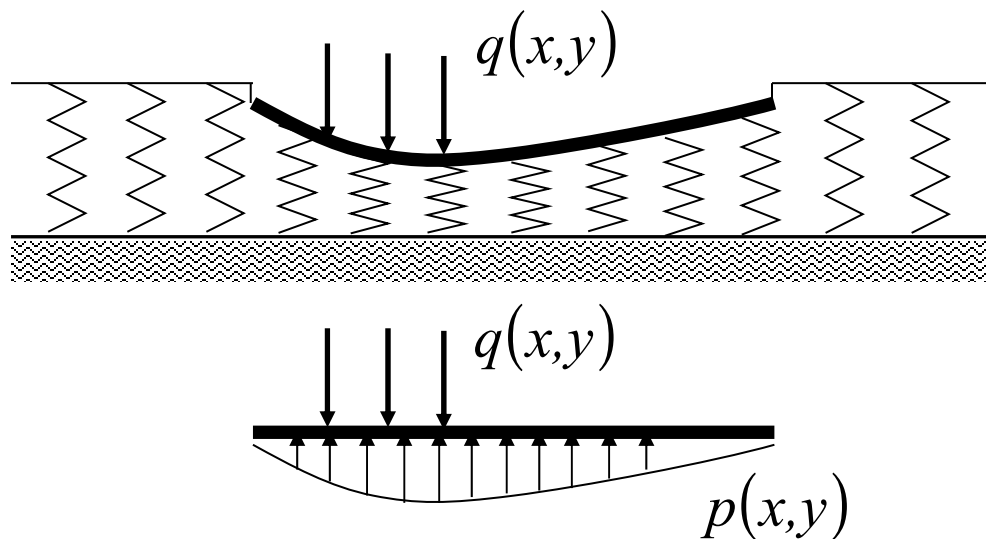
$w(x, y)$... průhyb nosníku (konstrukce) [m]

Winklerův model podloží, analytické řešení

Winklerův model je jednoparametrický model. Lze jej znázornit jako soubor pružin samostatně působících na kontaktu základu a podloží.

Tam, kde kontakt není, tj. mimo základ, se pružiny simulující podloží nedeformují, což neodpovídá realitě.

Winklerův model se pro svou jednoduchost přes zjevná zjednodušení a nedostatky v praxi často používá.

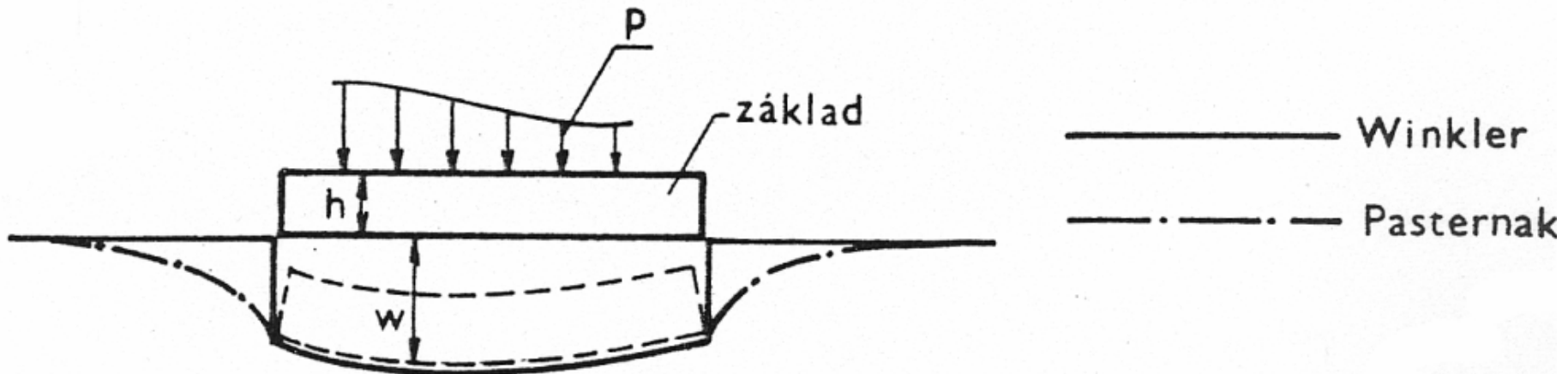


Součinitel stlačitelnosti podkladu C

Zemina	Stav	Součinitel stlačitelnosti C [kN/m ³]
Písky	kyprý, neuleželý násyp	4000
	trochu uležené	4000-12500
Písky a štěrky	mírně uležené	12500-30000
	středně uležené	30000-75000
	dobře až velmi dobře uležené	75000-150000
Hlinité půdy	promočené	20000-30000
	vlhké	40000-50000
	suché	60000-80000
	velmi suché	100000

Pasternakův model

- Pasternakův model odstraňuje některé nedostatky Winklerova modelu.
- Kromě normálových sil uvažuje v podloží i se smykovými silami.
- Nespojité zaboření objektu podle Winklera je u Pasternakova modelu nahrazeno průhybovou kotlinou.



Pasternakův model, pokračování

Pasternakův model je dvojparametrický a lépe odpovídá realitě.

Platí:

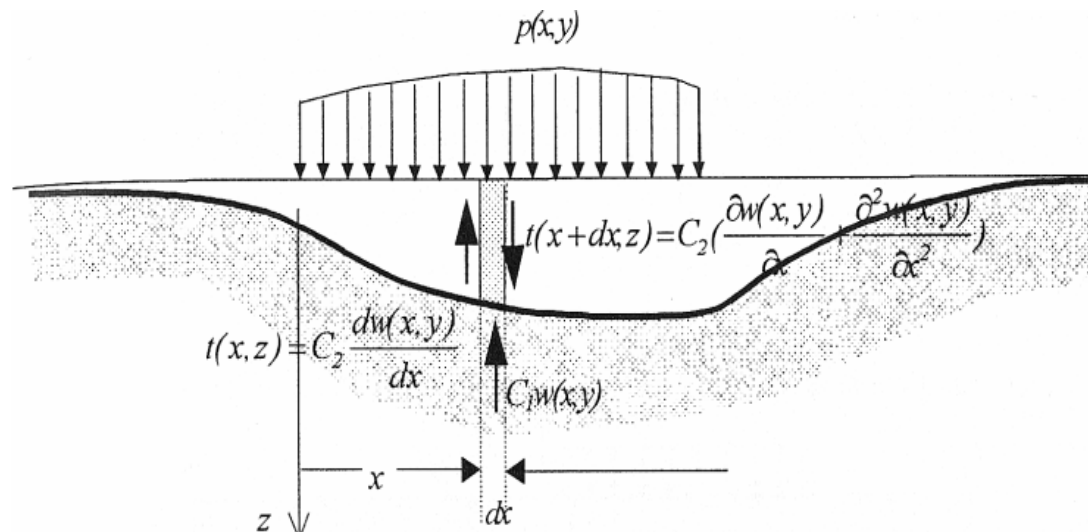
$$p(x,y) = C_1 \cdot w(x,y) - C_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$p(x,y)$... reakce podloží [kNm^{-2}]

C_1 ... součinitel poddajnosti podkladu [kNm^{-3}]

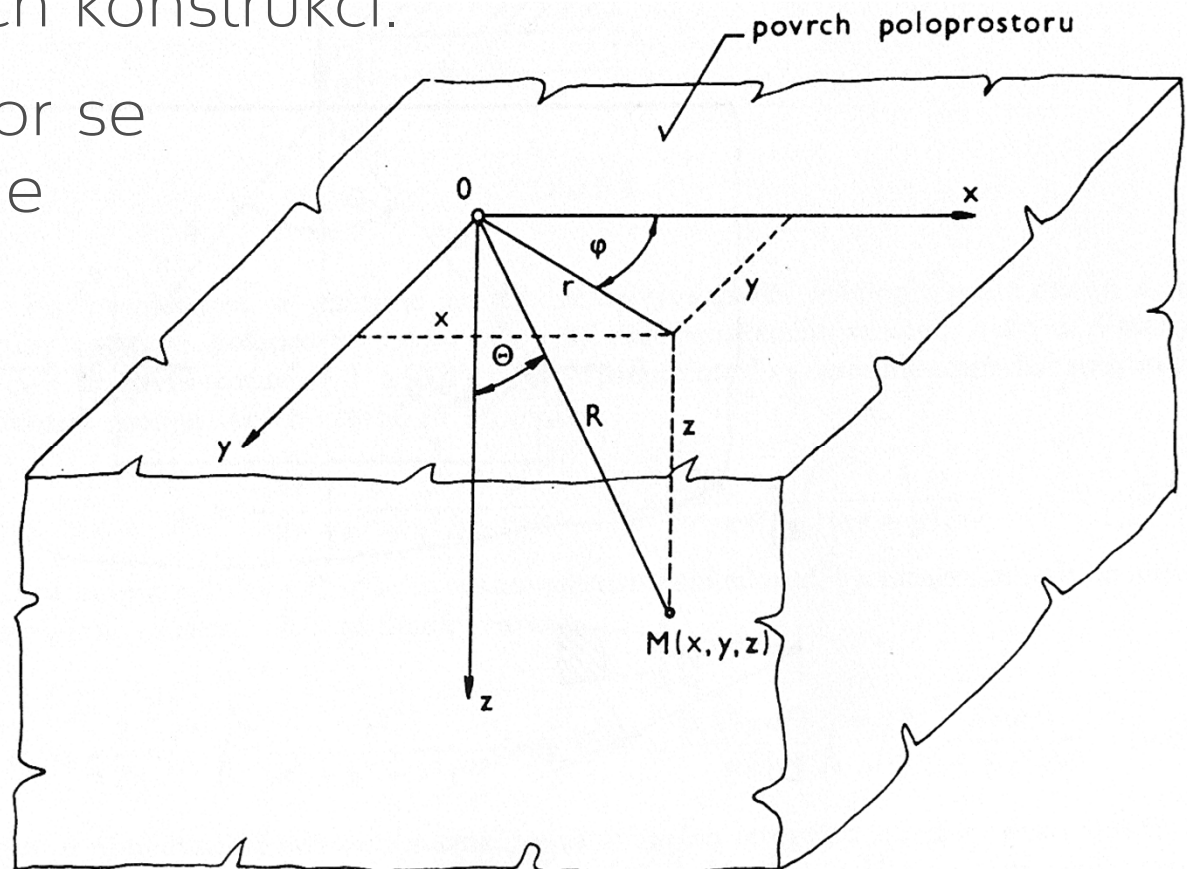
C_2 ... součinitel přenášení smykových sil [kNm^{-1}]

$w(x,y)$... průhyb nosníku (konstrukce) [m]



Pružný poloprostor

- Pružný poloprostor je pružné těleso ohraničené rovinou (povrchem poloprostoru).
- Pružný poloprostor je jednou z možných idealizací podloží stavebních konstrukcí.
- Pružný poloprostor se zpravidla považuje za homogenní a izotropní.



Pružný poloprostor, pokračování

Zatížení poloprostoru silou, která působí kolmo k povrchu poloprostoru řešil Joseph Valentin Boussinesq.

Pro složky napětí odvodil:

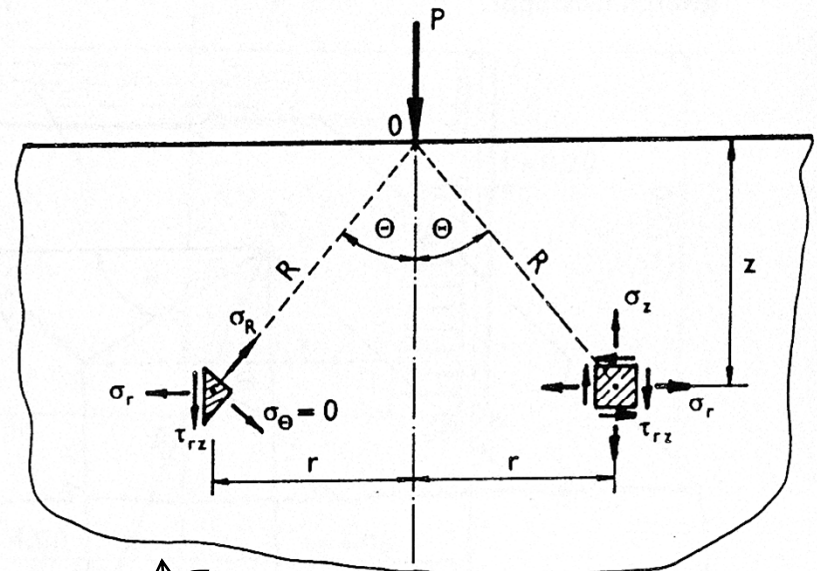
$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5}$$

$$R = \sqrt{z^2 + r^2}$$

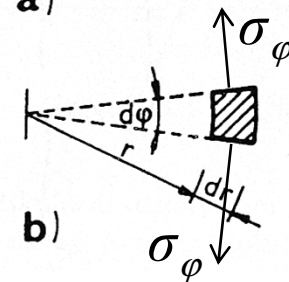
$$\sigma_r = -\frac{P}{2\pi} \cdot \left[\frac{1-2\mu}{R \cdot (R+z)} - \frac{3zr^2}{R^5} \right]$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{P}{2\pi} \cdot (1-2\mu) \cdot \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R \cdot (R+z)} \right]$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^2 r}{R^5}$$



a)



b)

Pružný poloprostor, pokračování

Pro složky posuvů u ve směru r bylo odvozeno:

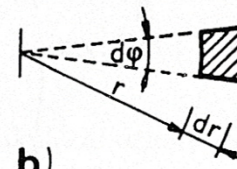
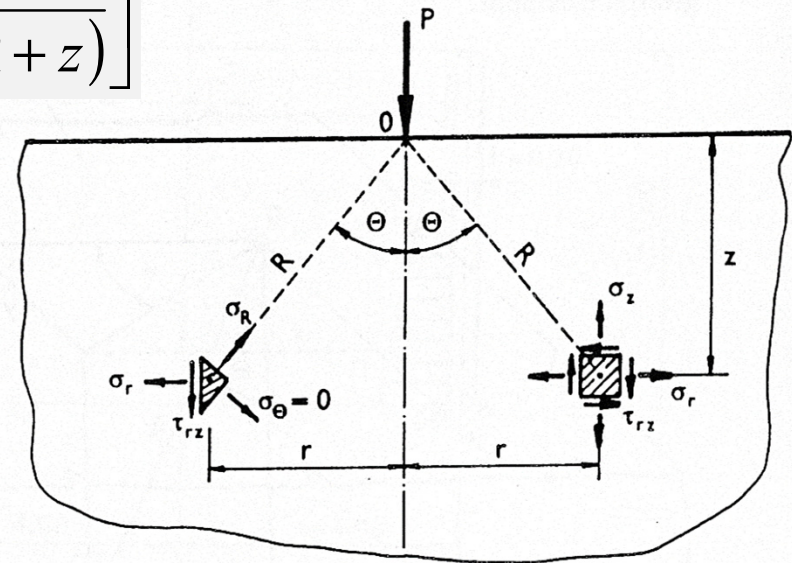
$$u(r) = \frac{P}{2\pi E} \cdot (1 + \mu) \cdot \left[\frac{zr}{R^3} - (1 - 2\mu) \cdot \frac{r}{R \cdot (R + z)} \right]$$

Pro složky posuvů w ve směru osy z platí:

$$w(z) = \frac{P}{2\pi E} \cdot (1 + \mu) \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - \mu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right]$$

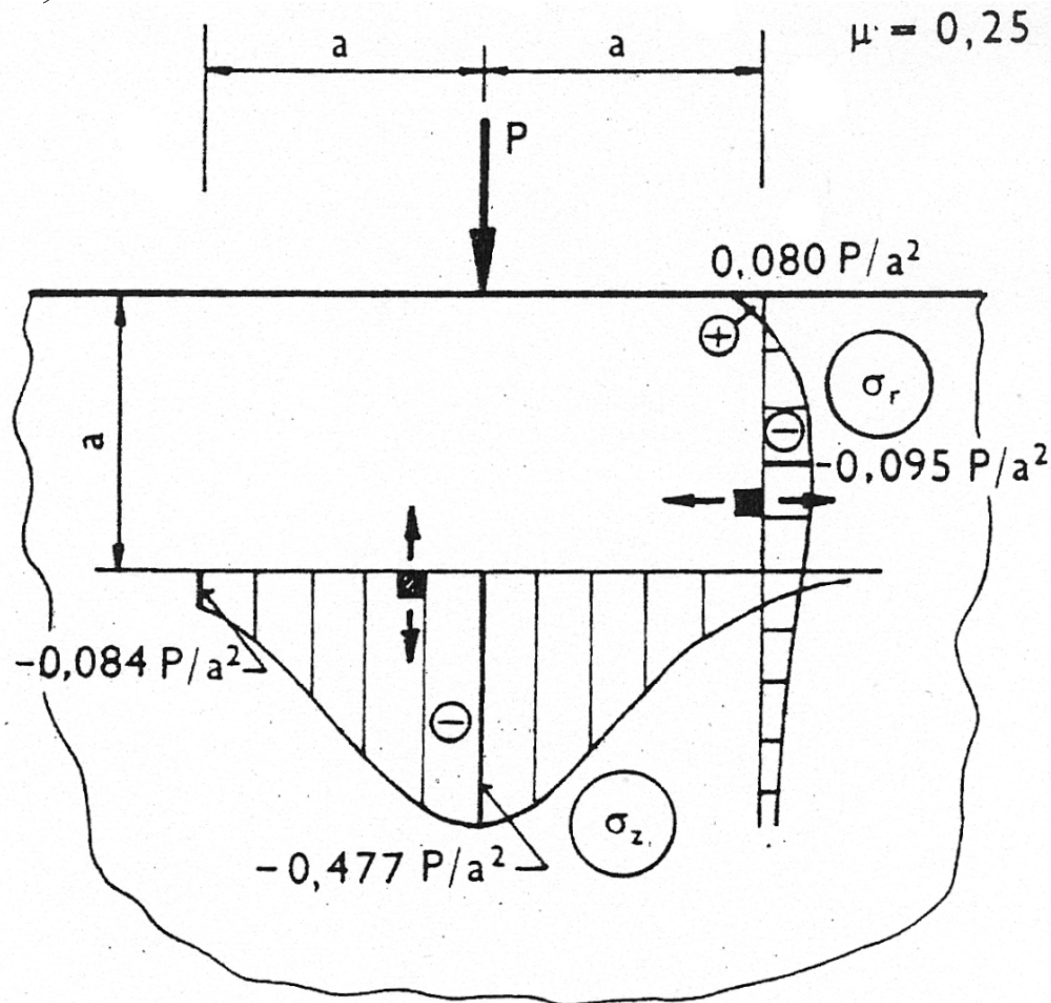
pro $z = 0$ (povrch) je:

$$u = -\frac{P \cdot (1 - \mu - 2\mu^2)}{\pi E r} \quad w = \frac{P \cdot (1 - \mu^2)}{\pi E r}$$



Pružný poloprostor, pokračování

Průběh složek napětí σ_r a σ_z v řezu vedeném paprskem síly pro $\mu = 0,25$:



Pružný poloprostor, rovnoměrné zatížení na ploše obdélníka

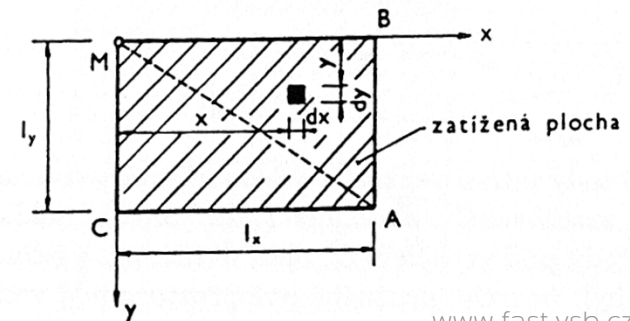
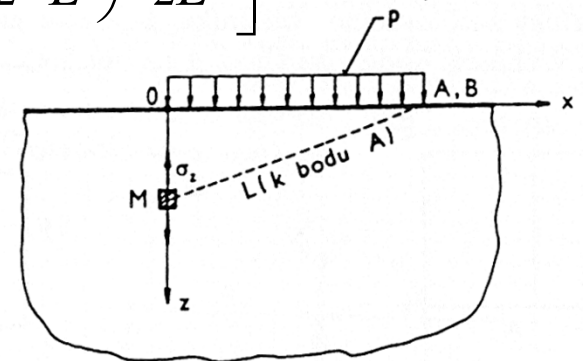
Pro bod M ležící v libovolné hloubce z pod vrcholem obdélníka na povrchu s rovnoměrným zatížením byly pro výpočet složky napětí σ_z a posunutí w pro $z = 0$ odvozeny integrací následující vztahy :

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\pi} \cdot \left[\frac{l_x \cdot l_y \cdot z}{L} \cdot \left(\frac{1}{l_x^2 + z^2} + \frac{1}{l_y^2 + z^2} \right) + \arctan \left(\frac{l_x \cdot l_y}{z \cdot L} \right) \frac{l_x l_y}{zL} \right]$$

$$w = \frac{p \cdot (1 - \mu^2)}{\pi \cdot E} \cdot \left[l_x \cdot \ln \left(\frac{l_y + s}{l_x} \right) + l_y \cdot \ln \left(\frac{l_x + s}{l_y} \right) \right]$$

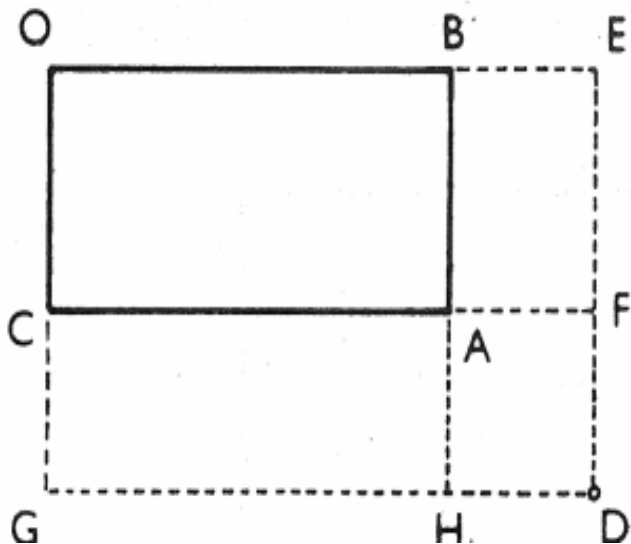
$$s = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$$

$$L = \sqrt{s^2 + z^2} = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + z^2}$$

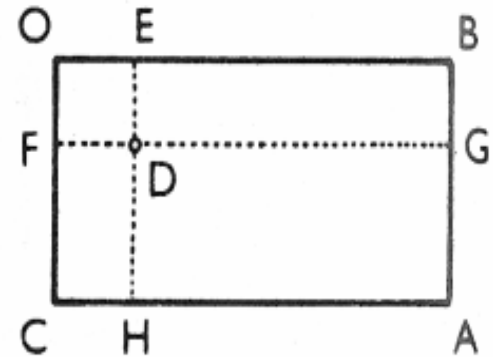


Pružný poloprostor, rovnoměrné zatížení na ploše obdélníka

Vztahy pro výpočet složky napětí σ_z a posunutí w pro $z = 0$ lze využít i pro body ležící mimo vrchol skutečné zatěžovací obdélníkové plochy. Je přitom nutno dát příslušný bod do vrcholu dvou, případně čtyř zatěžovacích ploch.



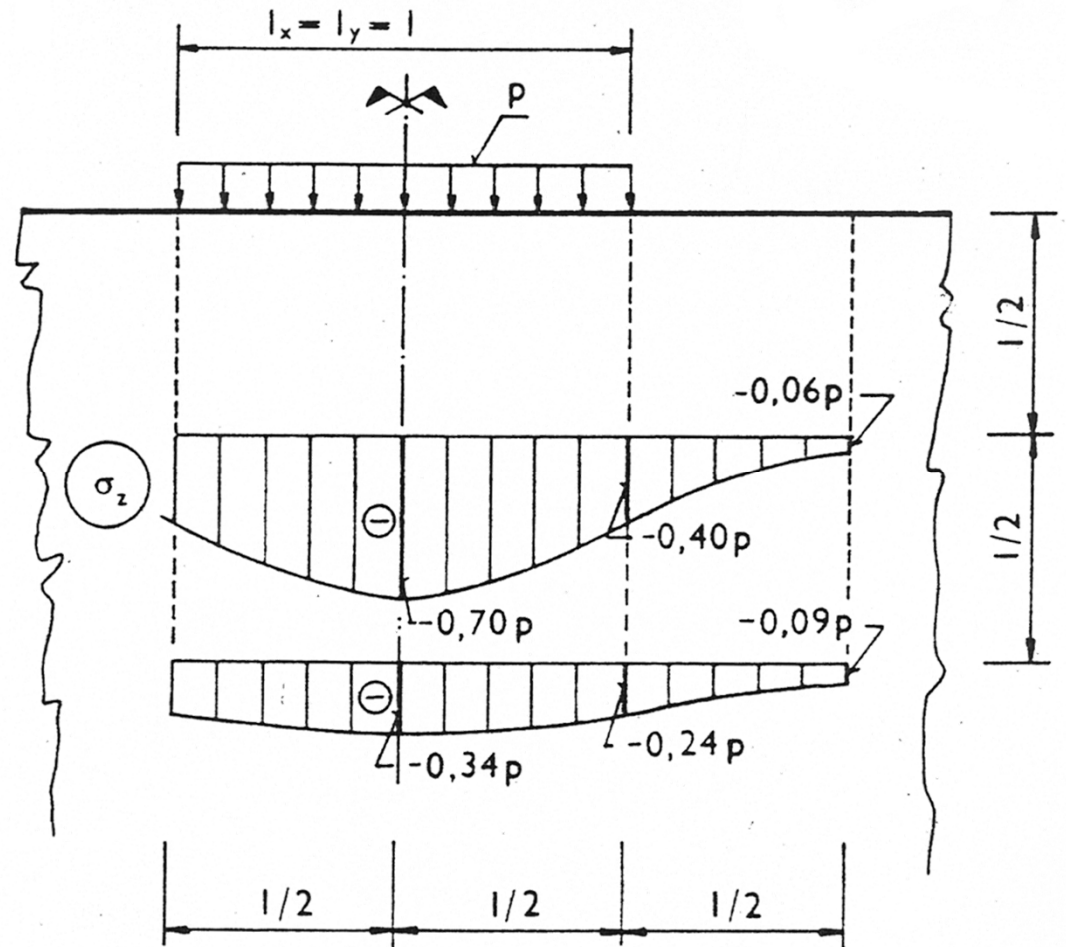
a)



b)

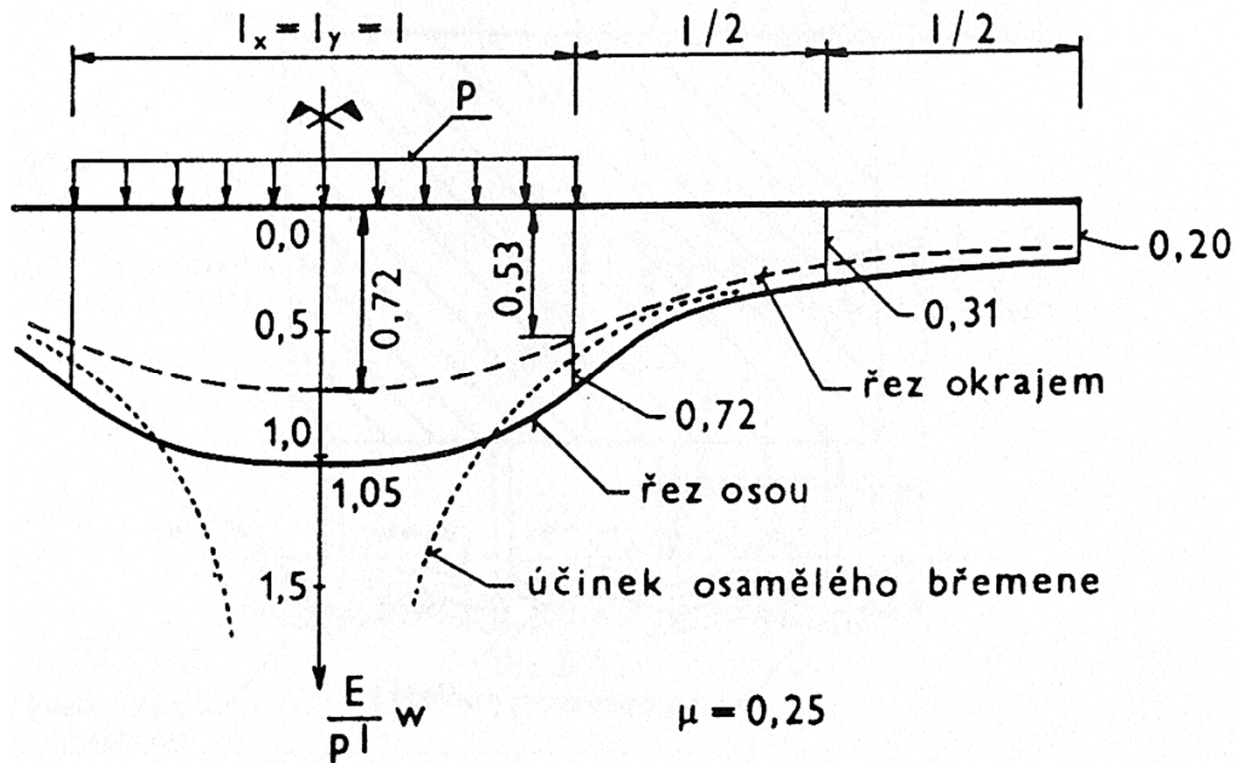
Pružný poloprostor, rovnoměrné zatížení na ploše obdélníka, příklad

Čtvercová zatěžovací plocha: průběh σ_z pro $z = l/2$ a $z = l$ podél osy zatížení pro $\mu = 0,25$.



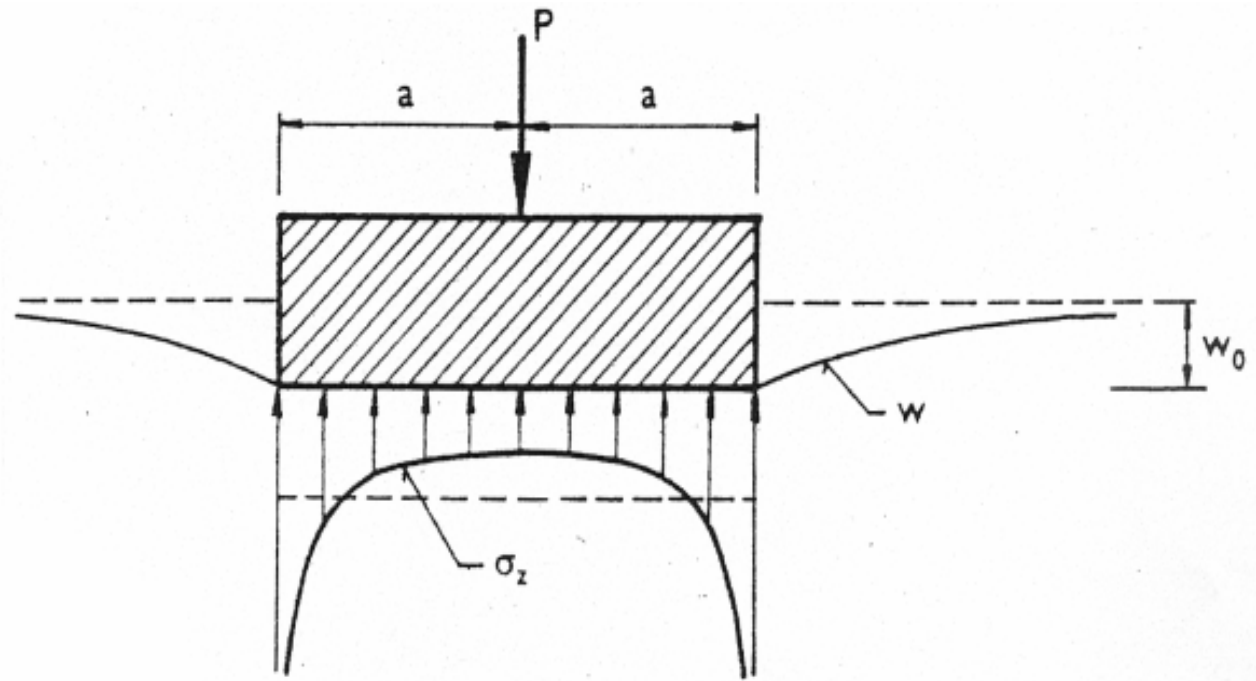
Pružný poloprostor, rovnoměrné zatížení na ploše obdélníka, příklad

Čtvercová zatěžovací plocha, $\mu = 0,25$, průběh w na povrchu podél osy a okraje zatížení.



Pružný poloprostor, centricky zatížený dokonale tuhý základ

Průběh napětí σ_z a průhyb w na povrchu pružného poloprostoru pod tuhým základem:



Pružný poloprostor, centricky zatížený dokonale tuhý základ, pokračování

Při zatížení silou P kruhového základu o poloměru a lze průhyb w_0 vyjádřit vztahem:

$$w_0 = \frac{(1 - \mu^2) \cdot P}{2Ea}$$

Při zatížení silou P čtvercového základu o straně $l = 2a$ je pak průhyb w_0 dán vztahem:

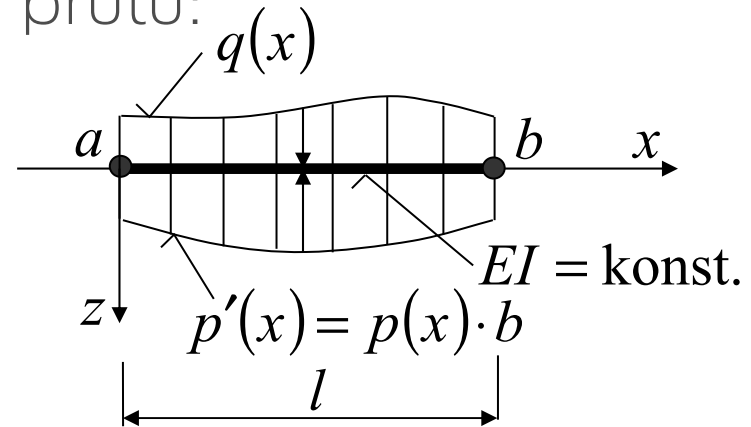
$$w_0 \approx 0,88 \cdot \frac{(1 - \mu^2) \cdot P}{2El}$$

Winklerův model podloží, analytické řešení nosníku na pružném podloží

Diferenciální rovnice ohybové čáry prutu:

$$w'' = -\frac{M}{EI} \rightarrow M = -EI \cdot w'' \quad V = \frac{dM}{dx}$$

$$q_c = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{d^2w}{dx^2}$$



Pro $q_c(x) = q(x) - p'(x) = q(x) - p(x) \cdot b = q(x) - C \cdot b \cdot w(x)$

b ... šířka nosníku, C ... součinitel stlačitelnosti podkladu

$$\frac{d^2}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2} + C \cdot b \cdot w(x) = q(x)$$

Pro $EI = \text{konst.}$ je $\frac{d^2}{dx^2} \cdot \frac{d^2w(x)}{dx^2} + \frac{C \cdot b \cdot w(x)}{EI} = \frac{q(x)}{EI}$

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} + \frac{C \cdot b \cdot w(x)}{EI} = \frac{q(x)}{EI}$$

Winklerův model podloží, analytické řešení nosníku na pružném podloží

Rovnice
$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{C \cdot b \cdot w(x)}{EI} = \frac{q(x)}{EI}$$

je lineární, nehomogenní diferenciální rovnice 4. řádu.

Její analytické řešení je známo pro nosníky nekonečné, polonekonečné i pro nosníky konečné délky. Tato řešení jsou použitelná pro relativně malou skupinu úloh.

Uvedenou rovnici lze řešit flexibilněji také metodou sítí.



Winklerův model podloží, řešení metodou sítí

$$\text{Rovnici } \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{C \cdot b}{EI} \cdot w(x) = \frac{q(x)}{EI} \rightarrow \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{k}{EI} \cdot w(x) = \frac{q(x)}{EI}$$

Ize převést na řešení lineárních rovnic s pomocí diferencních vztahů:

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i = \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_i = \frac{w_{i+2} - 2 \cdot w_{i+1} + 2 \cdot w_{i-1} - w_{i-2}}{2 \cdot \Delta x^3}$$

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_i = \frac{w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + 6 \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4}$$

Při určení w_i pak lze stanovit i složky vnitřních sil:

$$M = -EI \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \rightarrow M_i = -EI \cdot \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = -EI \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} \rightarrow V_i = -EI \cdot \frac{w_{i+2} - 2 \cdot w_{i+1} + 2 \cdot w_{i-1} - w_{i-2}}{2 \cdot \Delta x^3}$$

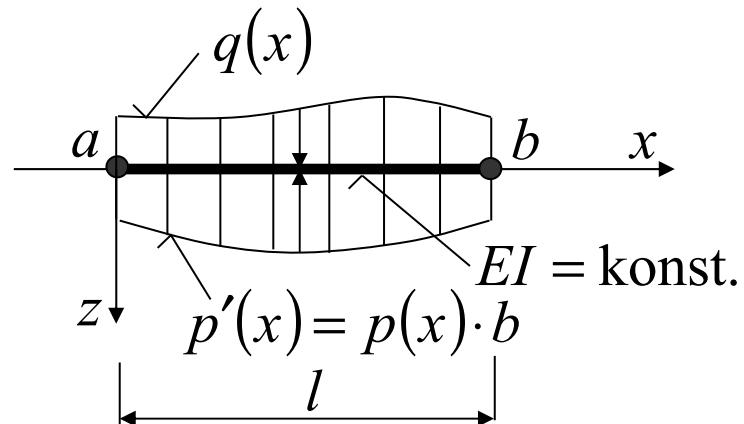
Pasternakův model podloží, řešení nosníku na pružném podloží

Diferenciální rovnice ohybové

čáry prutu: $M = -EI \cdot w''$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$q_c = -\frac{dV}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$



Pro $q_c(x) = q(x) - p'(x) = q(x) - p(x) \cdot b = q(x) - \left[C_1 \cdot w(x) - C_2 \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \cdot b$

b ... šířka nosníku, C_1, C_2 ... součinitelé podkladu

$$\frac{d^2}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left[C_1 \cdot w(x) - C_2 \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \cdot b = q(x)$$

Pro $EI = \text{konst.}$ je $\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{\left[C_1 \cdot w(x) - C_2 \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \cdot b}{EI} = \frac{q(x)}{EI}$

Pasternakův model podloží, řešení nosníku na pružném podloží

Rovnice

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{\left[C_1 \cdot w(x) - C_2 \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \cdot b}{EI} = \frac{q(x)}{EI}$$

je lineární nehomogenní diferenciální rovnicí 4. řádu.

Uvedenou rovnicí lze řešit metodou sítí.



Pasternakův model podloží, řešení nosníku metodou sítí

$$\text{Rovnici } \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{\left[C_1 \cdot w(x) - C_2 \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] \cdot b}{EI} = \frac{q(x)}{EI} \rightarrow \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{k_1}{EI} \cdot w(x) - \frac{k_2}{EI} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI}$$

Ize převést na řešení lineárních rovnic s pomocí
diferenčních vztahů:

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i = \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_i = \frac{w_{i+2} - 2 \cdot w_{i+1} + 2 \cdot w_{i-1} - w_{i-2}}{2 \cdot \Delta x^3}$$

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_i = \frac{w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + 6 \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4}$$

Při určení w_i pak lze stanovit i složky vnitřních sil:

$$M = -EI \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \rightarrow M_i = -EI \cdot \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = -EI \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} \rightarrow V_i = -EI \cdot \frac{w_{i+2} - 2 \cdot w_{i+1} + 2 \cdot w_{i-1} - w_{i-2}}{2 \cdot \Delta x^3}$$

Pasternakův model podloží, řešení nosníku metodou sítí

Rovnici
$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{k_1}{EI} \cdot w(x) - \frac{k_2}{EI} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI}$$

Ize s využitím diferenčních vztahů:

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i = \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_i = \frac{w_{i+2} - 2 \cdot w_{i+1} + 2 \cdot w_{i-1} - w_{i-2}}{2 \cdot \Delta x^3}$$

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_i = \frac{w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + 6 \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4}$$

upravit na tvar:

$$\frac{w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + 6 \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} - \frac{k_2}{EI} \cdot \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{k_1}{EI} \cdot w_i = \frac{q(x)}{EI}$$

Pasternakův model podloží, řešení nosníku metodou sítí

Na okrajích nosníků musí být splněny okrajové podmínky, stejně jako při řešení nosníku s Winklerovým modelem podloží. Jejich formulace vede k rozepsání čtyř rovnic.

U Pasternakova modelu se deformuje podloží i mimo nosník. Bude zde platit rovnice:

$$p(x, y) = C_1 \cdot w(x, y) - C_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

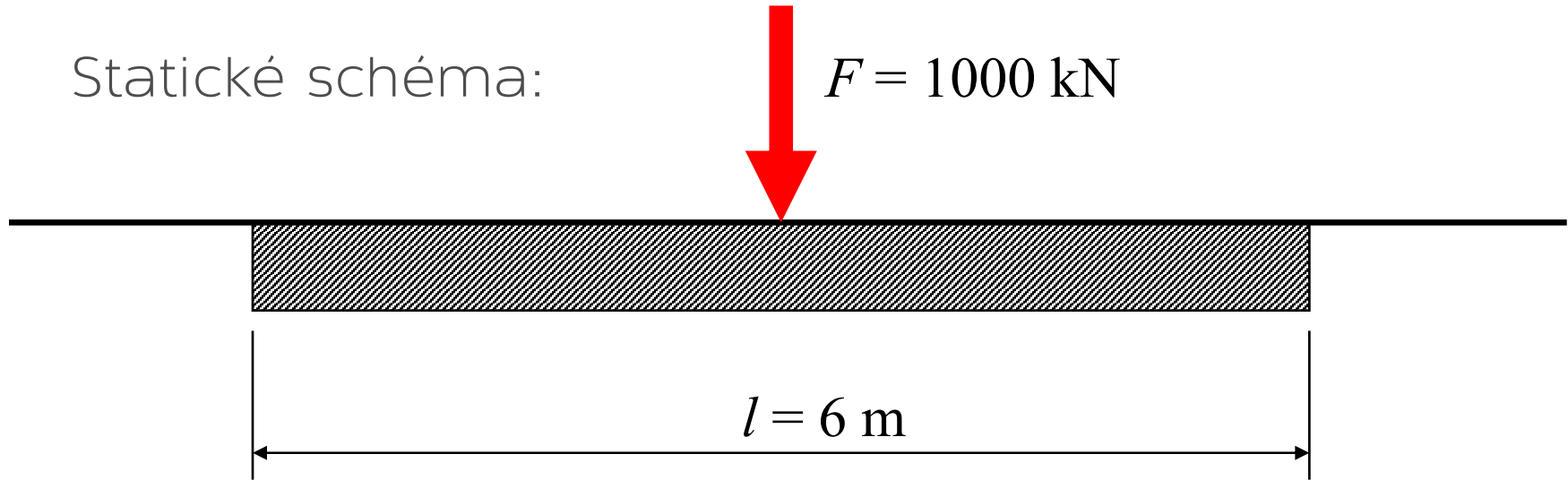
Pro každý bod i ležící mimo nosník ji lze nahradit lineární rovnicí:

$$C_1 \cdot w_i - C_2 \cdot \frac{w_{i+1} - 2 \cdot w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

Řešením soustavy lineárních rovnic jsou posutí w_i , která umožňují stanovit složky vnitřních sil nosníku a reakce podloží.

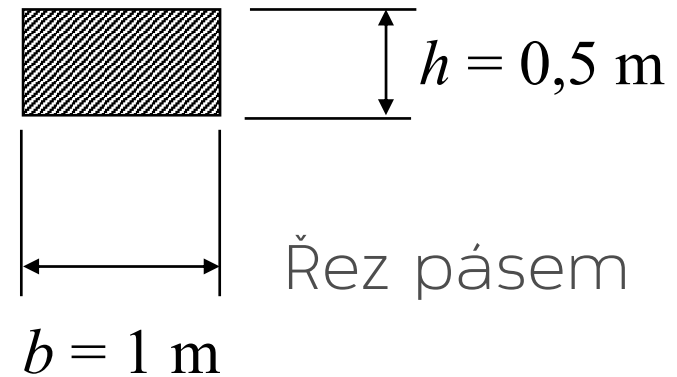
Zadání příkladu: nosník na pružném podkladu

Statické schéma:



Nosník délky 6 m s modulem pružnosti v tahu a tlaku $E = 20 \text{ GPa}$ a obdélníkovém průřezu $h = 0,5 \text{ m}$ a $b = 1,0 \text{ m}$ je zatěžován silou $F = 1000 \text{ kN}$ v polovině rozpětí.

Nosník je uložen na pružném podkladu s modulem stlačitelnosti podkladu $C = 36 \text{ MN/m}^3$.



Příklad: nosník na pružném podkladu, Winklerův model, řešení metodou sítí

Nosník lze rozdělit např. na $n = 6$ dílků o šířce $\Delta x = 1$ m:

Přípravný výpočet:

$$k = C \cdot b = 3,6 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$$

Okrajové podmínky:

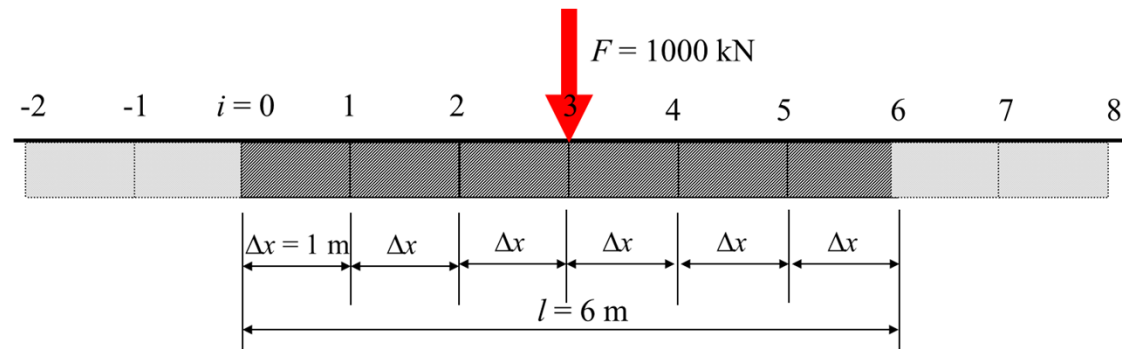
Na okrajích nosníku v bodech $i = 0$ a $i = 6$ platí:

$$M_0 = 0 \rightarrow -(w_1 - 2 \cdot w_0 - w_{-1}) = 0 \rightarrow w_{-1} = 2 \cdot w_0 - w_1$$

$$V_0 = 0 \rightarrow -(w_2 - 2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_{-1} - w_{-2}) = 0 \rightarrow w_{-2} = w_2 - 4 \cdot w_1 + 4 \cdot w_0$$

$$M_6 = 0 \rightarrow -(w_7 - 2 \cdot w_6 + w_5) = 0 \rightarrow w_7 = 2 \cdot w_6 - w_5$$

$$V_6 = 0 \rightarrow -(w_8 - 2 \cdot w_7 + 2 \cdot w_5 - w_4) = 0 \rightarrow w_8 = w_4 - 4 \cdot w_5 + 4 \cdot w_6$$



Příklad: nosník na pružném podkladu, Winklerův model, řešení metodou sítí

Rovnici $\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{k}{EI} \cdot w(x) = \frac{q(x)}{EI}$ lze upravit na tvar:

$$\frac{w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + 6 \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} + \frac{k}{EI} \cdot w_i = \frac{q_i}{EI}$$

Konkrétně: $\Delta x = 1 \text{ m}$

$$EI = 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 0,5^3 = 2,0833 \cdot 10^5$$

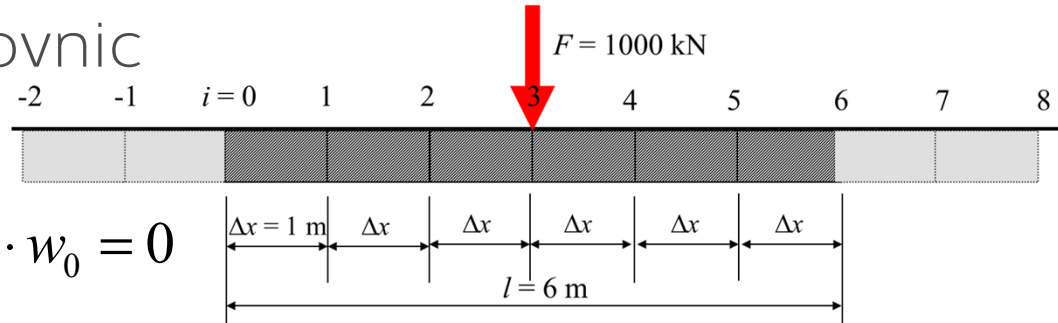
$$\frac{k}{EI} = \frac{3,6 \cdot 10^4}{2,0833 \cdot 10^5} = 0,1728$$

$$w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + \left(6 + \frac{k}{EI}\right) \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2} = \frac{q_i}{EI}$$

$$w_{i+2} - 4 \cdot w_{i+1} + 6,1728 \cdot w_i - 4 \cdot w_{i-1} + w_{i-2} = \frac{q_i}{2,0833 \cdot 10^5}$$

Příklad: nosník na pružném podkladu, Winklerův model, řešení metodou sítí

Rozepsání diferenčních rovnic pro body 0 až 6 nosníku:



Bod 0: $2 \cdot w_2 - 4 \cdot w_1 + 2,1728 \cdot w_0 = 0$

Bod 1: $w_3 - 4 \cdot w_2 + 5,1728 \cdot w_1 - 2 \cdot w_0 = 0$

Bod 2: $w_4 - 4 \cdot w_3 + 6,1728 \cdot w_2 - 4 \cdot w_1 + w_0 = 0$

Bod 3: $w_5 - 4 \cdot w_4 + 6,1728 \cdot w_3 - 4 \cdot w_2 + w_1 = \frac{q_3}{EI} = 4,8 \cdot 10^{-3}$

Bod 4: $w_6 - 4 \cdot w_5 + 6,1728 \cdot w_4 - 4 \cdot w_3 + w_2 = 0$

Bod 5: $-2 \cdot w_6 + 5,1728 \cdot w_1 - 4 \cdot w_4 + w_3 = 0$

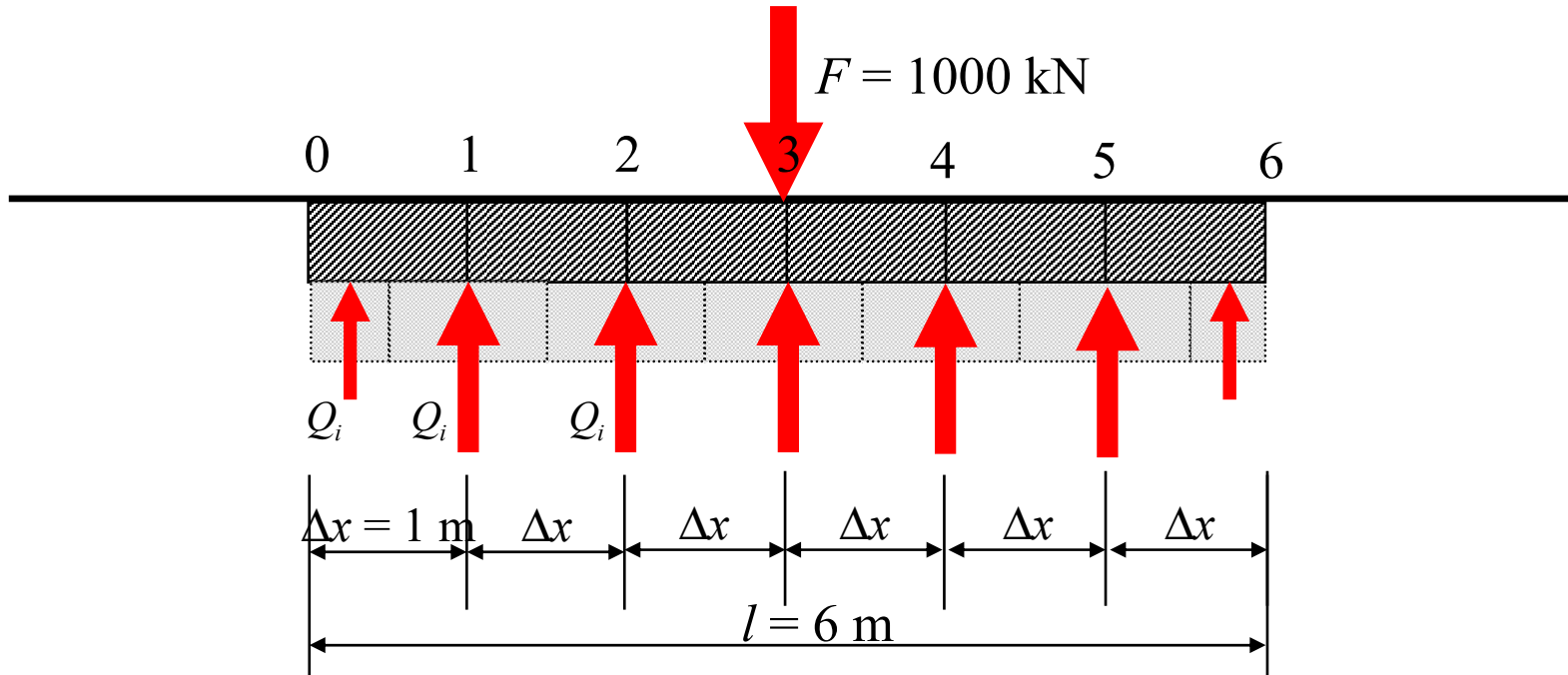
Bod 6: $2,1728 \cdot w_6 - 4 \cdot w_5 + 2 \cdot w_4 = 0$

Příklad: nosník na pružném podkladu, sestavení a řešení lineárních rovnic

bod	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	PS
0	2,1728	-4,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	-2,0000	5,1728	-4,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	1,0000	-4,0000	6,1728	-4,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0000	1,0000	-4,0000	6,1728	-4,0000	1,0000	0,0000	0,0048
4	0,0000	0,0000	1,0000	-4,0000	6,1728	-4,0000	1,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	-4,0000	5,1728	-2,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,0000	-4,0000	2,1728	0,0000

Kořeny w [m]	
1,3740E-03	w_0
3,6945E-03	w_1
5,8963E-03	w_2
7,2222E-03	w_3
5,8963E-03	w_4
3,6945E-03	w_5
1,3740E-03	w_6

Příklad: nosník na pružném podkladu, výpočet reakcí a složek vnitřních sil



$$p(x, y) = C \cdot w(x, y)$$

$$p'(x) = p(x, y) \cdot b$$

$$p'_i = k \cdot w_i$$

... reakce podloží [kN/m]

$$R_z = F - p'_i \cdot l = F - \sum_{i=0}^6 Q_i = 0$$

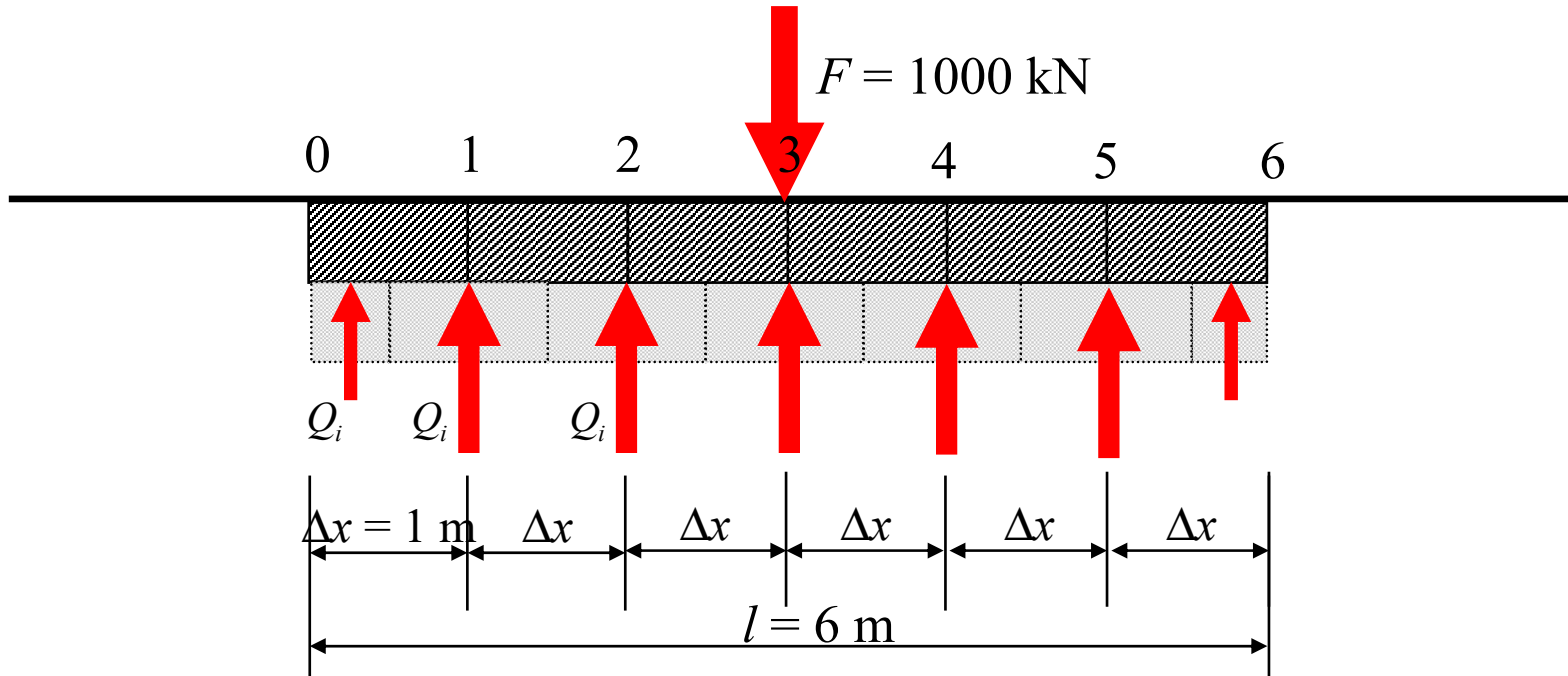
$$Q_i = p'_i \cdot \Delta x$$

... reakce v uzlech 1..5 [kN]

$$Q_i = p'_i \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

... reakce v krajních uzlech 0 a 6 [kN]

Příklad: nosník na pružném podkladu, výpočet reakcí a složek vnitřních sil



1. podle
diferenčních
vztahů

$$M_i = -EI \cdot \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$V_i = -EI \cdot \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2\Delta x^3}$$

2. podle
principů
statiky

$$M_i = \sum_{j=1}^i Q_{j-1} \cdot (x_i - x_{Q_{j-1}}) - \left. F \cdot \left(x_i - \frac{l}{2} \right) \right|_{x_i > \frac{l}{2}}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i Q_j - \left. F \right|_{x_i > \frac{l}{2}}$$

Příklad: nosník na pružném podkladu, výpočet reakcí a složek vnitřních sil

Numericky:

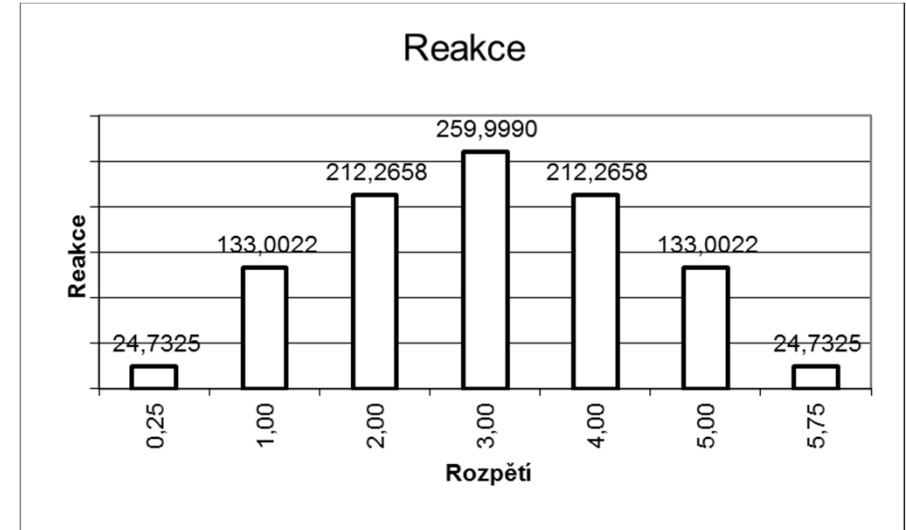
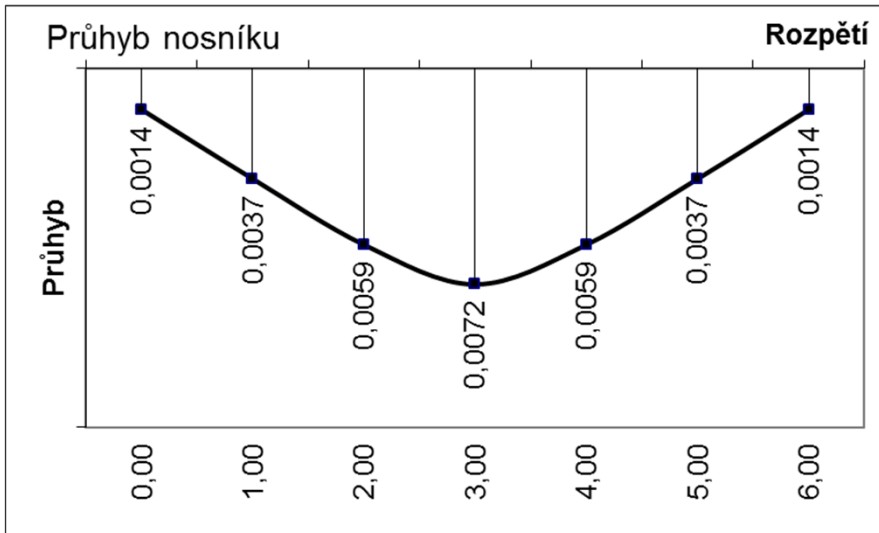
p_i [kN/m]		Reakce Q_i [kN]		x_{Qi} [m]	x_i [m]
p_0	49,4649	Q_0	24,7325	0,2500	0,0000
p_1	133,0022	Q_1	133,0022	1,0000	1,0000
p_2	212,2658	Q_2	212,2658	2,0000	2,0000
p_3	259,9990	Q_3	259,9990	3,0000	3,0000
p_4	212,2658	Q_4	212,2658	4,0000	4,0000
p_5	133,0022	Q_5	133,0022	5,0000	5,0000
p_6	49,4649	Q_6	24,7325	5,7500	6,0000
		Σ	1000,0000		

Podle principů statiky				
M_i [kNm]			V_{iL} [kN]	V_{iP} [kN]
M_0	0,0000	V_0	0,0000	X
M_1	18,5494	V_1	91,2336	
M_2	176,2841	V_2	263,8676	
M_3	546,2846	V_3	500,0000	-500,0000
M_4	176,2841	V_4	X	-263,8676
M_5	18,5494	V_5		-91,2336
M_6	0,0000	V_6		0,0000

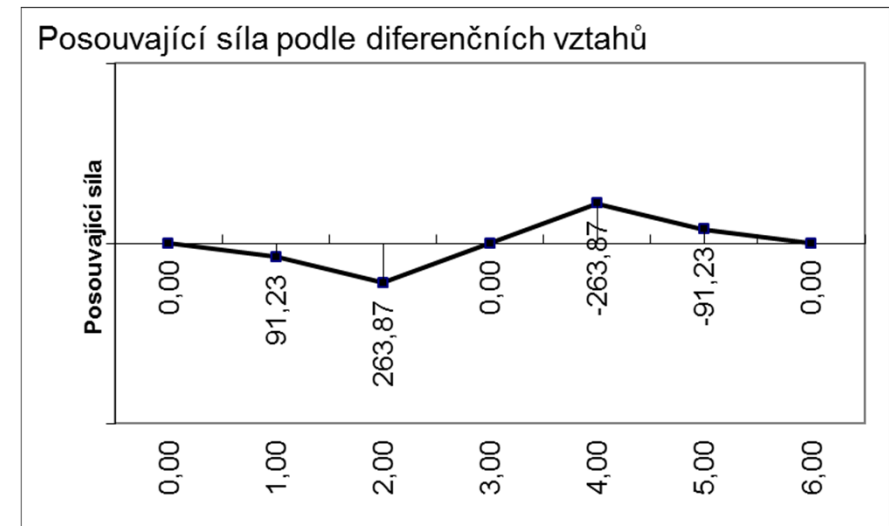
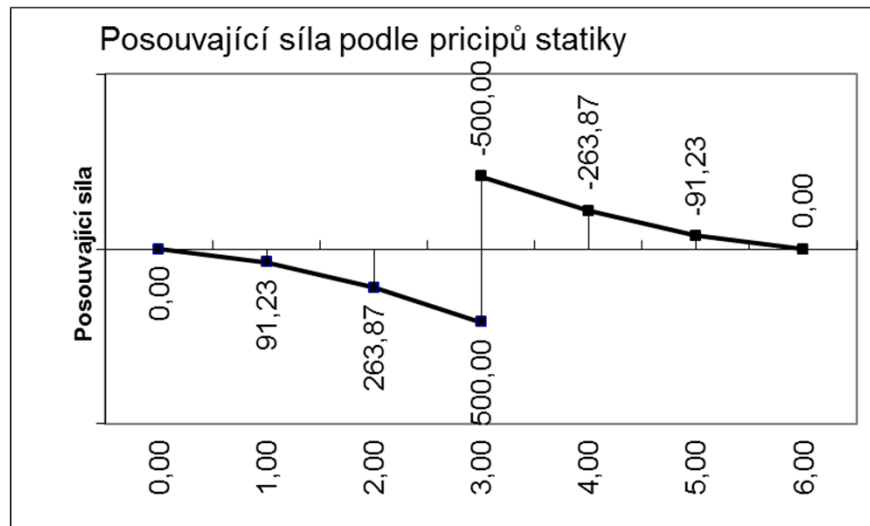
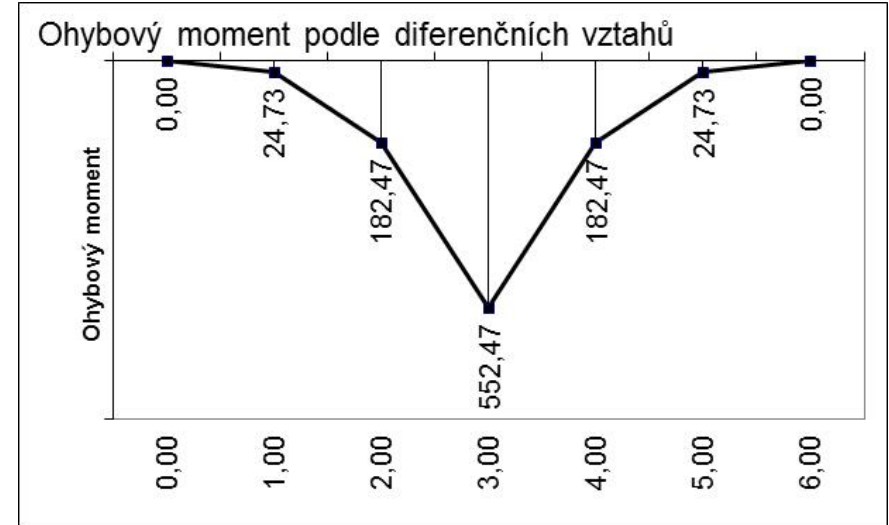
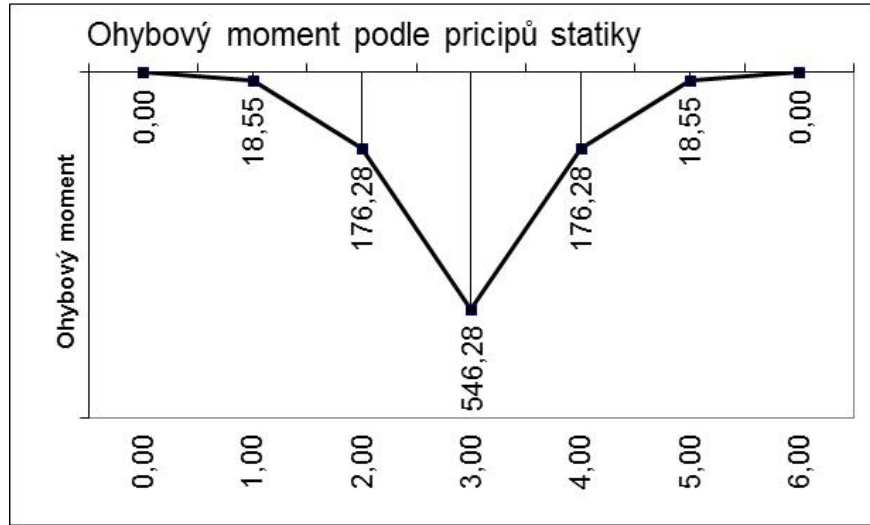
Pomocí diferenčních vztahů			
M_i [kNm]		V_i [kN]	
M_0	0,0000	V_0	0,0000
M_1	24,7325	V_1	91,2336
M_2	182,4672	V_2	263,8676
M_3	552,4677	V_3	0,0000
M_4	182,4672	V_4	-263,8676
M_5	24,7325	V_5	-91,2336
M_6	0,0000	V_6	0,0000

Příklad: nosník na pružném podkladu, průběh posunutí a reakcí

Graficky:



Příklad: nosník na pružném podkladu, průběh složek vnitřních sil



Winklerův model podloží, jiné metody řešení

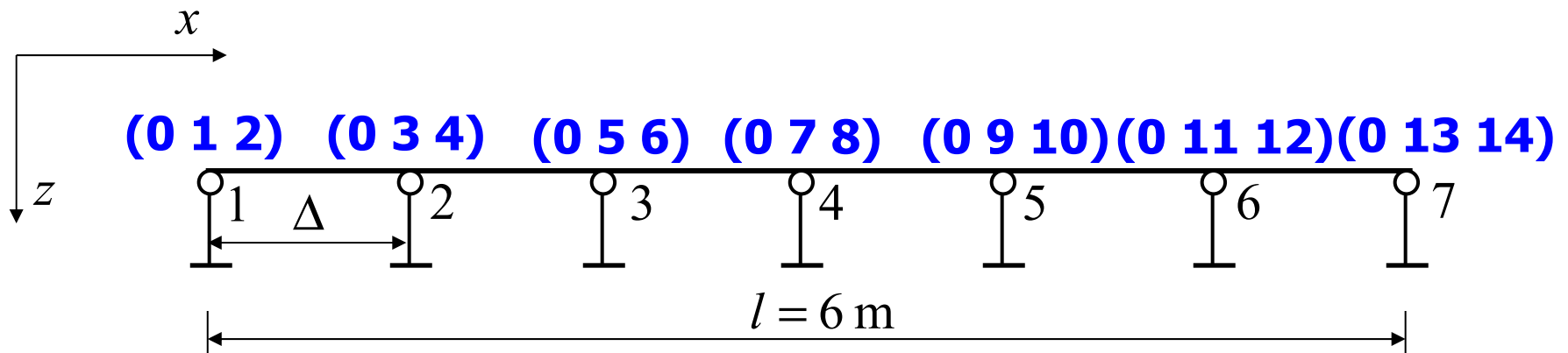
Interakce nosníku a jiných konstrukcí s Winklerovým modelem podloží nebo i s jinými modely podloží je řešitelná také:

- silovou metodou,
- obecnou deformační metodou,
- smíšenou metodou - Žemočkinova metoda,
- metodou konečných prvků.



Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou

Popis výpočetního modelu:



- 6 vodorovných prutů (oboustranně monoliticky připojené)



- 7 svislých prutů (pravostranně kloubově připojené)



Příklad: nosník na Winklerově podloží, princip řešení ODM

Síla F_i ve svislých prutech:

$$F_i = p_i \cdot b \cdot \Delta \qquad F_i = p_i \cdot b \cdot \frac{\Delta}{2} \quad \text{na okrajích}$$

$$p_i = w_i \cdot C$$

$$\left. \begin{array}{l} F_i = w_i \cdot C \cdot b \cdot \Delta \\ \left(F_i = w_i \cdot C \cdot b \cdot \frac{\Delta}{2} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} C \approx \frac{E}{l_p} \\ A = b \cdot \Delta \\ A = b \cdot \frac{\Delta}{2} \end{array} \right)$$

v ODM: $N_i = F_i = \frac{EA}{l_p} \cdot w_i$

$$l_p = 1$$

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou

Globální matice tuhosti vodorovných prutů:

10000000	0	0	-10000000	0	0
0	2500000	-1250000	0	-2500000	-1250000
0	-1250000	833333,33	0	1250000	416666,67
-10000000	0	0	10000000	0	0
0	-2500000	1250000	0	2500000	1250000
0	-1250000	416666,67	0	1250000	833333,33

Konkrétní vstupní údaje:

$$l = \Delta = 1 \text{ m}$$

$$A = b \cdot h = 0,5 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = 0,0104 \text{ m}^4$$

$$E = 20 \text{ GPa}$$

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou

Globální matice tuhosti svislých prutů:

108000	0	-108000	-108000	0	0
0	36000	0	0	-36000	0
-108000	0	108000	108000	0	0
-108000	0	108000	108000	0	0
0	-36000	0	0	36000	0
0	0	0	0	0	0

Konkrétní vstupní údaje:

$$l = 1 \text{ m} \quad A = b \cdot \Delta = 1 \text{ m}^2 \left(A = b \cdot \frac{\Delta}{2} = 0,5 \text{ m}^2 \right)$$

$$E \approx C = 36 \text{ MPa} \quad I = 1 \text{ m}^4 \quad (\text{pro výpočet není potřeba})$$

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou

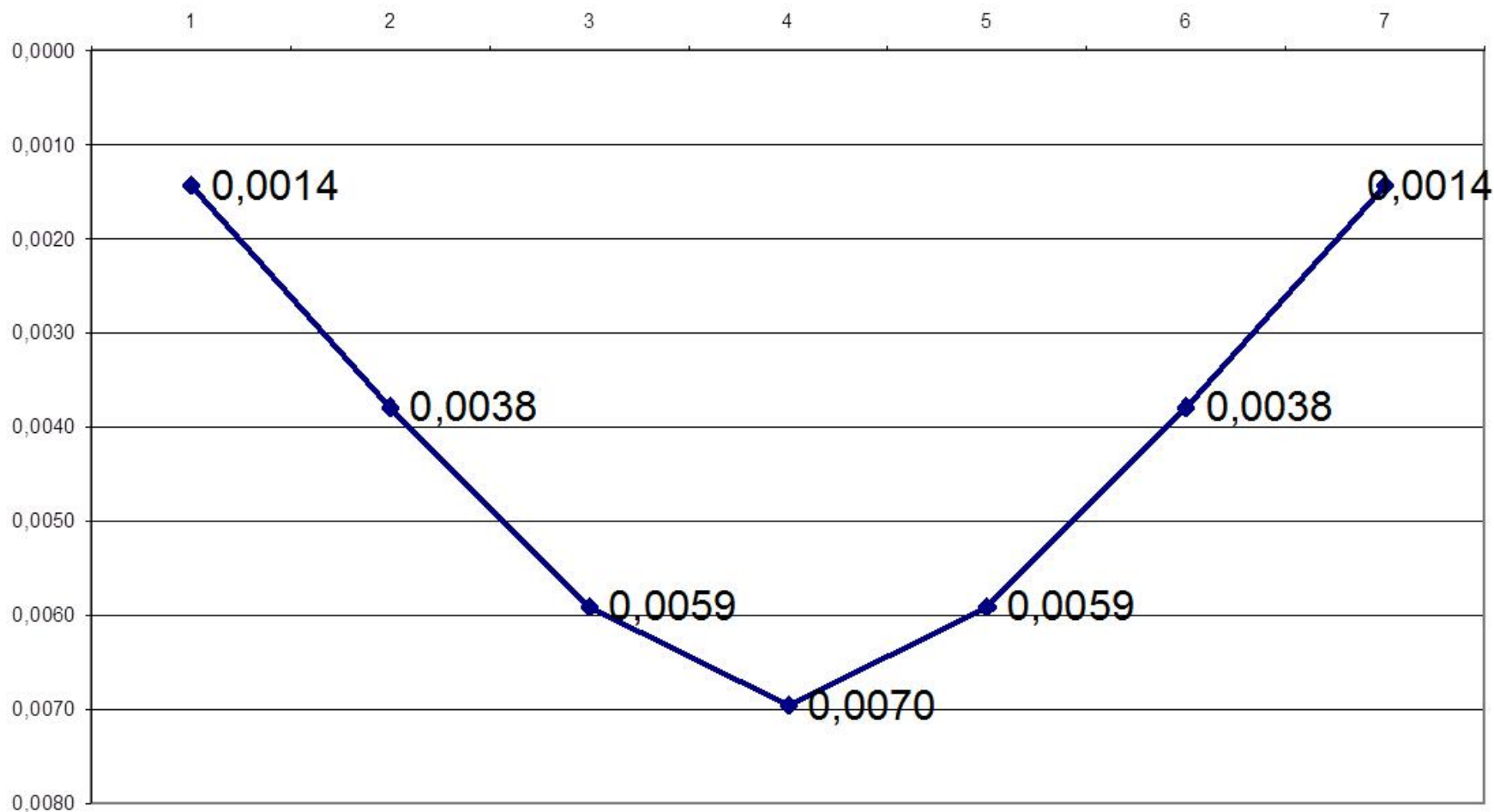
Celková matice tuhosti nosníku:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2518000	-1250000	-2500000	-1250000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1250000	833333,33	1250000	416666,67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-2500000	1250000	5036000	0	-2500000	-1250000	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-1250000	416666,67	0	1666666,7	1250000	416666,67	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-2500000	1250000	5036000	0	-2500000	-1250000	0	0	0	0	0	0
6	0	0	-1250000	416666,67	0	1666666,7	1250000	416666,67	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-2500000	1250000	5036000	0	-2500000	-1250000	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-1250000	416666,67	0	1666666,7	1250000	416666,67	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	-2500000	1250000	5036000	0	-2500000	-1250000	0	0
10	0	0	0	0	0	0	-1250000	416666,67	0	1666666,7	1250000	416666,67	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-2500000	1250000	5036000	0	-2500000	-1250000
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1250000	416666,67	0	1666666,7	1250000	416666,67
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2500000	1250000	2518000	1250000
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1250000	416666,67	1250000	833333,33

Zatěžovací vektor nosníku:

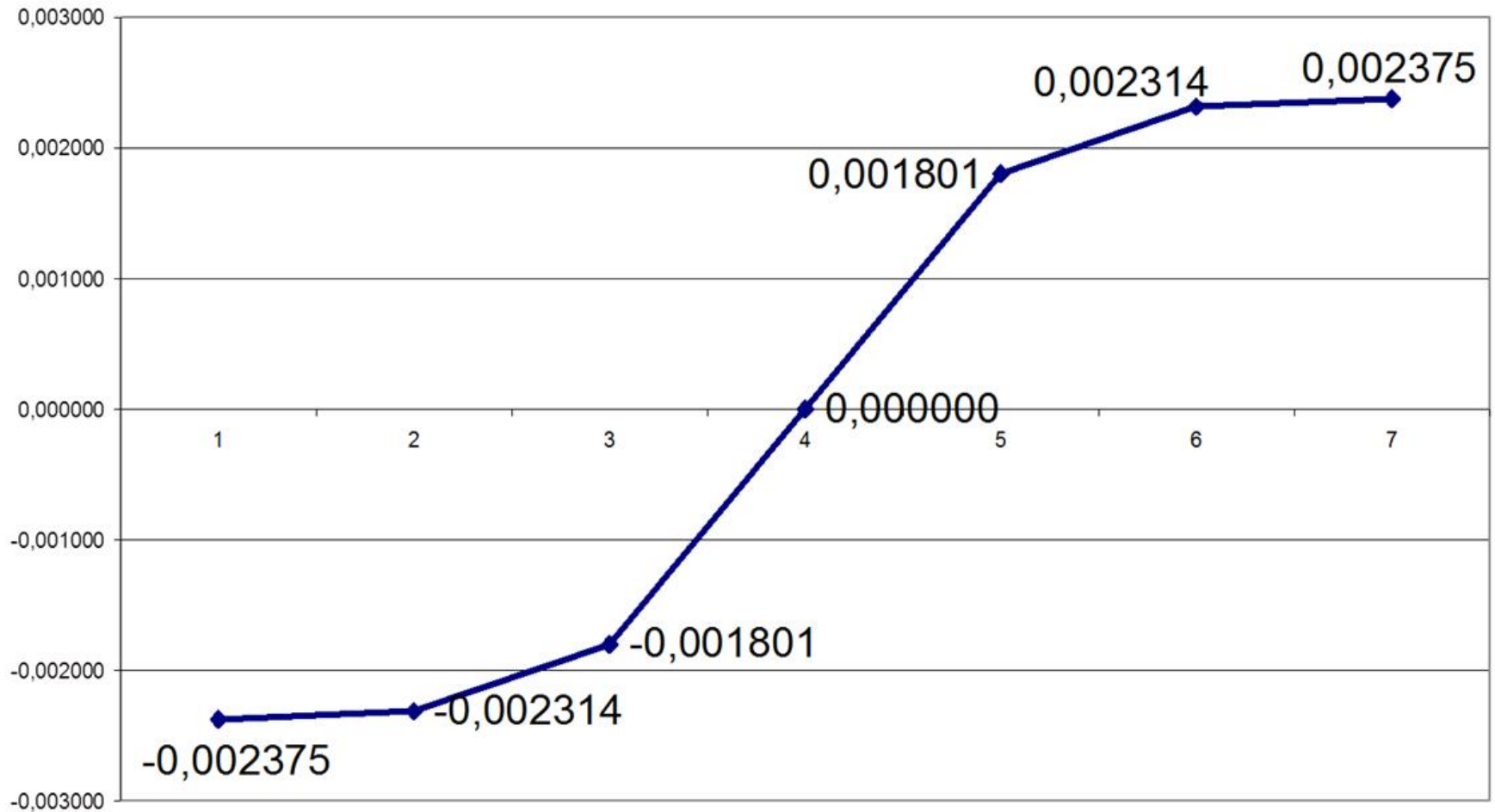
$$F = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou



Výsledný průhyb nosníku

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou



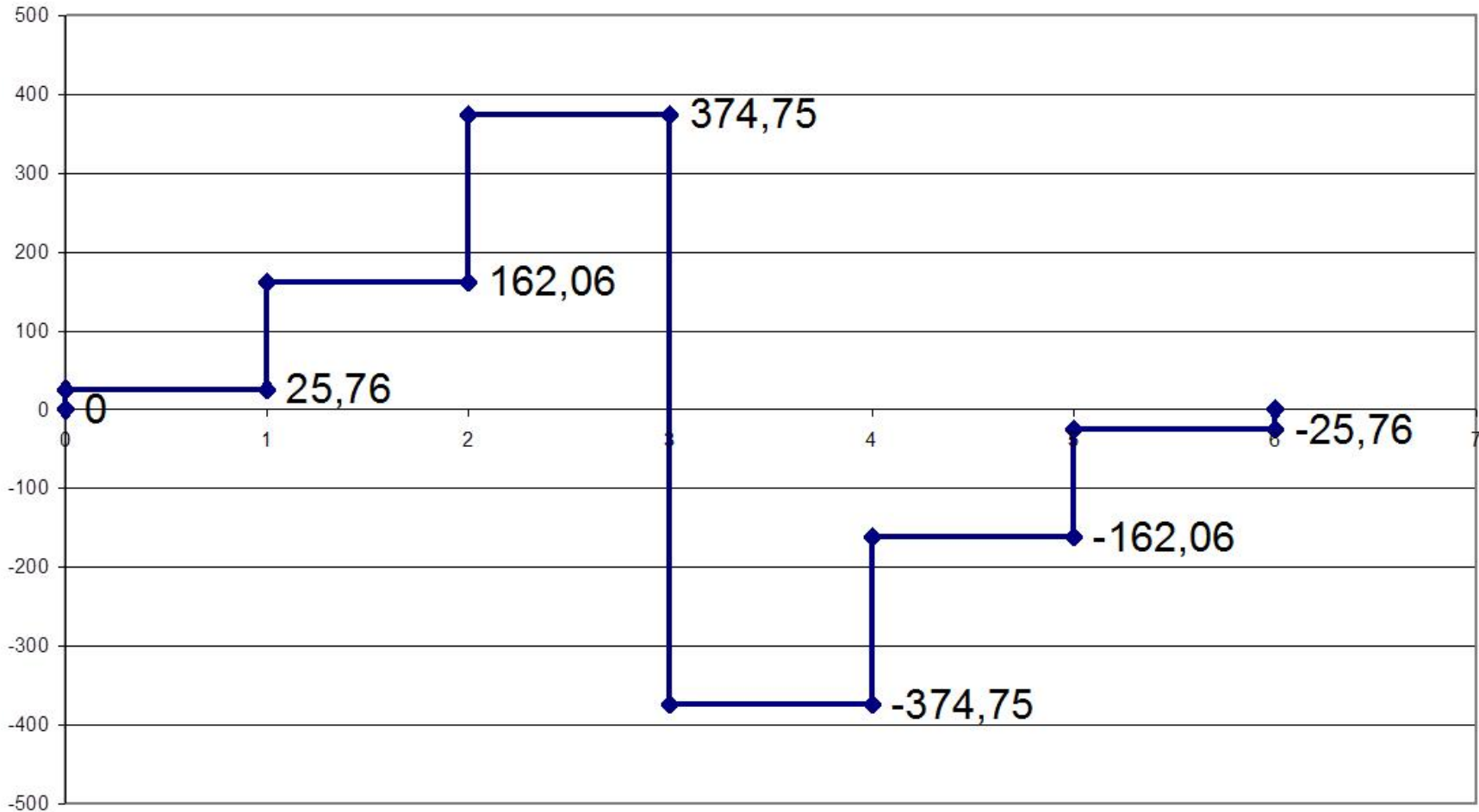
Výsledné hodnoty pootočení nosníku

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou



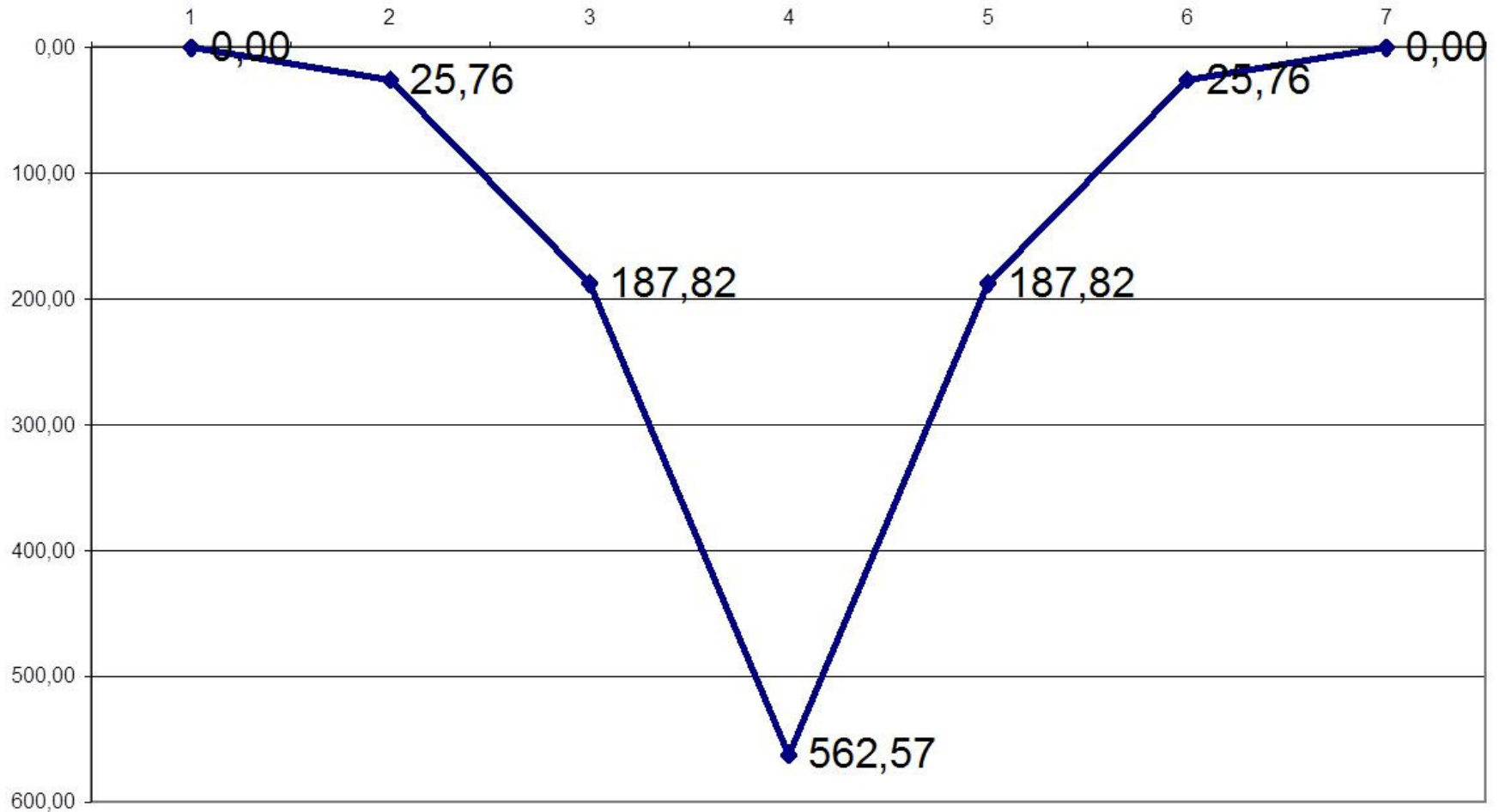
Výsledné hodnoty reakcí v podloží [kN] (síly ve svislých prutech)

Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou



Výsledné hodnoty posouvajících sil nosníku [kN]

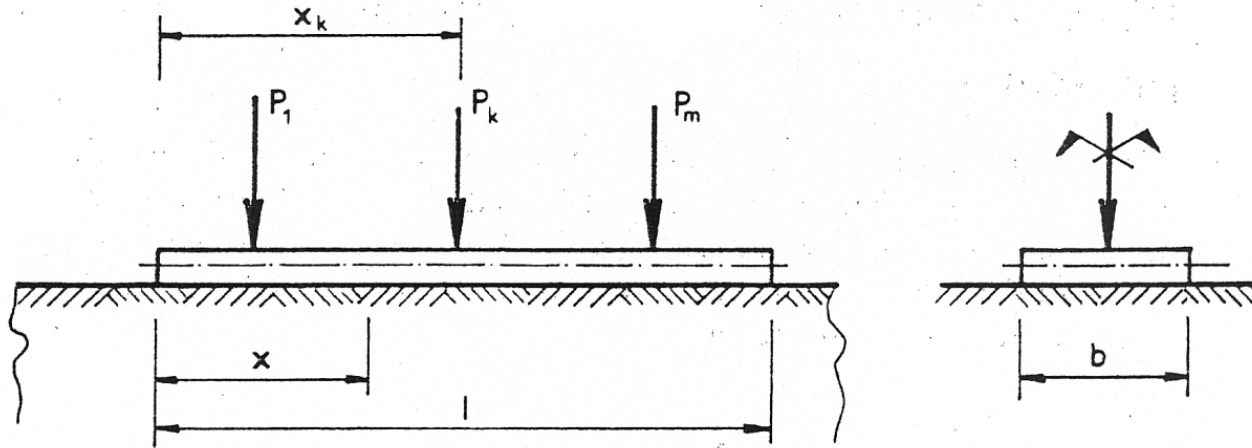
Příklad: nosník na Winklerově podloží, řešení obecnou deformační metodou



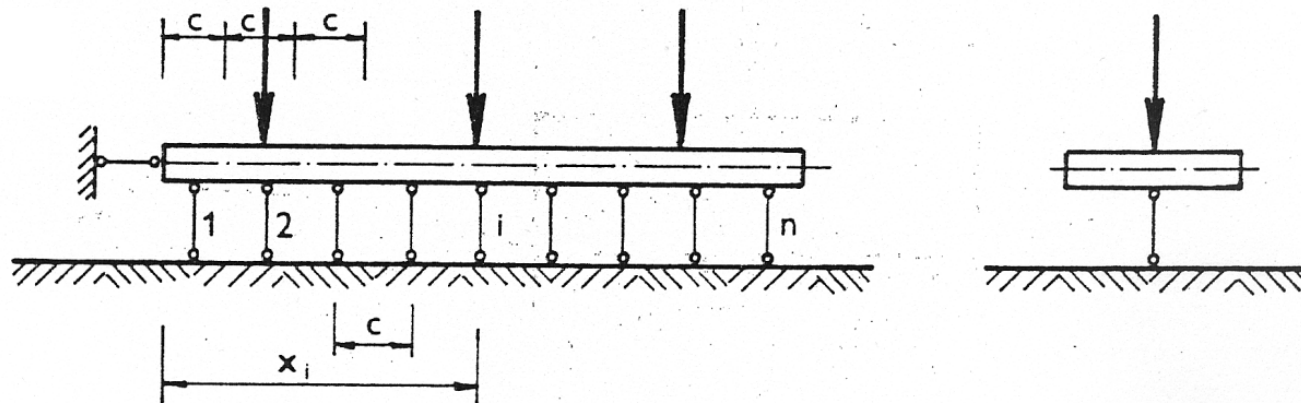
Výsledné hodnoty ohybových momentů nosníku [kNm]

Nosník na pružném podloží, Žemočkinova metoda

Obecně zatížený nosník na pružném podloží

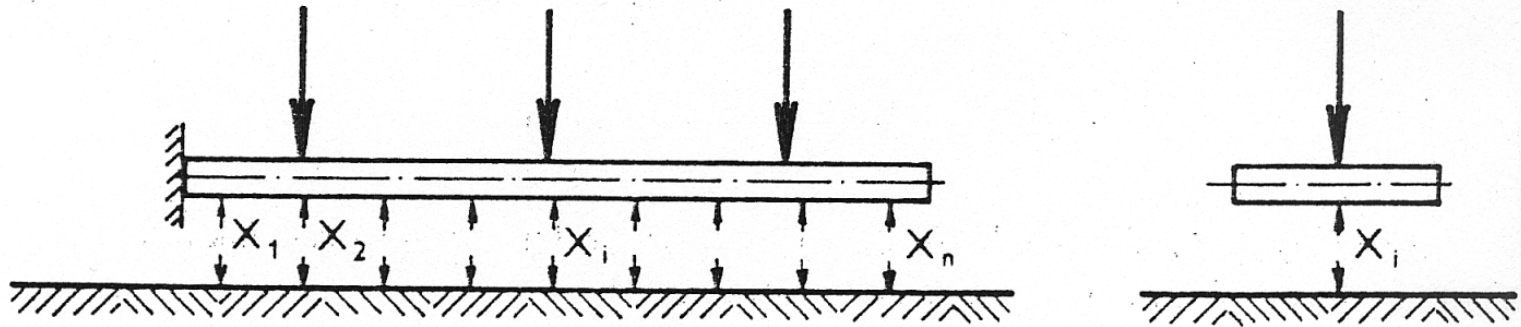


Rozdělení nosníku na dílky a nahrazení podloží kyvnými pruty

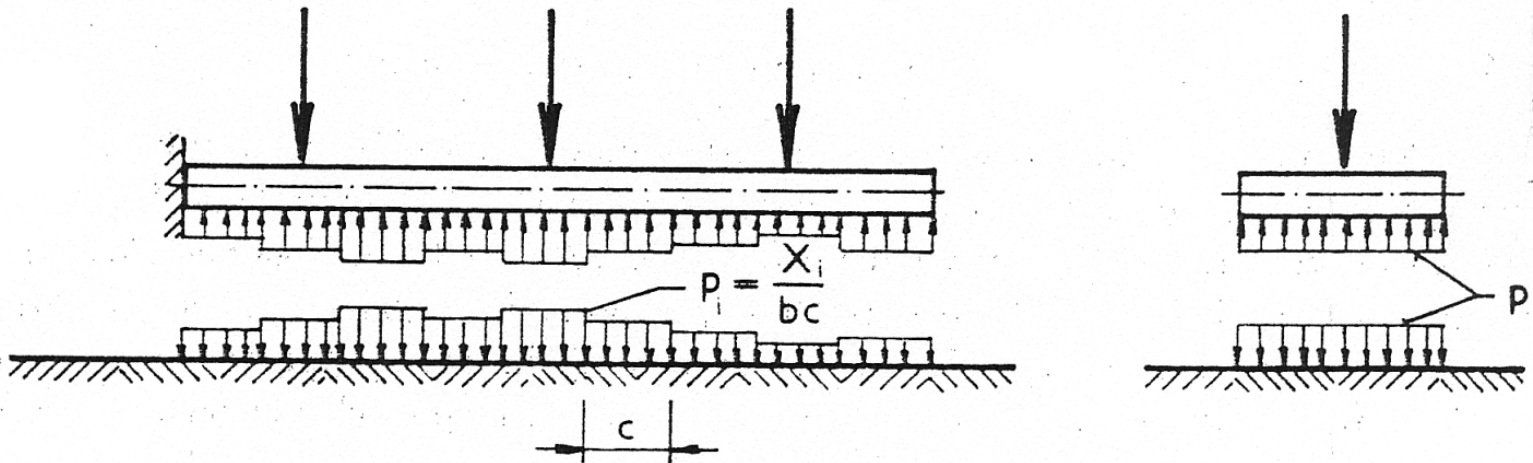


Nosník na pružném podloží, Žemočkinova metoda, pokračování

Výpočtový model - základní staticky a polohově určitá konstrukce

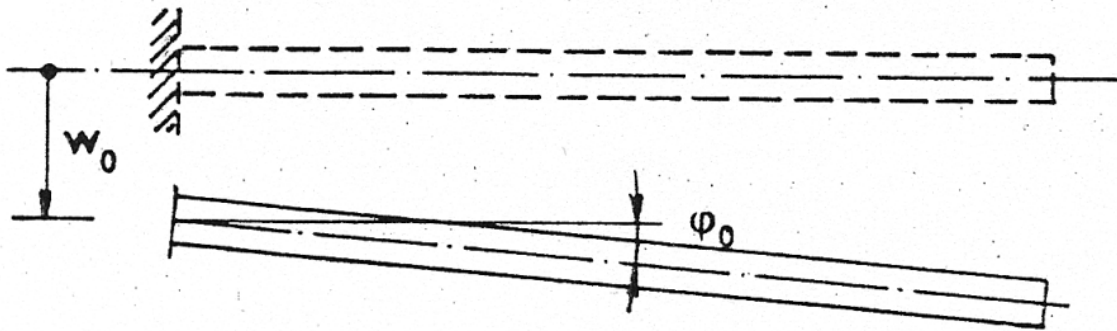


Neznámé síly X_i nahrazují spojitou reakci podloží p_i



Nosník na pružném podloží, Žemočkinova metoda, pokračování

Poloha vetknutého okraje nosníku je dána neznámým poklesem w_0 a pootočením φ_0



Úloha je smíšená - řeší se silově a deformačně.

Obsahuje n neznámých sil a dvě neznámá přetvoření.

Sestaví se $n + 2$ rovnic, a to n deformačních podmínek a 2 podmínky silové (rovnovážné).

Nosník na pružném podloží, Žemočkinova metoda, pokračování

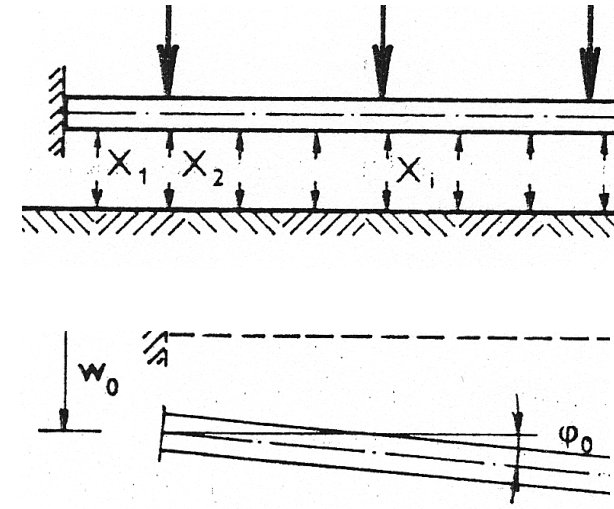
Deformační podmínky:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + w_0 + x_1 \cdot \varphi_0 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + w_0 + x_2 \cdot \varphi_0 + \delta_{20} = 0$$

⋮

$$\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + w_0 + x_n \cdot \varphi_0 + \delta_{n0} = 0$$



kde: $\delta_{11} = w_{11}^n + w_{11}^p$ obecně: $\delta_{ik} = w_{ik}^n + w_{ik}^p$

$w_{ik}^n (w_{ik}^p)$... průhyb nosníku (podloží) od síly $X_k = 1$

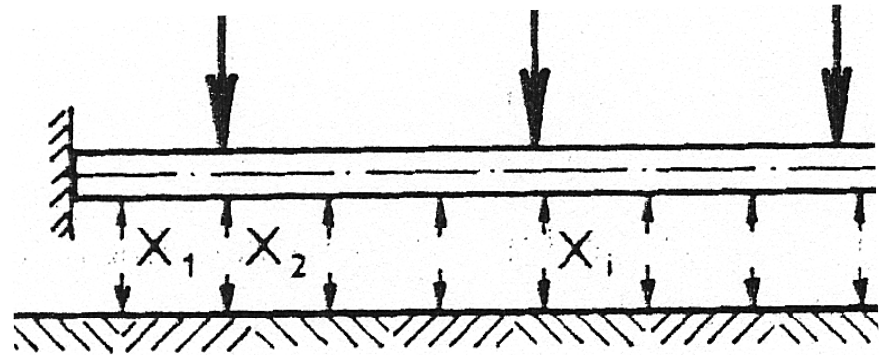
δ_{i0} ... průhyb nosníku v i -tém zatěžovacím stavu od síly $X_i = 1$

Nosník na pružném podloží, Žemočkinova metoda, pokračování

Silové (rovnovážné) podmínky:

$$\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{k=1}^m P_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot x_i - \sum_{k=1}^m P_k \cdot x_k = 0$$



Řešením $n + 2$ rovnic jsou síly X_1 až X_n a přetvoření w_0 a φ_0 , které stav nosníku a poloprostoru jednoznačně definují.