

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky



7

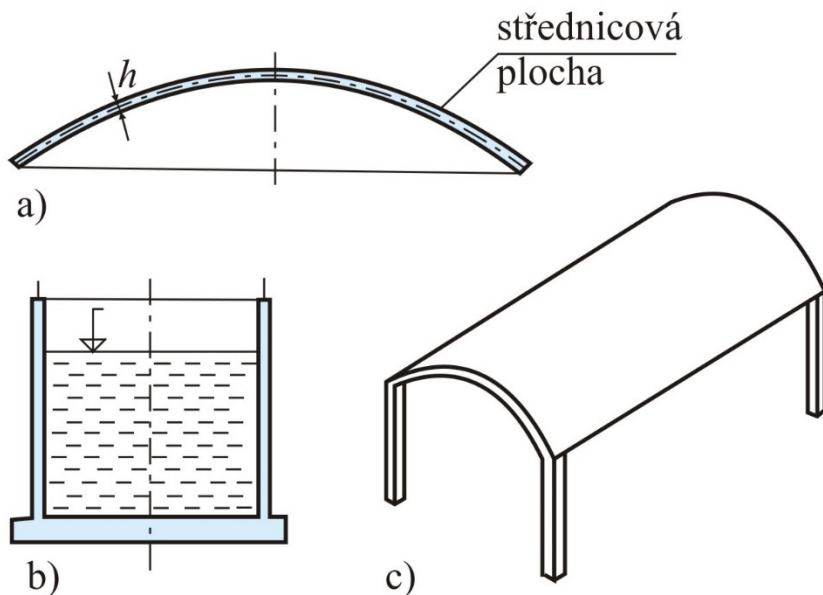
Skořepiny



Skořepinové konstrukce, úvod

Skořepiny - plošné konstrukce s oblou (zakřivenou) střednicovou plochou.

Geometrie skořepinové konstrukce je určena tvarem střednicové plochy a tloušťkou h , která nemusí být konstantní.



Použití skořepin:

- bány
- nádrže
- válcové skořepiny atd.

Skořepiny se aplikují ve stavitelství (betonové konstrukce), strojírenství, dopravních prostředcích atd.

Skořepinové konstrukce, úvod



Auditorium na Tenerife, návrh Santiago Calatrava, 1997-2003

Skořepinové konstrukce, úvod



Město umění a věd ve Valencii, návrh Santiago Calatrava, 1991-2005

Skořepinové konstrukce, úvod



Opera v Sydney, návrh Jørn Utzon, 1956-1973

Skořepinové konstrukce, úvod



Hala Globe ve Stockholmu, návrh Svante Berg a Lars Vretblad, 1986-1989

Skořepinové konstrukce, úvod



Palace of Assembly, Chandigarh, Indie, návrh Le Corbusier, 1953-1963

Skořepinové konstrukce, úvod



Palazzetto dello Sport di Roma, návrh Pier Luigi Nervi, 1956-1958

Skořepinové konstrukce, úvod



Pavilon Z v Brně, návrh Zdeněk Denk, Zdeněk Pospíšil, Milan Steinhauser, Zdeněk Alexa, Ferdinand Lederer a Jiří Špaček, 1958-1959

Skořepinové konstrukce, úvod



Hyperbolické chladicí věže, elektrárna Ostrava-Třebovice, 1931-1933, 1956, 2001

Skořepinové konstrukce, úvod

- Představují obecnější typ plošné konstrukce než jsou nosné stěny a nosné desky.
- Působí v nich obecně **normálové a tečné vnitřní síly** obdobně jako u nosných stěn, mohou zde být také **ohybové a krouticí momenty** a **posouvající síly**, jako u nosných desek. I zde lze hovořit o měrných vnitřních silách.

Skořepinové konstrukce, úvod

Předpoklady technické teorie tenkých skořepin:

- tloušťka skořepin je velmi malá ve srovnání s obrysovými rozměry a s poloměry křivosti střednicové plochy: $h \ll r_x, r_y$,
- i nadále platí předpoklady Kirchhoffovy technické teorie tenkých desek, tj. zachování přímosti normál před a po zatížení ke střednicové ploše, zanedbání normálového napětí a deformace ve směru normály ke střednicové ploše, nulový pohyb ve směru tečném ve střednicové ploše.

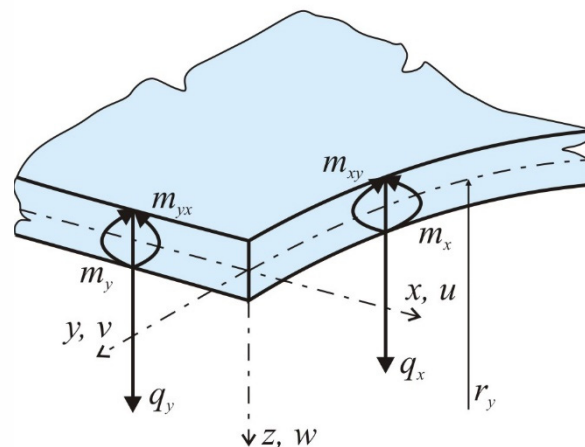
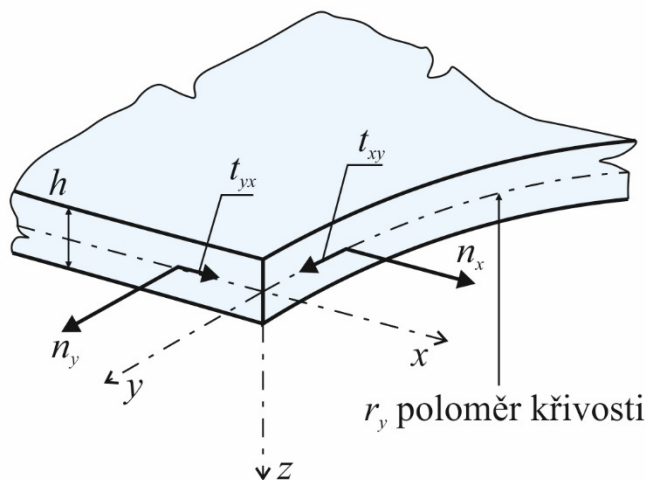
Skořepinové konstrukce, úvod

Na obr. jsou znázorněny měrné vnitřní síly ve válcových skořepinách.

Je volen lokální souřadný systém s osami x a y , které jsou tečnami ke střednicové ploše v rovině hlavních křivosti. Osa x má směr přímé povrchky, tj. $r_x = \infty$, osa z je normálou ke střednicové ploše.

V tečné rovině ke střednicové ploše působí normálové síly n_x a n_y a tečné síly t_{xy} a t_{yx} , které jsou obdobou vnitřním silám v nosných stěnách. Dále zde působí

ohybové momenty m_x a m_y , kroučící momenty m_{xy} a posouvající síly q_x , q_y , obdobně jako u technické teorie desek.



Skořepinové konstrukce, úvod

V řešení skořepin vystupují posunutí u , v a w ve směru os x , y a z , poměrné deformace, napětí atd. obdobně jako u nosných stěn nebo u technické teorie desek.

Významnou skupinu úloh skořepin jsou úlohy, kde na přenesení zatížení se podílejí pouze vnitřní síly působící v tečných rovinách (n_x , n_y a t_{xy} respektive t_{yx}), když ohybové momenty m_x , m_y a kroutící momenty m_{xy} hrají nevýznamnou, zanedbatelnou úlohu.

V tomto případě se hovoří o **membránovém stavu** napjatosti **skořepin**. Ten je významný z hlediska:

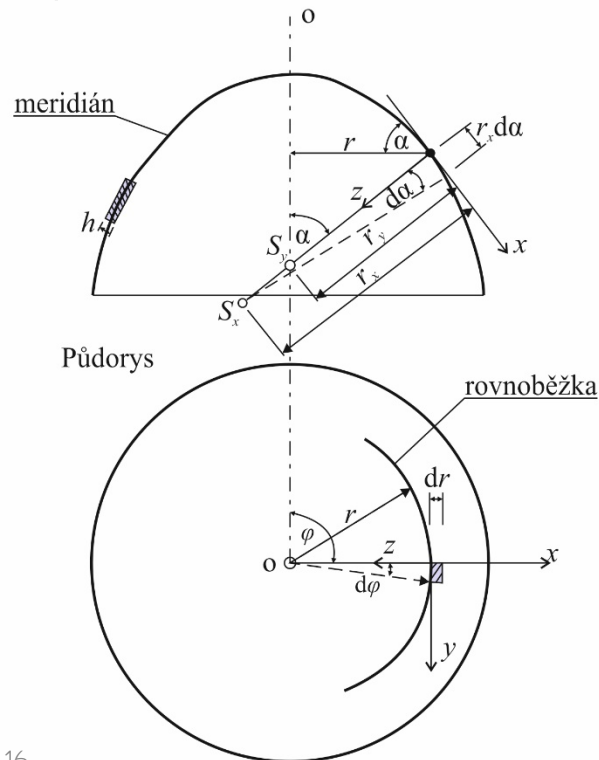
- řešení, které je jednodušší,
- statické funkce skořepiny, která je velmi účinná z hlediska únosnosti i tuhosti.

Při nesplnění podmínek membránového stavu se hovoří o **ohybovém stavu skořepin**, který může být lokální (hovoří se o poruchách membránového stavu) nebo v podstatné části skořepiny.

Membránový stav rotačně souměrných skořepin

U rotačně symetrických skořepin vznikne střednicová plocha rotací dané křivky nazývané **meridián** kolem osy rotační symetrie o .

Rotací každého bodu křivky kolem osy vznikne kružnice o poloměru r - **rovnoběžka**.



Lokální souřadný systém v daném bodě vznikne ztotožněním tečny meridiánu s osou x , normálu k meridiánu tvoří osa z , svírající s osou o úhel α .

Polohu meridiánové roviny určuje úhel φ , měřený od zvolené meridiánové roviny.

Membránový stav rotačně souměrných skořepin

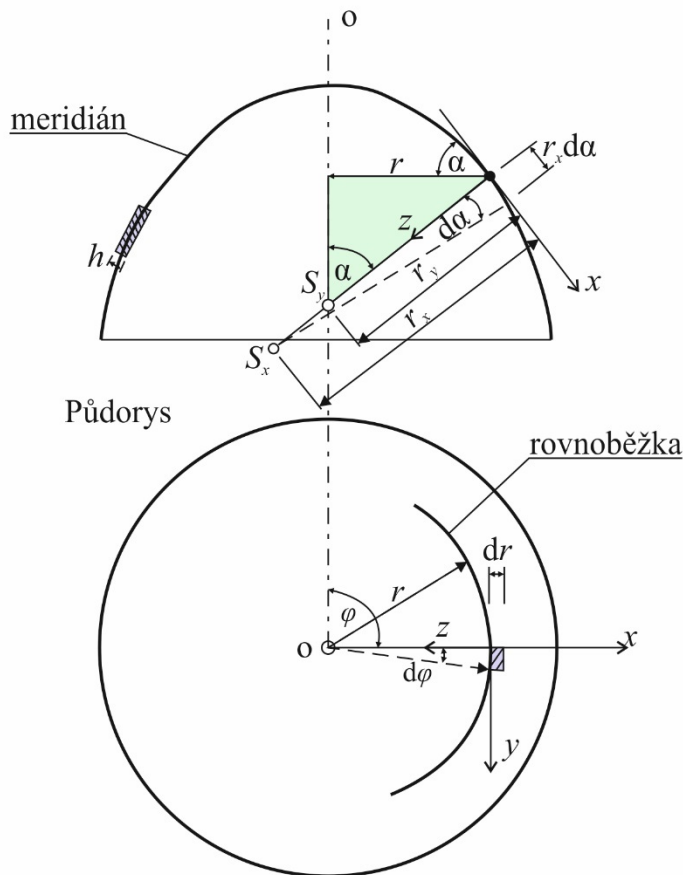
Roviny xz a xy jsou hlavními rovinami, hlavní poloměry křivosti jsou r_x (poloměr křivosti meridiánu) a r_y .

Lze je určit podle vztahu:
$$r_y = \frac{r}{\sin \alpha}$$

Tloušťka skořepiny je h .

Zatížení skořepiny je plošné, působí ve směru osy x (q_x) a ve směru osy z (q_z), nepůsobí ve směru osy y (důsledek symetrie).

V důsledku rotační symetrie ve skořepině vznikají pouze normálové vnitřní síly n_x a n_y , nevznikají smykové síly t_{xy} .



Membránový stav rotačně souměrných skořepin, podmínky rovnováhy

Plocha elementu, na který působí zatížení p_x a p_z je:

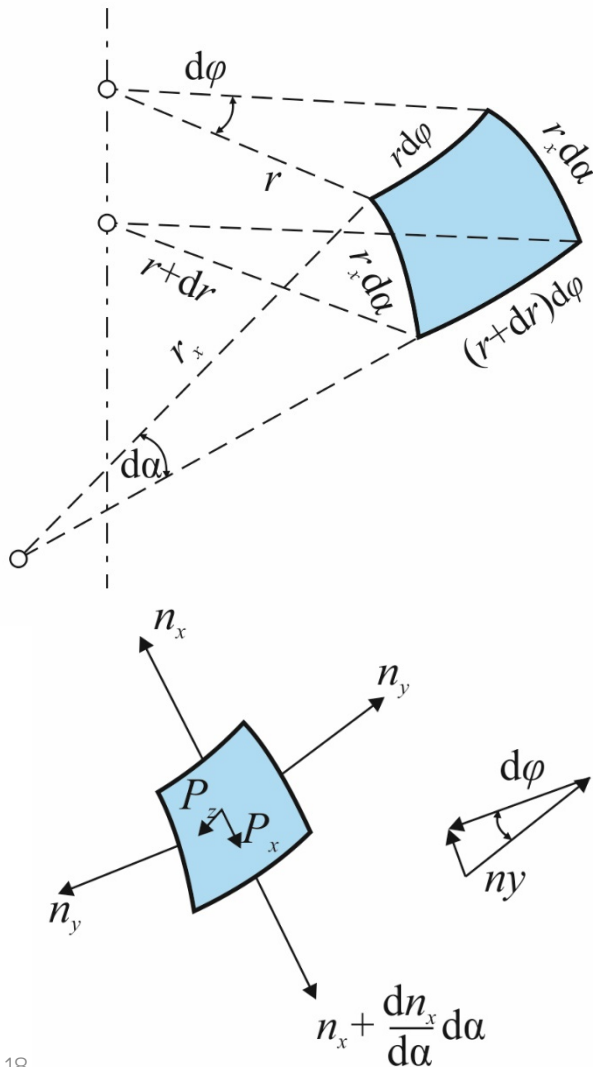
$$dA = r \cdot d\varphi \cdot r_x \cdot d\alpha$$

Rovnice rovnováhy sil ve směru osy x , tj. ve směru tečny k meridiánu, je:

$$\sum F_x = 0$$

Po dosazení:

$$\left(n_x + \frac{dn_x}{d\alpha} d\alpha \right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - n_x \cdot r \cdot d\varphi - n_y \cdot r_x \cdot d\alpha \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha + p_x \cdot r \cdot d\varphi \cdot r_x \cdot d\alpha = 0$$



Membránový stav rotačně souměrných skořepin, podmínky rovnováhy

Rovnici:

$$\left(n_x + \frac{dn_x}{d\alpha} d\alpha \right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi - n_x \cdot r \cdot d\varphi - n_y \cdot r_x \cdot d\alpha \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha + p_x \cdot r \cdot d\varphi \cdot r_x \cdot d\alpha = 0$$

Ize upravit:

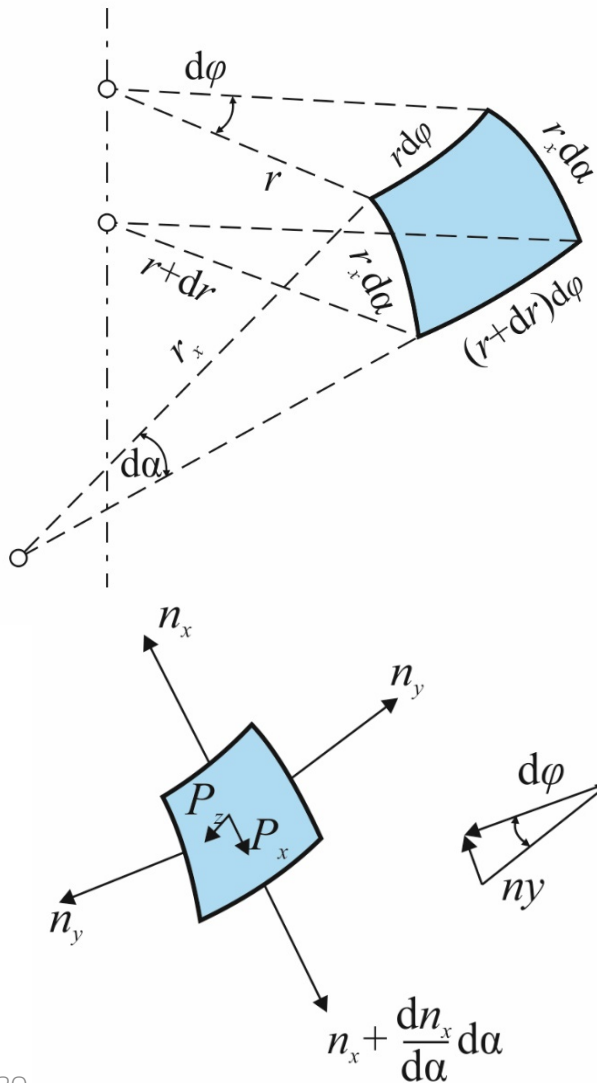
$$n_x \cdot r \cdot d\varphi + n_x \cdot dr \cdot d\varphi + dn_x \cdot r \cdot d\varphi + dn_x \cdot dr \cdot d\varphi - n_x \cdot r \cdot d\varphi - n_y \cdot r_x \cdot d\alpha \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha + p_x \cdot r \cdot d\varphi \cdot r_x \cdot d\alpha = 0 \quad / (d\varphi \cdot d\alpha)$$

$$\frac{n_x \cdot dr}{d\alpha} + \frac{dn_x}{d\alpha} \cdot r + \frac{dn_x}{d\alpha} \cdot dr - n_y \cdot r_x \cdot \cos \alpha + p_x \cdot r \cdot r_x = 0$$

$$\frac{dn_x}{d\alpha} \cdot dr \cong 0$$

$$\frac{d}{d\alpha} (n_x \cdot r) - n_y \cdot r_x \cdot \cos \alpha + p_x \cdot r \cdot r_x = 0$$

Membránový stav rotačně souměrných skořepin, podmínky rovnováhy



Rovnice rovnováhy sil ve směru osy z , tj. ve směru normály ke střednicové ploše, je:

$$\sum F_z = 0$$

Po dosazení:

$$n_x \cdot r \cdot d\phi \cdot d\alpha + n_y \cdot r_x \cdot d\alpha \cdot d\phi \cdot \sin\alpha + p_z \cdot r \cdot d\phi \cdot r_x \cdot d\alpha = 0$$

Po úpravě:

$$n_x \cdot r + n_y \cdot r_x \cdot \sin\alpha + p_z \cdot r \cdot r_x = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{r_y}$$

$$\frac{n_x}{r_x} + \frac{n_y}{r_y} + p_z = 0$$

Membránový stav rotačně souměrných skořepin, podmínky rovnováhy

Pro řešení rotačně souměrných skořepin vyplývají z podmínek rovnováhy dvě rovnice:

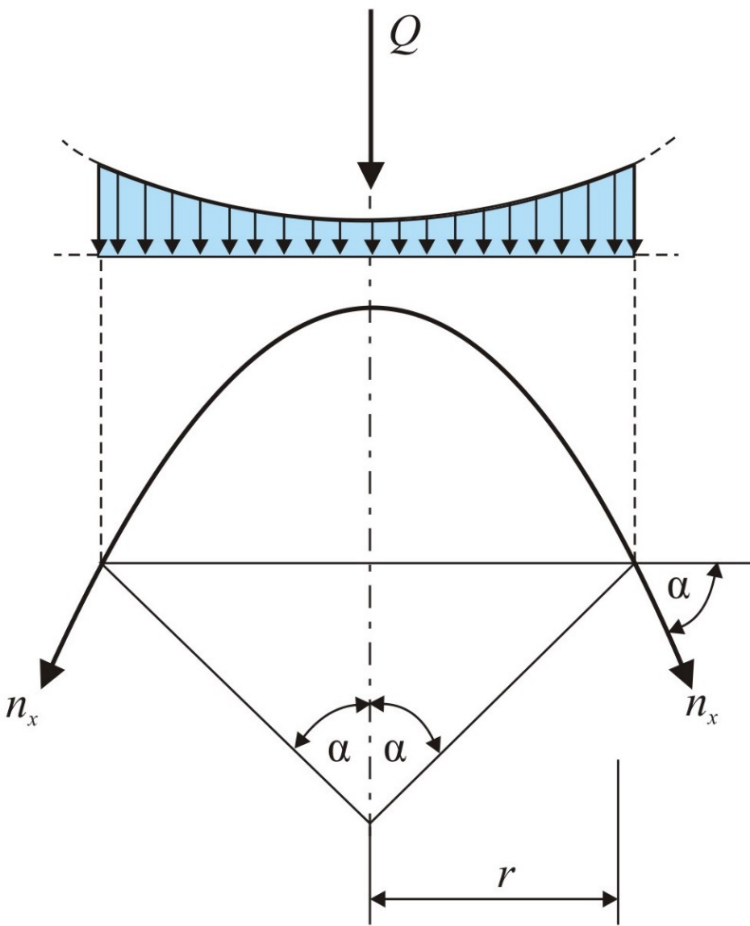
$$1. \quad \frac{d}{d\alpha}(n_x \cdot r) - n_y \cdot r_x \cdot \cos \alpha + p_x \cdot r \cdot r_x = 0$$

$$2. \quad \frac{n_x}{r_x} + \frac{n_y}{r_y} + p_z = 0 \quad \text{resp.} \quad n_y = -\frac{n_x}{r_x} \cdot r_y - p_z \cdot r_y$$

První rovnice je diferenciální, druhá lineární.

Alternativně lze první rovnici nahradit jednodušší podmínkou rovnováhy (viz dále).

Membránový stav rotačně souměrných skořepin, podmínky rovnováhy



Je-li výslednicí svislých sil Q , pak platí:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot n_x \cdot \sin \alpha + Q = 0$$

Po úpravě:

$$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{r_y}$$

Dosazením do druhé rovnice lze získat:

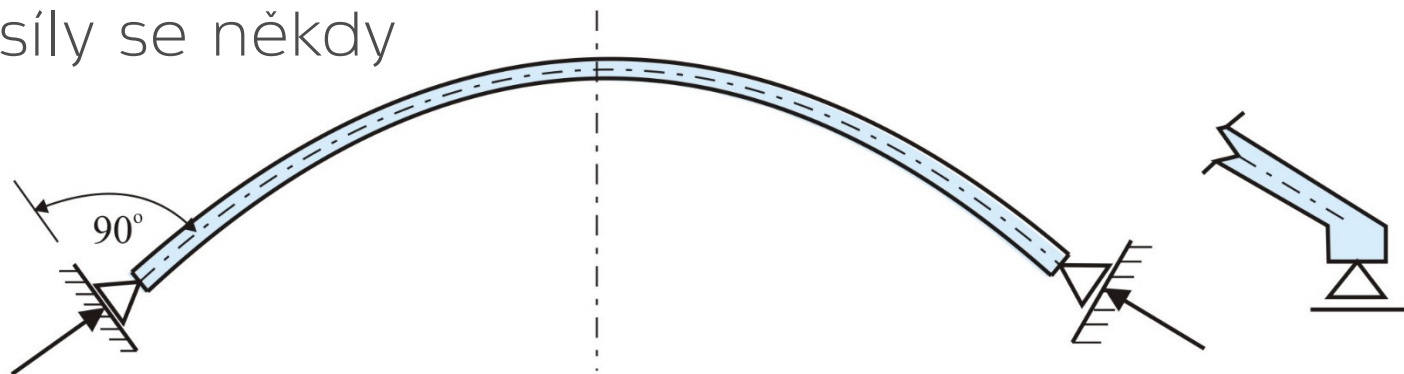
$$n_y = -\frac{n_x}{r_x} \cdot r_y - p_z \cdot r_y$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y$$

Membránový stav rotačně souměrných skořepin, shrnutí

- Vnitřní síly rotačně souměrných skořepin se určují bez potřeby řešit deformace.
- Jedná se o úlohu staticky určitou za předpokladu splnění membránového stavu.
- Problémy vznikají v místech podepření, kde je obtížné zajištění membránového stavu.
- U membránového stavu se předpokládá, že podpory přenášejí pouze normálové síly ve směru okraje střednice. Mělo by zde být kluzné podepření, což je konstrukčně obtížně realizovatelné.

Vodorovné síly se někdy eliminují vytvořením patního věnce.

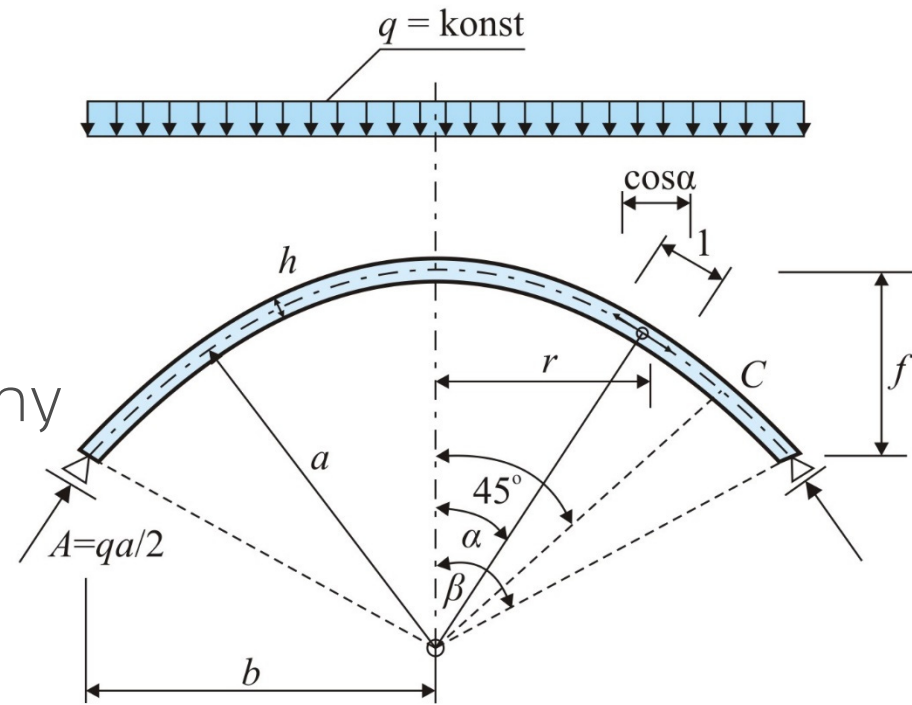


Aplikace membránového stavu, kulová bář

Kulová bář vzniká rotací části kružnice kolem osy symetrie.

Geometricky je vymezená poloměrem střednicové plochy a a středovým úhlem β .

Lze ji zadat též poloměrem patní kružnice b a vzepětím f .



Platí: $(a - f)^2 + b^2 = a^2 \rightarrow a = \frac{f^2 + b^2}{2 \cdot f} \quad \sin \beta = \frac{b}{a}$

U kulové skořepiny jsou poloměry zakřivení shodné, tj. $r_x = r_y$, platí také $S_x = S_y$.

Poloměr rovnoběžky je: $r = a \cdot \sin \alpha$

Aplikace membránového stavu, kulová báň zatížena po ploše půdorysu

Podmínky rovnováhy:

$$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y$$

Výslednice zatížení působícího uvnitř kružnice o poloměru r je:

$$Q = q \cdot \pi \cdot r^2 = q \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

Po dosazení:

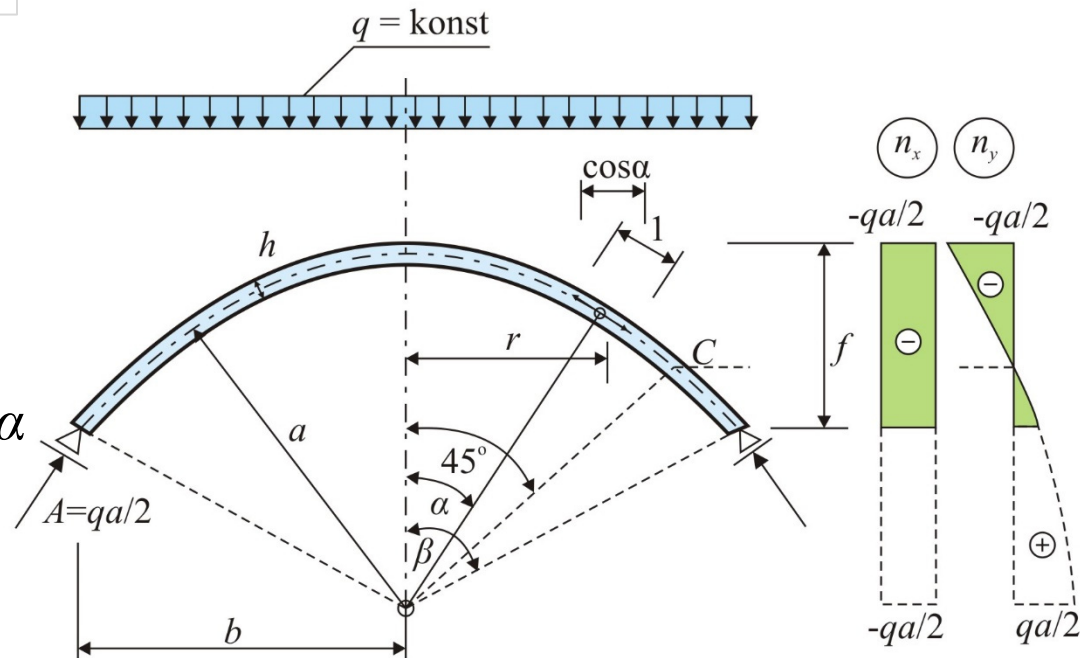
$$r = a \cdot \sin \alpha$$

$$n_x = -\frac{q \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin^2 \alpha} = -\frac{q \cdot a}{2}$$

$$p_z = q \cdot \cos^2 \alpha$$

$$n_y = \frac{q \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin^2 \alpha} - q \cdot a \cdot \cos^2 \alpha$$

$$n_y = q \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha \right)$$



Aplikace membránového stavu, kulová báň zatížena vlastní tíhou

Podmínky rovnováhy:

Povrch kulové bány:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot h \quad h = a \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$P = 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (1 - \cos \alpha)$$

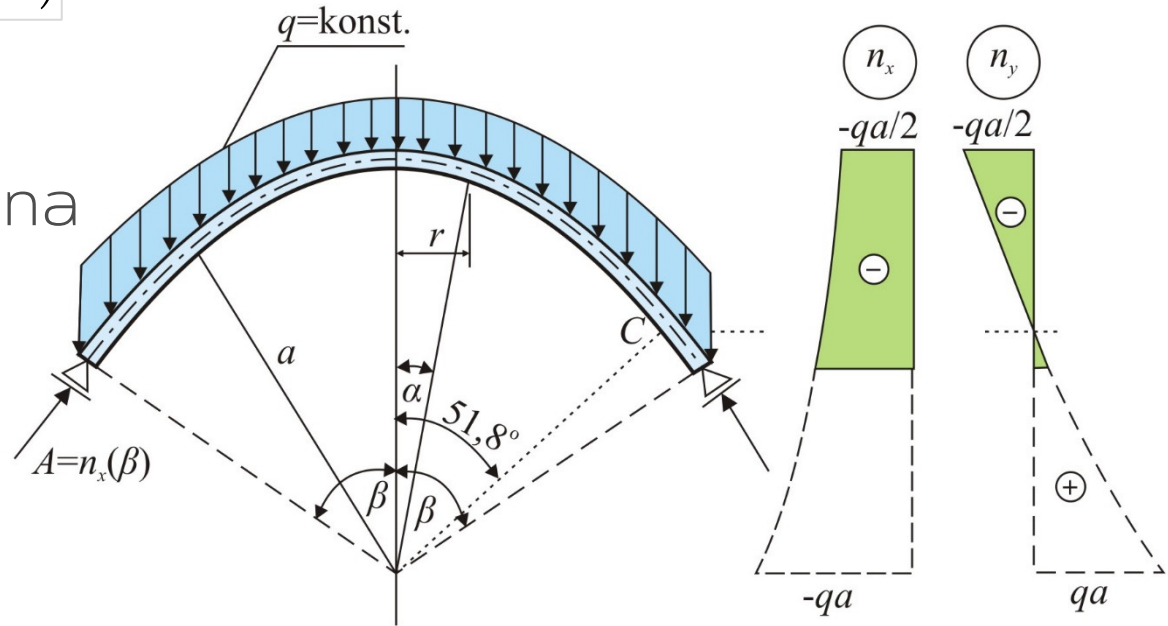
Vlastní tíha je rozložena rovnoměrně po střednicové ploše:

$$Q = q \cdot 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$p_z = q \cdot \cos \alpha$$

$$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y$$



$$n_x = -\frac{q \cdot 2 \cdot \pi \cdot a^2 (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot \pi \cdot (a \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha} = -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot q \cdot a = -\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \cdot q \cdot a = -\frac{q \cdot a}{1 + \cos \alpha}$$

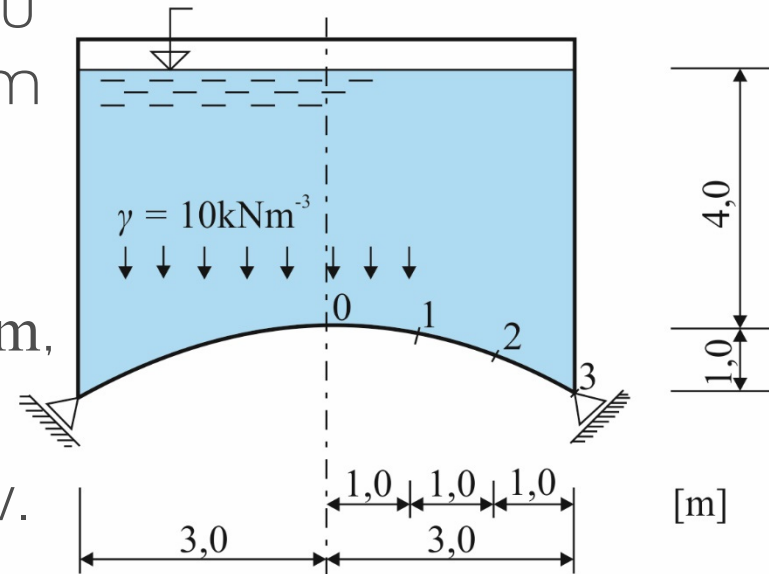
$$n_y = \frac{q \cdot 2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \sin^2 \alpha} - q \cdot \cos \alpha \cdot a = q \cdot a \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha \right)$$

Aplikace membránového stavu, kulová báň zatížena vodním tlakem

Dno nádrže o príměru 6 m ve tvaru kulové skořepiny je zatíženo tlakem vody o výšce 4 m nad vrcholem.

Vypočtěte normálové síly n_x , n_y v řezech na poloměrech $r = 1$ m, 2 m, 3 m a 4 m.

Předpokládá se membránová stav.
Tíha vody je 10 kNm^{-3} .



Řešení:

Objem kulové úseče je: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \quad h = a \cdot (1 - \cos \alpha)$

Zatížení kulové úseče: $Q = \left[\pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \right] \cdot 10$

Aplikace membránového stavu, kulová báň zatížena vodním tlakem

Potřebné vztahy:

Podmínky
rovnováhy:

$$n_x = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y$$

$$(a - f)^2 + b^2 = a^2$$

Konkrétně:

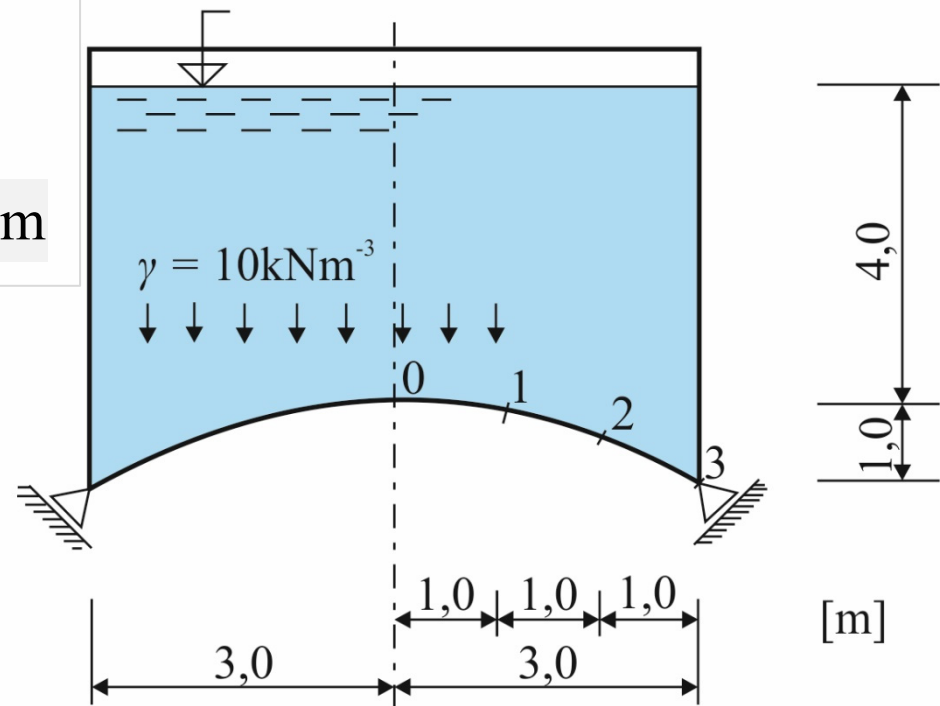
$$(a - 1)^2 + 3^2 = a^2 \rightarrow 2 \cdot a = 10 \rightarrow a = 5 \text{ m}$$

$H = 4 \text{ m}$ pro $r = 0$,

Obecně: $H = 4 + h$

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{a}$$

$$h = a \cdot (1 - \cos \alpha)$$



[m]

Aplikace membránového stavu, kulová báň zatížena vodním tlakem

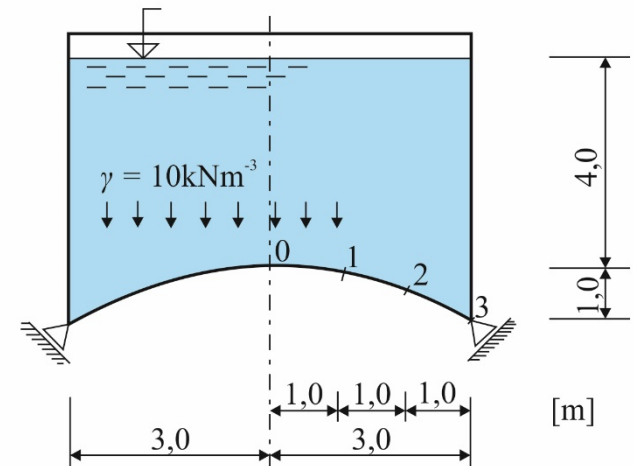
$$Q = \left[\pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \right] \cdot 10$$

$$n_x = \frac{- \left[\pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \right] \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{a}} =$$

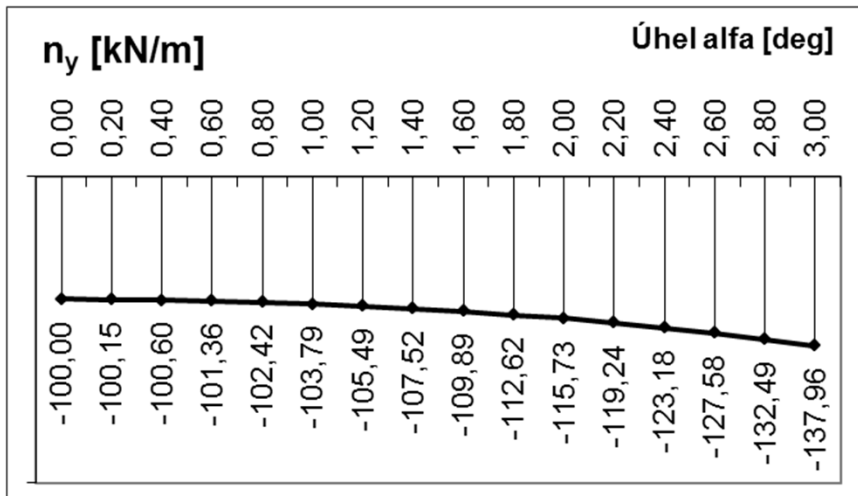
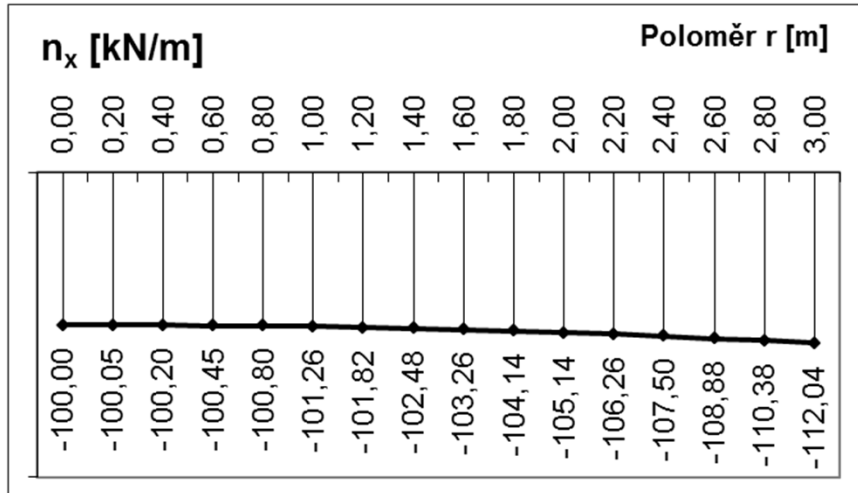
$$= \frac{-H \cdot a}{2} \cdot 10 + \frac{h^2 \cdot a \cdot (3 \cdot a - h)}{6 \cdot r^2} \cdot 10 = -5 \cdot H \cdot a + \frac{5}{3} \cdot \frac{a \cdot (3a - h) \cdot h^2}{r^2}$$

$$n_y = \frac{\left[\pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \right] \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - H \cdot 10 \cdot a =$$

$$= \frac{\left[\pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3a - h) \right] \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{r^2}{a^2}} - H \cdot 10 \cdot a = -5 \cdot a \cdot H - \frac{5 \cdot h^2 \cdot (3a - h) \cdot a}{3 \cdot r^2}$$

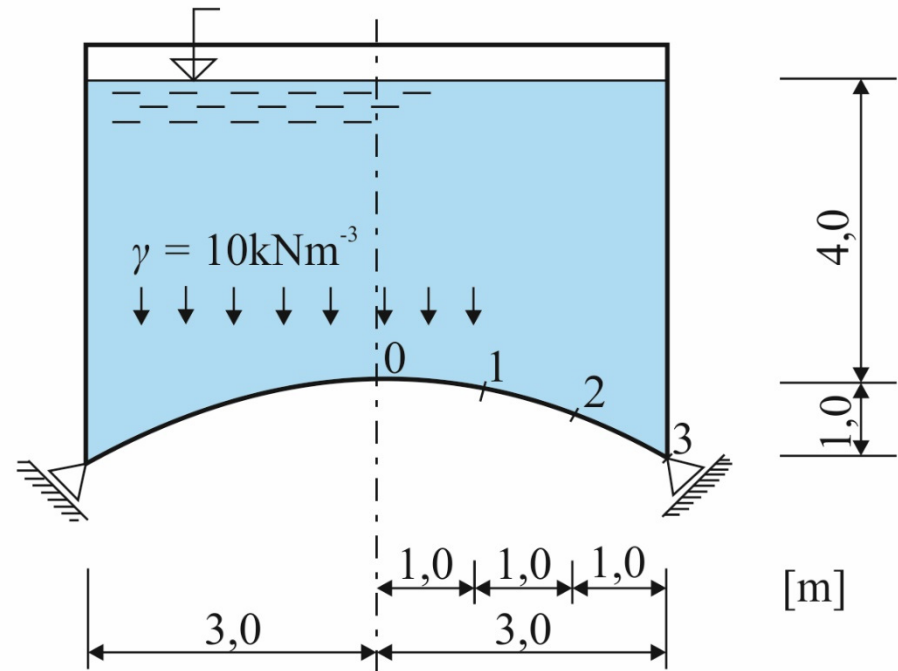


Aplikace membránového stavu, kulová báň zatížena vodním tlakem



$$n_x = -5 \cdot H \cdot a + \frac{5}{3} \cdot \frac{a \cdot (3a - h) \cdot h^2}{r^2}$$

$$n_y = -5 \cdot a \cdot H - \frac{5 \cdot h^2 \cdot (3a - h) \cdot a}{3 \cdot r^2}$$



Jiné typy rotačních skořepin, kuželová báň

Pro **kuželovou báň** platí $r_x = \infty$.

Příklad výpočtu pro rovnoměrné spojitě zatížení na půdorys:

$$q \cdot a = q_z \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \rightarrow q_z = q \cdot \cos \alpha$$

$$p_z = q_z \cdot \frac{r}{x} = q_z \cdot \cos \alpha = q \cdot \cos^2 \alpha$$

$$Q = q \cdot \pi \cdot r^2$$

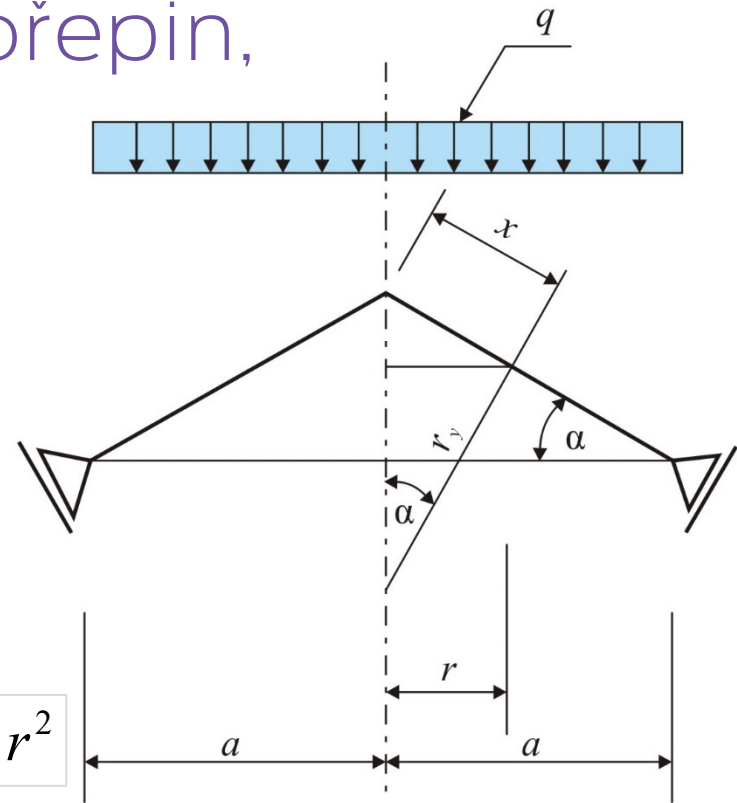
$$n_x = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha} = -\frac{q \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha} = -\frac{q \cdot r}{2 \cdot \sin \alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin \alpha} - p_z \cdot r_y = -p_z \cdot r_y = -q \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{r}{\sin \alpha} = -q \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \cotan \alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$n_x = -q \cdot r$$

$$n_y = -1,5 \cdot q \cdot r$$



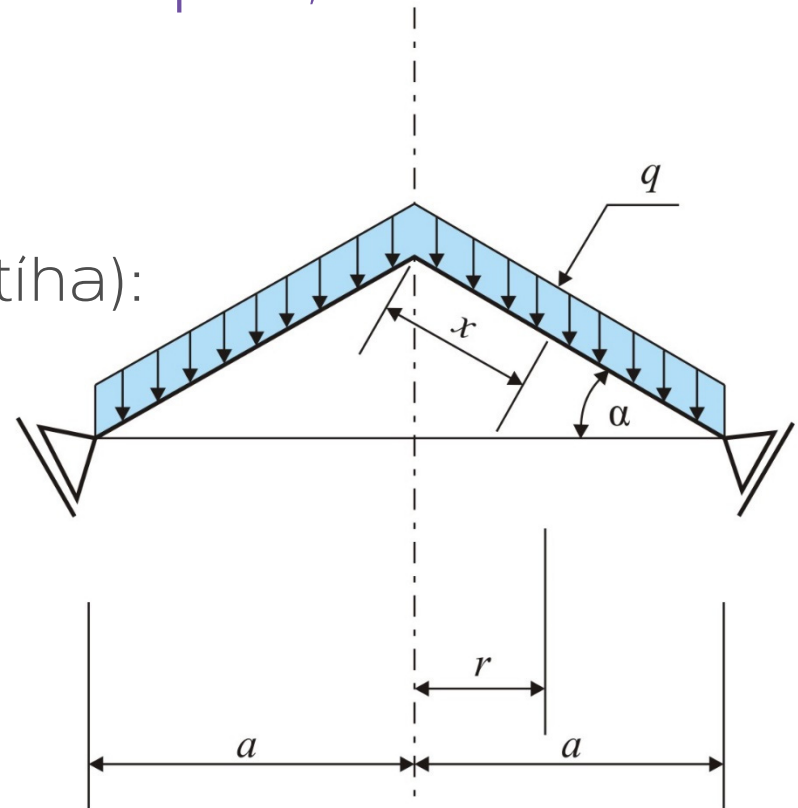
Jiné typy rotačních skořepin, kuželová báň

Příklad výpočtu pro rovnoměrné spojitě zatížení na délku (vlastní tíha):

$$p_z = q \cdot \frac{r}{x} = q \cdot \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{r_y}$$

$$r_x = \infty$$



Plocha pláště vrchlíku:

$$S = \pi \cdot r \cdot x = \frac{\pi \cdot r^2}{\cos \alpha}$$

$$Q = q \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{\cos \alpha}$$

$$n_x = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha} = -\frac{q \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = -\frac{q \cdot r}{\sin 2\alpha}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin \alpha} - p_z \cdot r_y = -q \cdot \cos \alpha \cdot \frac{r}{\sin \alpha} = -q \cdot r \cdot \cotan \alpha$$

Jiné typy rotačních skořepin, rotační váleček

Pro **rotační váleček** platí: $r_x = \infty$, $r_y = r = a$, $\alpha = 90^\circ$.

$$n_x = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \alpha} = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

$$n_y = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r_x \cdot \sin^2 \alpha} - p_z \cdot r_y = -p_z \cdot a$$

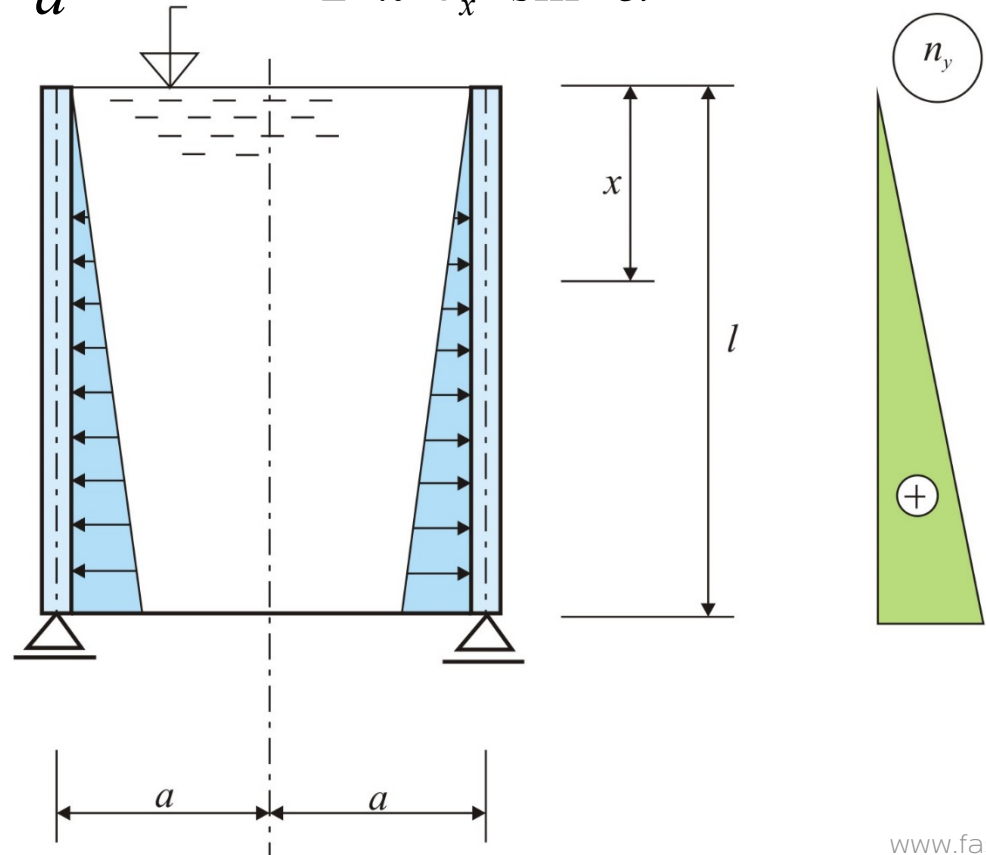
Účinek tlaku kapaliny
o objemové tíze γ :

$$Q = 0$$

$$p_z = -\gamma \cdot x$$

$$n_x = 0$$

$$n_y = \gamma \cdot a \cdot x$$



Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie

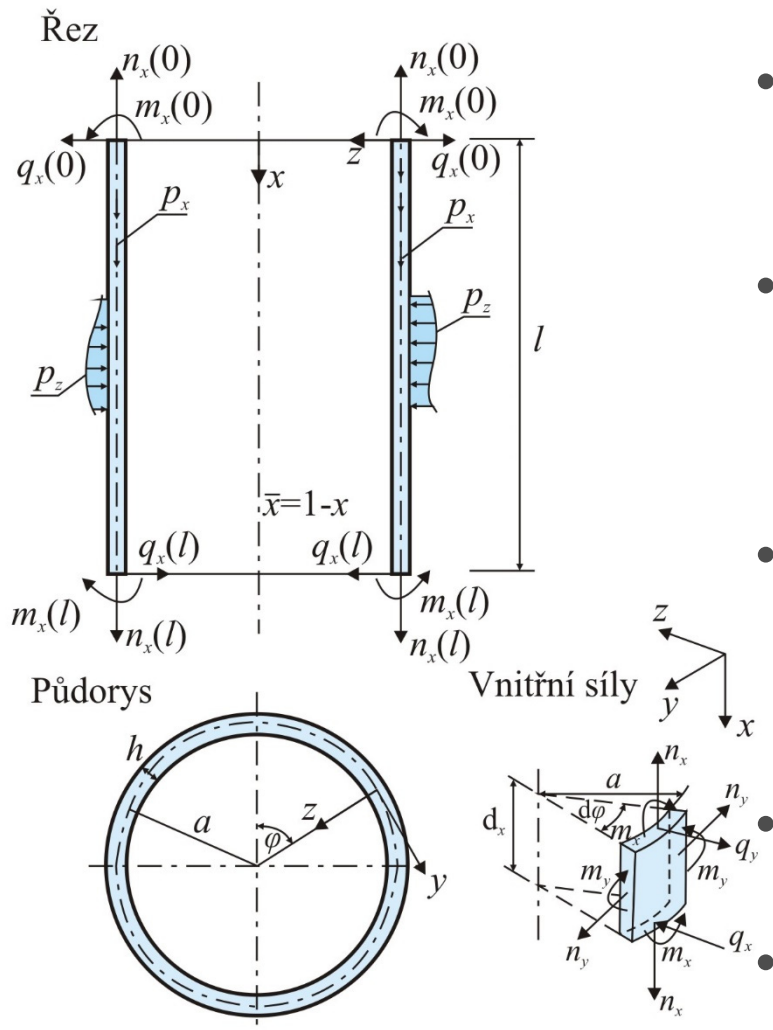
Ohybová teorie skořepin uvažuje nejen vnitřní síly v rovině tečné ke střednicové ploše (**normálové a smykové síly**), ale také složky vnitřních sil charakteristické pro namáhání ohybem (**ohybové a kroutící momenty, posouvající síly**).

U rotačně souměrných válcových skořepin odpadají složky vnitřních sil neslučitelné s rotační symetrií:

- smykové síly t_{xy} ,
- kroutící momenty m_{xy} ,
- posouvající síly q_y .

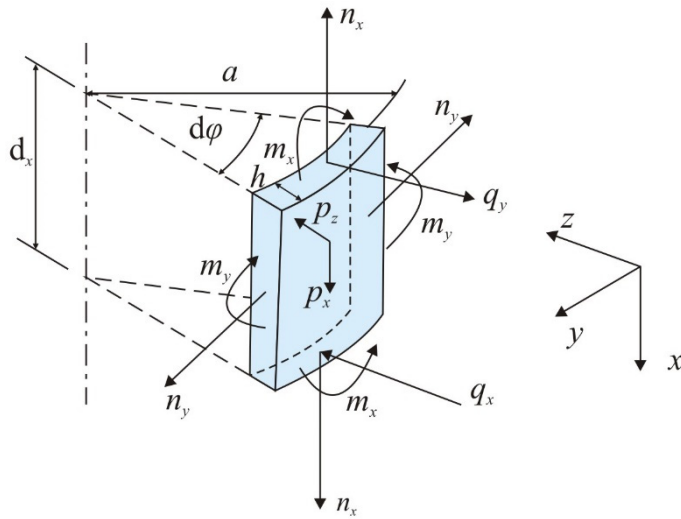


Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, označení veličin



- Označení složek vnitřních sil je zřejmé z obr.
- Osy x , y , z procházejí zvoleným bodem střednicové plochy (mají lokální charakter).
- Osa x je rovnoběžná s osou rotačního válce, osa y je tečnou ke kružnici, osa z je kolmá ke kružnici.
- Normálové měrné síly n_x a n_y jsou rovnoběžné s osami x , y , měrná posouvající síla q_x je kolmá k ose x .
- Měrný ohybový moment m_x (m_y) se otáčí kolem osy y (x).
- Zatížení p_x (p_z) působí ve směru osy x (z).

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, rovnice rovnováhy



Na elementu musí být splněny podmínky rovnováhy:

- rovnováhy sil ve směru os x a z
- momentová podmínka okolo osy y

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \left(n_x + \frac{dn_x}{dx} dx \right) \cdot a \cdot d\varphi - n_x \cdot a \cdot d\varphi + p_x \cdot a \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) \cdot a \cdot d\varphi - q_x \cdot a \cdot d\varphi + n_y \cdot d\varphi \cdot dx + p_z \cdot a \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \left(m_x + \frac{dm_x}{dx} dx \right) \cdot a \cdot d\varphi - m_x \cdot a \cdot d\varphi - q_x \cdot a \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, rovnice rovnováhy

Rovnice:

$$\left(n_x + \frac{dn_x}{dx} dx \right) \cdot a \cdot d\varphi - n_x \cdot a \cdot d\varphi + p_x \cdot a \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$
$$\left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) \cdot a \cdot d\varphi - q_x \cdot a \cdot d\varphi + n_y \cdot d\varphi \cdot dx + p_z \cdot a \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$
$$\left(m_x + \frac{dm_x}{dx} dx \right) \cdot a \cdot d\varphi - m_x \cdot a \cdot d\varphi - q_x \cdot a \cdot d\varphi \cdot dx = 0$$

Ize upravit na tvar:

$$\frac{dn_x}{dx} + p_x = 0$$

$$\frac{dq_x}{dx} + \frac{n_y}{a} + p_z = 0$$

$$\frac{dm_x}{dx} - q_x = 0 \rightarrow \frac{d^2 m_x}{dx^2} = \frac{dq_x}{dx}$$

n_x Ize určit přímou integrací, je zpravidla nepodstatné

Ze druhé rovnice lze určit dq_x a dosadit do třetí rovnice:

$$\frac{d^2 m_x}{dx^2} + \frac{n_y}{a} = -p_z$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, odvození základní rovnice

V odvozené rovnici jsou neznámé m_x a n_y , je tedy 1x staticky neurčitá. K řešení nutno aplikovat geometrickou a fyzikální rovnici (vyplývá z obr.):

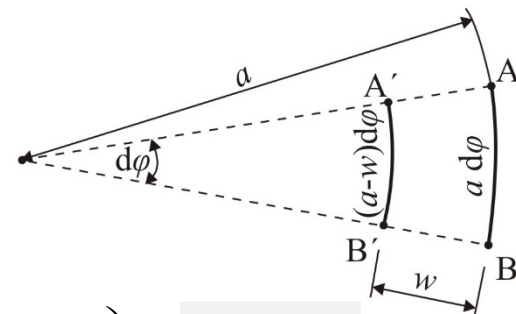
$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{w}{a}$$

Po dosazení do Hookova zákona:

$$n_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dx} - \mu \frac{w}{a} \right) = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = \mu \frac{w}{a}$$

$$n_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{a} + \mu \frac{du}{dx} \right) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(-\frac{w}{a} + \mu^2 \frac{w}{a} \right) = -\frac{Eh}{a} w$$



Ohybové momenty jsou při radiální symetrii obdobné jako u desek:

$$m_x = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{d^2 w}{dy^2} \right) = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$m_y = -D \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -D \mu \frac{d^2 w}{dx^2} = \mu \cdot m_x$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, odvození základní rovnice

Do rovnice: $\frac{d^2 m_x}{dx^2} + \frac{n_y}{a} = -p_x$ lze dosadit za n_y a m_x :

$$n_y = -\frac{Eh}{a} w$$

$$m_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Po úpravě: $D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = p_z$

Rovnice představuje základní vztah vyšetřované úlohy.

První člen odpovídá části příčného zatížení přebíraného ohybem.

Pro deskovou tuhost $D \rightarrow 0$ nastává membránový stav.

Po vyřešení průhybové funkce $w=w(x)$ lze určit složky měrných vnitřních sil m_x (viz výše), m_y , q_x a n_y (viz výše) :

$$m_y = \mu \cdot m_x$$

$$q_x = \frac{dm_x}{dx}$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, řešení základní rovnice

Rovnici: $D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = p_z$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{D \cdot 12 \cdot (1 - \mu^2)}{a^2 h^2} w = p_z$$

je vhodné upravit na tvar: $\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4}{c^4} w = \frac{p_z}{D}$

kde $c^4 = \frac{(a \cdot h)^2}{3 \cdot (1 - \mu^2)}$ resp. $c = \frac{\sqrt{a \cdot h}}{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - \mu^2)}}$

Pro $\mu = 0,2$ je: $c = 0,768 \cdot \sqrt{a \cdot h}$

Základní rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními součiniteli.

Její výpočet se skládá z určení partikulárního řešení w_0 úplné rovnice a z obecného řešení rovnice w_1 homogenní rovnice (bez pravé strany).

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, řešení základní rovnice

Partikulární řešení rovnice $\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{4}{c^4} w = \frac{p_z}{D}$ je snadné pro p_z , které je maximálně funkcí $(x)^3$.

$$\text{Potom je: } w_0 = \frac{p_z \cdot c^4}{4 \cdot D} = \frac{p_z \cdot (a \cdot h)^2}{4 \cdot 3 \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}} = \frac{a^2 \cdot p_z}{E \cdot h}$$

Obecné řešení homogenní rovnice lze napsat ve tvaru:

$$w_1 = C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + C_3 \cdot f_3 + C_4 \cdot f_4 \quad \text{kde } f_i = f_i(x) \text{ je:}$$

$$f_1 = e^{-\frac{x}{c}} \cdot \cos \frac{x}{c} \quad f_2 = e^{-\frac{x}{c}} \cdot \sin \frac{x}{c} \quad f_3 = e^{-\frac{l-x}{c}} \cdot \cos \frac{l-x}{c} \quad f_4 = e^{-\frac{l-x}{c}} \cdot \sin \frac{l-x}{c}$$

Výhodné je
označit:

$$f_5 = f_1 + f_2 \quad f_6 = f_1 - f_2 \quad f_7 = f_3 + f_4 \quad f_8 = f_3 - f_4$$

C_1 , C_2 , C_3 a C_4 jsou integrační konstanty.

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, integrační tabulka

Pro hodnoty f_i platí integrační tabulka:

f_i	f_i'	f_i''	f_i'''	f_i''''
f_1	$-f_5/c$	$2f_2/c^2$	$2f_6/c^3$	$-4f_1/c^4$
f_2	f_6/c	$-2f_1/c^2$	$2f_5/c^3$	$-4f_2/c^4$
f_3	f_7/c	$2f_4/c^2$	$-2f_8/c^3$	$-4f_3/c^4$
f_4	$-f_8/c$	$-2f_3/c^2$	$-2f_7/c^3$	$-4f_4/c^4$

O správnosti hodnot funkcí v integrační tabulce se lze přesvědčit postupným integrováním.

Rotálně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, výpočet složek měrných vnitřních sil

Při znalosti hodnot w_1 a jejich derivací, lze určit složky měrných vnitřních sil:

$$w_1 = C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + C_3 \cdot f_3 + C_4 \cdot f_4$$

$$w_1' = \frac{dw_1}{dx} = \frac{1}{c} \cdot (-C_1 f_5 + C_2 f_6 + C_3 f_7 - C_4 f_8)$$

$$m_{x1} = -D \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{Ehc^2}{2a^2} \cdot (C_1 f_2 - C_2 f_1 + C_3 f_4 - C_4 f_3)$$

$$q_{x1} = \frac{dm_{x1}}{dx} = -\frac{Ehc}{2a^2} \cdot (C_1 f_6 + C_2 f_5 - C_3 f_8 - C_4 f_7)$$

$$n_{y1} = -\frac{Eh}{a} w_1 = -\frac{Eh}{a} \cdot (-C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 - C_4 f_4)$$

Výsledky lze získat součtem s partikulárními účinky odvozenými zcela analogicky z w_0 .

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, okrajové podmínky

Integrační konstanty C_1 , C_2 , C_3 a C_4 vyplývají z okrajových podmínek. V úvahu přichází:

- **Volný nezatížený okraj:** $m_x = 0$, $q_x = 0$,
- **Kloubové uložení (nezatížené momentem):** $w = 0$, $m_x = 0$,
- **Dokonalé vetknutí:** $w = 0$, $w' = 0$.

Ohybový stav je obvykle vázán na určitou okrajovou podmínku způsobující poruchu membránového stavu.



Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, okrajové podmínky

Hovoří se též o **okrajové poruše** bránící deformacím charakteristickým pro membránový stav. Ty se zmenšují se vzdalováním od okraje.

Členy f_1, f_2 vyjadřují poruchu vlivem horního okraje ($x=0$), f_3, f_4 - analogicky porucha spodního okraje ($x=l$).

Často se uvádí tzv. účinná délka $5.c$ ($e^{-5} = 0,0067$, tj. 0,67 % z hodnoty pro $x = 0$).

Je-li délka (výška) válce $l \geq 5.c$, neprojeví se účinky z jednoho okraje na druhém okraji, (např. pro okraj volný pak $C_1 = C_2 = 0$, viz příklad dále).

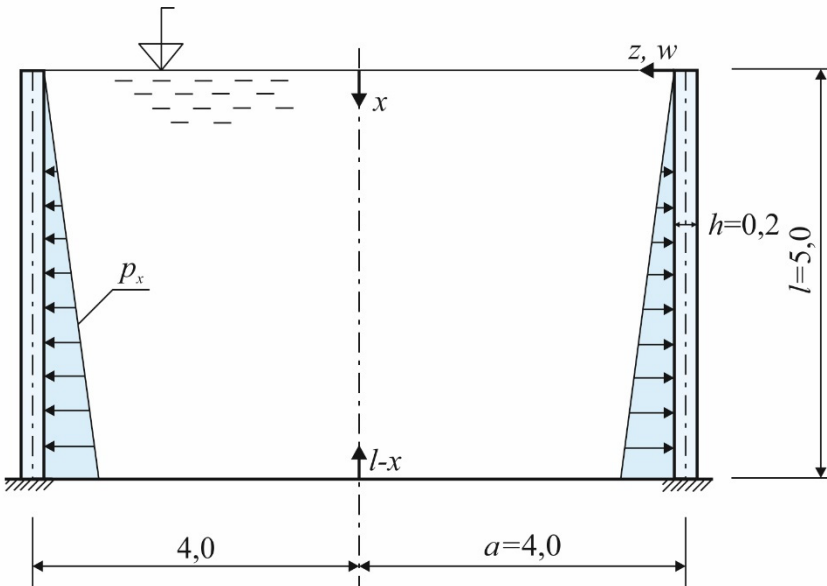
Hodnota délkové konstanty c má podstatný vliv na délku poruchy membránového stavu.



Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, příklad

Válcová betonová nádrž ($E = 27,0 \text{ kPa}$, $\mu = 0,2$) s konstantní tloušťkou $h = 0,2 \text{ m}$ o poloměru $a = 4 \text{ m}$ a výšce $l = 5 \text{ m}$ je zatížena tíhou kapaliny ($\gamma = 10 \text{ kNm}^{-3}$). Stěna nádrže je na horním okraji volná, na spodním okraji vetknutá. Vypočtete průběh složek vnitřních sil.

Řešení: Desková tuhost: $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{27 \cdot 10^6 \cdot 0,2^3}{12 \cdot (1 - 0,2^2)} = 18750 \text{ kPa}$



Účinná délka:

$$c = \frac{\sqrt{a \cdot h}}{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - \mu^2)}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 0,2}}{\sqrt[4]{3 \cdot (1 - 0,04)}} = 0,687 \text{ m}$$

$$5 \cdot c = 5 \cdot 0,687 = 3,435 \text{ m} \leq l = 5 \text{ m}$$

Okraje se neovlivňují ($C_1 = C_2 = 0$).

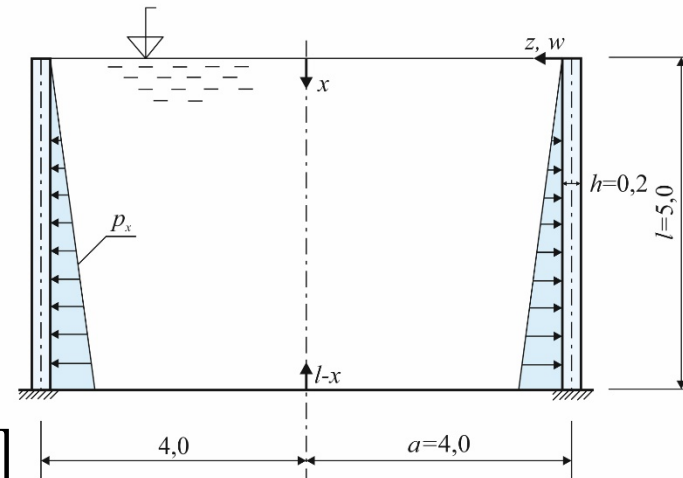
Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, řešení příkladu

Průběh zatížení je dán tlakem kapaliny:

$$p_z = -\gamma \cdot x = -10 \cdot x \text{ [kPa]}$$

Partikulární řešení:

$$w_0 = \frac{a^2 \cdot p_z}{E \cdot h} = \frac{4^2 \cdot (-10 \cdot x)}{27 \cdot 10^6 \cdot 0,2} = -29,63 \cdot x \cdot 10^{-6} \text{ [m]}$$



Posuv v patě: $w_0(x=5) = -148,15 \cdot 10^{-6} \text{ m} = -0,15 \text{ mm}$

Partikulární hodnoty pootočení a měrné složky vnitřních sil:

$$w_0' = \frac{dw_0}{dx} = -29,63 \cdot 10^{-6} \quad n_{y0} = -\frac{E \cdot h}{a} \cdot w_0 = -a \cdot p_z = 40 \cdot x \quad \begin{matrix} m_{x0} = 0 \\ q_{x0} = 0 \end{matrix}$$

Partikulární řešení zajišťuje splnění okrajových podmínek na horním okraji, spodní okraj neovlivňuje horní okraj (viz dále).

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, řešení příkladu

Obecné řešení je dáno vztahy:

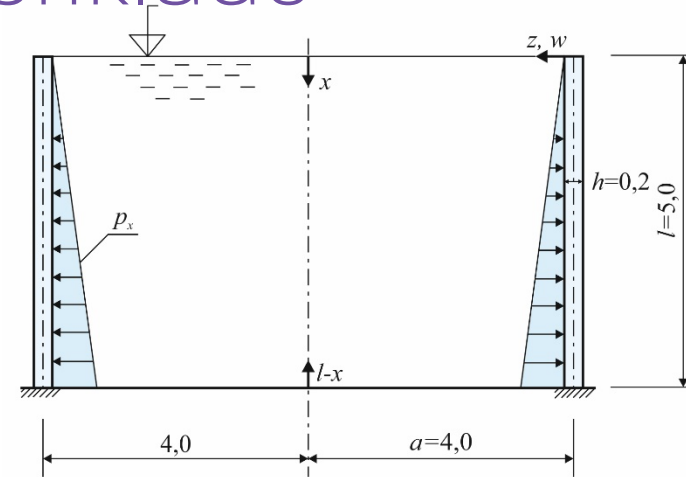
$$w_1 = C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + C_3 \cdot f_3 + C_4 \cdot f_4$$

$$w_1' = \frac{dw_1}{dx} = \frac{1}{c} \cdot (-C_1 f_5 + C_2 f_6 + C_3 f_7 - C_4 f_8)$$

$$m_{x1} = -D \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{Ehc^2}{2a^2} \cdot (C_1 f_2 - C_2 f_1 + C_3 f_4 - C_4 f_3)$$

$$q_{x1} = \frac{dm_{x1}}{dx} = -\frac{Ehc}{2a^2} \cdot (C_1 f_6 + C_2 f_5 - C_3 f_8 - C_4 f_7)$$

$$n_{y1} = -\frac{Eh}{a} w_1 = -\frac{Eh}{a} \cdot (-C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 - C_4 f_4)$$



Na horním okraji ($x = 0$) je: $m_{x1}(x = 0) = 0$ $q_{x1}(x = 0) = 0$

Na spodním okraji ($x = l$) je: $w(x = l) = 0$ $w'(x = l) = 0$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, okrajové podmínky příkladu

$$m_{x1}(x=0) = 0 \quad -\frac{Ehc^2}{2a^2} \cdot (C_1 f_2 - C_2 f_1 + C_3 f_4 - C_4 f_3) = 0 \rightarrow (C_1 f_2 - C_2 f_1 + C_3 f_4 - C_4 f_3) = 0$$

$$f_1 = e^{-\frac{x}{c}} \cdot \cos \frac{x}{c} \quad f_2 = e^{-\frac{x}{c}} \cdot \sin \frac{x}{c} \quad f_3 = e^{-\frac{l-x}{c}} \cdot \cos \frac{l-x}{c} \quad f_4 = e^{-\frac{l-x}{c}} \cdot \sin \frac{l-x}{c}$$

$$C_1 \cdot e^{-\frac{-x}{c}} \cdot \sin \frac{x}{c} - C_2 \cdot e^{-\frac{-x}{c}} \cdot \cos \frac{x}{c} + C_3 \cdot e^{-\frac{l-x}{c}} \cdot \sin \frac{l-x}{c} - C_4 \cdot e^{-\frac{l-x}{c}} \cdot \cos \frac{l-x}{c} = 0$$

$$-C_2 + C_3 \cdot e^{\frac{5}{0,6869}} \cdot \sin \frac{5}{0,6869} - C_4 \cdot e^{-\frac{5}{0,6869}} \cdot \cos \frac{5}{0,6869} = 0$$

$$-C_2 + C_3 \cdot 0,000579 - C_4 \cdot 0,000375 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$q_{x1}(x=0) = 0 \quad -\frac{Ehc}{2a^2} (C_1 f_6 + C_2 f_5 - C_3 f_8 - C_4 f_7) = 0 \rightarrow C_1 f_6 + C_2 f_5 - C_3 f_8 - C_4 f_7 = 0$$

$$f_5 = f_1 + f_2 \quad f_6 = f_1 - f_2 \quad f_7 = f_3 + f_4 \quad f_8 = f_3 - f_4$$

$$C_1(f_1 - f_2) - C_3(f_3 - f_4) - C_4(f_3 + f_4) = 0$$

$$C_1(1 - 0) - C_3(0,000375 - 0,000579) - C_4(0,000375 + 0,000579) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, okrajové podmínky příkladu

$$w(x=l=5)=0 \quad w(x=5)=w_0(x=5)+w_1(x=5)=0$$

$$w_0(x=5)=-29,63 \cdot 10^{-6} \cdot x = -148,15 \cdot 10^{-6}$$

$$w_1(x=5)=C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 - C_4 f_4 = C_3 \cdot e^0 \cos 0 + C_4 \cdot e^0 \sin 0 \rightarrow w_1(x=5)=C_3$$

$$w(x=5)=w_0(x=5)+w_1(x=5)=-148,15 \cdot 10^{-6} + C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 148,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$w'(x=l)=0 \quad w'(x=5)=w'_0(x=5)+w'_1(x=5)=0 \quad w'_0(x=5)=-29,63 \cdot 10^{-6}$$

$$w'_1(x=5)=\frac{1}{c} \cdot (-C_1 f_5 + C_2 f_6 + C_3 f_7 - C_4 f_8)$$

$$w'_1(x=5)=\frac{1}{0,6869} \cdot (C_3 f_7 - C_4 f_8) = \frac{1}{0,6869} \cdot [148,15 \cdot 10^{-6} (f_3 + f_4) - C_4 (f_3 - f_4)]$$

$$w'_1(x=5)=\frac{1}{0,6869} \cdot [148,15 \cdot 10^{-6} (e^0 \cos 0 + e^0 \sin 0) - C_4 (e^0 \cos 0 - e^0 \sin 0)]$$

$$w'_1(x=5)=\frac{1}{0,6869} \cdot (148,15 \cdot 10^{-6} - C_4)$$

$$w'(x=5)=-29,63 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{0,6869} \cdot (148,15 \cdot 10^{-6} - C_4) = 0 \rightarrow C_4 = 127,80 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, výpočet přetvoření příkladu

Výsledné funkce přetvárných veličin:

Průhybová funkce $w = w(x)$:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) = -\frac{a^2 \cdot \gamma \cdot x}{E \cdot h} + C_3 f_3 + C_4 f_4$$

$$w(x) = -29,63 \cdot 10^{-6} \cdot x + \left(148,15 \cdot \cos \frac{5-x}{0,6869} + 127,80 \cdot \sin \frac{5-x}{0,6869} \right) \cdot e^{-\frac{5-x}{0,6869}} \cdot 10^{-6}$$

Pootočení - derivace průhybové funkce $w' = w'(x)$:

$$w'(x) = w'_0(x) + w'_1(x) = -\frac{a^2 \cdot \gamma}{E \cdot h} + \frac{1}{c} \cdot (C_3 f_7 - C_4 f_8)$$

$$w'(x) = -29,63 \cdot 10^{-6} + \left(\frac{20,35}{0,6869} \cdot \cos \frac{5-x}{0,6869} + \frac{275,95}{0,6869} \cdot \sin \frac{5-x}{0,6869} \right) \cdot e^{-\frac{5-x}{0,6869}} \cdot 10^{-6}$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, výpočet složek měrných vnitřních sil příkladu

Výsledné funkce složek měrných vnitřních sil:

$$n_y(x) = -\frac{E \cdot h}{a} \cdot w(x) = -\frac{E \cdot h}{a} \cdot [w_0(x) + w_1(x)]$$

$$n_y(x) = -\frac{27 \cdot 10^6 \cdot 0,2}{4} \cdot \left[-29,63 \cdot 10^{-6} \cdot x + \left(148,15 \cdot \cos \frac{5-x}{0,6869} + 127,80 \cdot \sin \frac{5-x}{0,6869} \right) \cdot e^{-\frac{5-x}{0,6869}} \cdot 10^{-6} \right]$$

$$n_y(x) = 40,00 \cdot x - \left(200,00 \cdot \cos \frac{5-x}{0,6869} + 172,53 \cdot \sin \frac{5-x}{0,6869} \right) \cdot e^{-\frac{5-x}{0,6869}}$$

$$m_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Ehc^2}{2a^2} \cdot (C_1 f_2 - C_2 f_1 + C_3 f_4 - C_4 f_3)$$

$$m_x = -\frac{27 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,6869^2}{2 \cdot 4^2} \cdot \left(148,15 \cdot \sin \frac{l-x}{c} - 127,80 \cdot \cos \frac{l-x}{c} \right) \cdot e^{\frac{5-x}{0,6869}} \cdot 10^{-6}$$

$$m_x = \left(-11,8423 \cdot \sin \frac{l-x}{c} + 10,2156 \cdot \cos \frac{l-x}{c} \right) \cdot e^{\frac{5-x}{0,6869}}$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie, výpočet složek měrných vnitřních sil příkladu

Výsledné funkce složek měrných vnitřních sil:

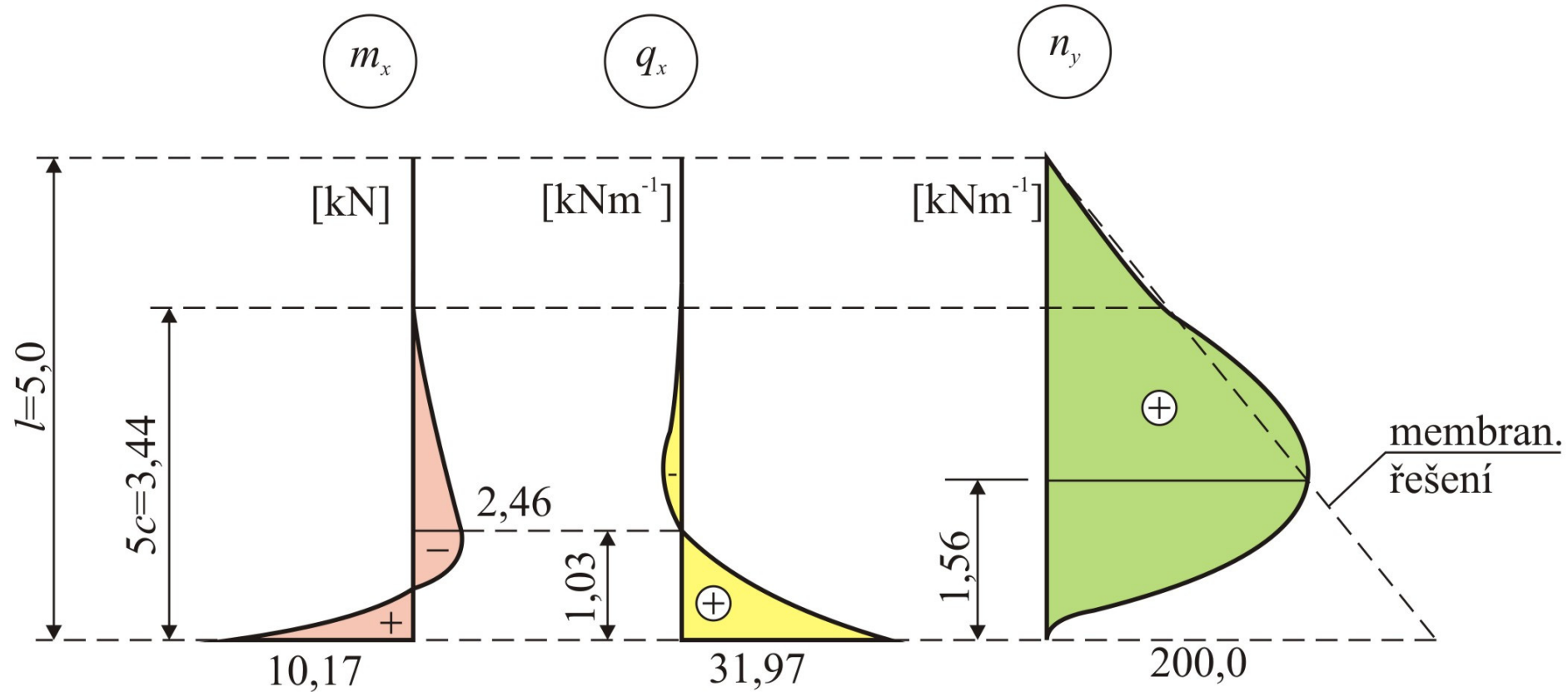
$$q_x = \frac{dm_{x1}}{dx} = -\frac{Ehc}{2a^2} \cdot (C_1 f_6 + C_2 f_5 - C_3 f_8 - C_4 f_7)$$

$$q_x = -\frac{27 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,6869}{2 \cdot 4^2} \cdot \begin{bmatrix} -148,15 \cdot \left(\cos \frac{l-x}{c} - \sin \frac{l-x}{c} \right) \\ -127,80 \cdot \left(\cos \frac{l-x}{c} + \sin \frac{l-x}{c} \right) \end{bmatrix} \cdot e^{\frac{5-x}{0,6869}} \cdot 10^{-6}$$

$$q_x = 0,11591 \cdot \begin{bmatrix} 148,15 \cdot \left(\cos \frac{l-x}{c} - \sin \frac{l-x}{c} \right) \\ +127,80 \cdot \left(\cos \frac{l-x}{c} + \sin \frac{l-x}{c} \right) \end{bmatrix} \cdot e^{\frac{5-x}{0,6869}}$$

$$q_x = \left(31,9019 \cdot \cos \frac{l-x}{c} - 2,3588 \cdot \sin \frac{l-x}{c} \right) \cdot e^{\frac{5-x}{0,6869}}$$

Rotačně souměrné válcové skořepiny, ohybová teorie



Příklad řešení skořepiny podle ohybové teorie, průběh měrných složek vnitřních sil

Skořepinové konstrukce, shrnutí

- Obecné řešení skořepinových konstrukcí je úlohou velmi složitou. Dnes se řeší zejména s využitím metody konečných prvků.
- Ve skořepinách při zatížení vznikají síly v tečné rovině ke střednicové ploše (3 složky) a v příčné rovině ke střednicové ploše (5 složek).
- Složky deformace jsou obecně 3 (posuvy u , v , w).
- Celkem je 11 neznámých silových a deformačních veličin.



Skořepinové konstrukce, shrnutí

- Pro každý element skořepiny lze napsat 5 podmínek rovnováhy (momentová podmínka k normále střednicové plochy je identicky splněna).
- Deformační podmínky lze zapsat pro deformaci střednicové plochy (3 podmínky) a další 3 pro obecnou rovinu.
- Celkem je 11 rovnovážných a deformačních podmínek.
- S využitím Hookova zákona lze obdržet 6 deformačních rovnic svazujících 3 posuvy a 8 složek vnitřních sil.

