VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

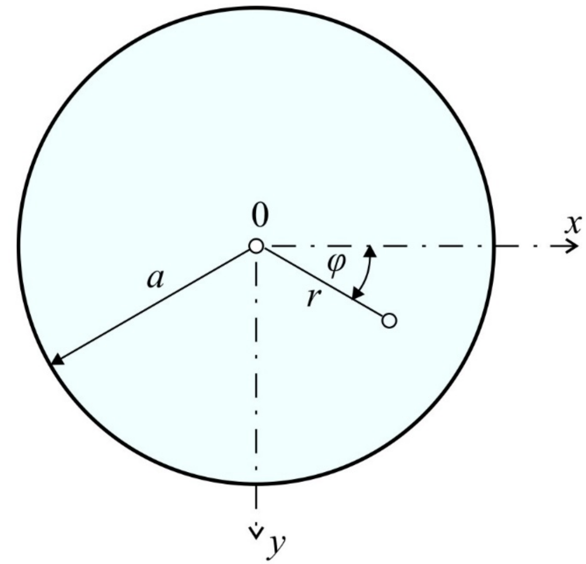
prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

6

Kruhové a mezikruhové nosné desky

Kruhové a mezikruhové desky (rotačně symetrické)

Při jejich řešení je vhodné použití válcových (cylindrických) souřadnic.
V půdoryse je poloha určena polárními souřadnicemi r a φ.
Ve válcových souřadnicích přibývá ještě souřadnice z. Posuvy pak jsou u, v a w.



Měrné vnitřní síly jsou obecně:

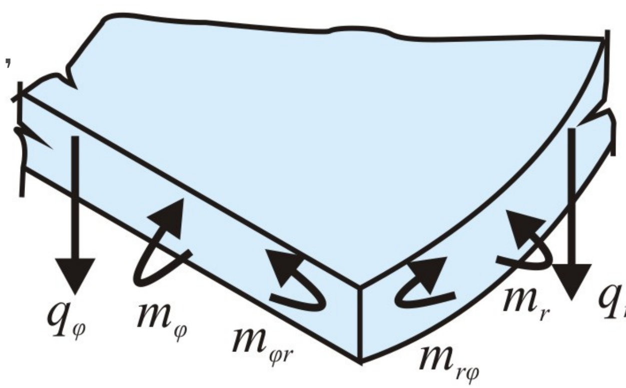
m_r ohybové momenty radiální,

m_φ ohybové momenty tangenciální,

$m_{r\varphi}$ kroutící momenty,

q_r posouvající síly radiální,

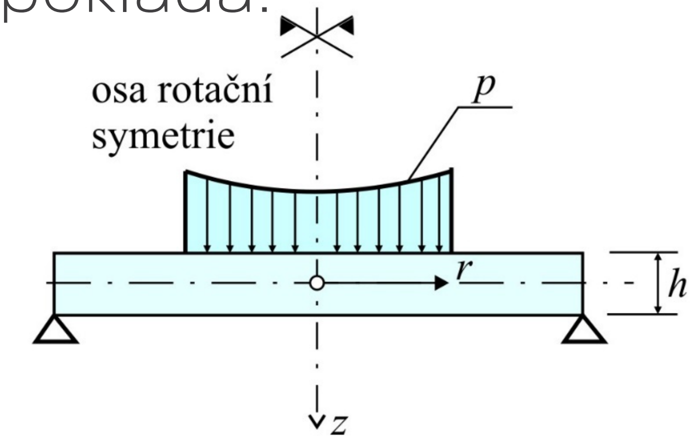
q_φ posouvající síly tangenciální.



Kruhové a mezikruhové desky (rotačně symetrické)

U rotačně symetrických úloh se předpokládá:

- rotačně symetrické podepření,
- rotačně symetrické zatížení,
- izotropní nebo rotačně anizotropní vlastnosti materiálu desky.



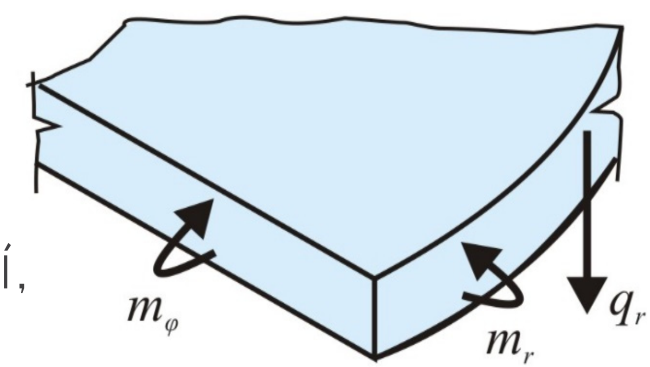
U rotační symetrie jsou všechny veličiny funkcí jediné proměnné r. Posunutí v je nulové.

Nenulové měrné vnitřní síly jsou:

m_r ohybové momenty radiální,

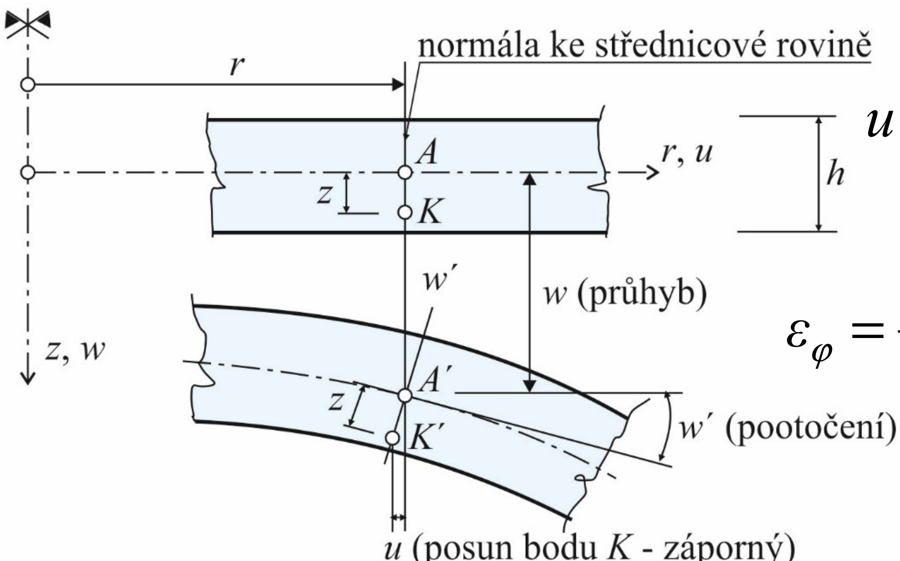
m_φ ohybové momenty tangenciální,

q_r posouvající síly radiální.



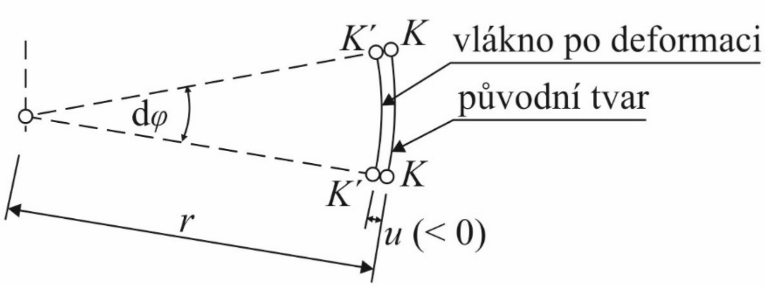
Kruhové a mezikruhové desky, geometrické a fyzikální rovnice

Předpoklady Kirchhoffovy teorie zůstávají v platnosti.



$$u = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} \cdot z = -w' \cdot z \qquad \varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = u' = -w'' \cdot z$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{K'K' - KK}{KK} = \frac{(r+u)\,\mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\varphi}{r\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{u}{r} = -\frac{w'}{r} \cdot z$$



Po dosazení do Hookova zákona:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi\right) = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(w'' + \mu \frac{w'}{r}\right) \cdot z$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r\right) = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{w'}{r} + \mu \cdot w''\right) \cdot z$$

Kruhové a mezikruhové desky, měrné ohybové momenty

Při znalostí normálových napětí lze odvodit pomocí integrace momentových účinků po tloušťce kruhové nosné desky měrné ohybové momenty:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi\right) = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(w'' + \mu\frac{w'}{r}\right)z$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r\right) = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{w'}{r} + \mu\cdot w''\right)z$$

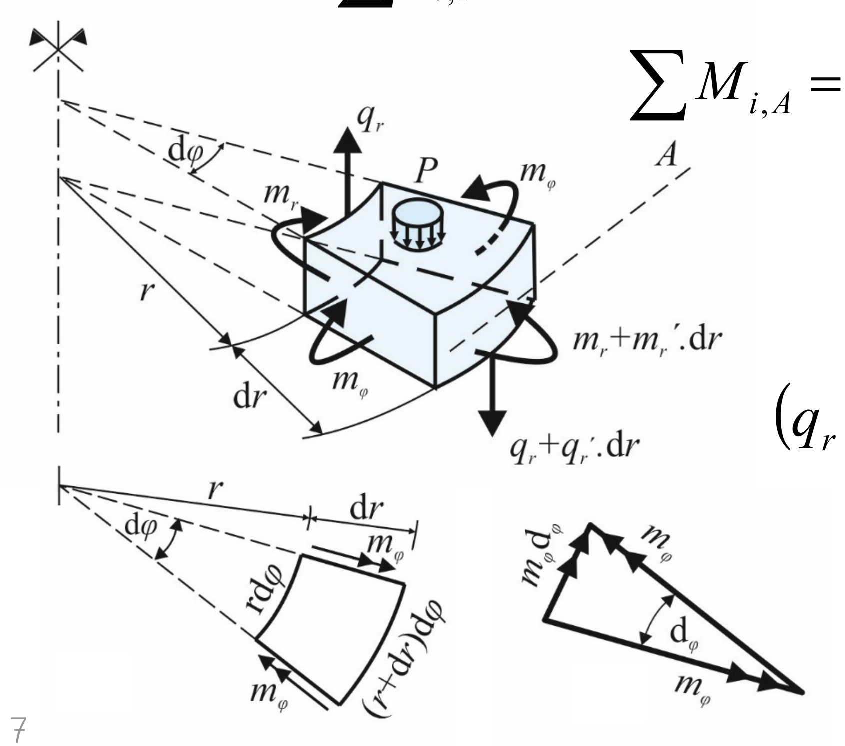
$$m_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z\,\mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(w'' + \mu\frac{w'}{r}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2\mathrm{d}z = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\cdot\left(w'' + \mu\frac{w'}{r}\right) = -D\cdot\left(w'' + \mu\frac{w'}{r}\right)$$

$$m_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z\,\mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{w'}{r} + \mu\cdot w''\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2\mathrm{d}z = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\cdot\left(\frac{w'}{r} + \mu\cdot w''\right) = -D\cdot\left(\frac{w'}{r} + \mu\cdot w''\right)$$

Kruhové a mezikruhové desky, podmínky rovnováhy

U radiálně symetrických úloh stačí formulovat pouze 2 podmínky rovnováhy - silovou ve směru osy z a momentovou k tečné ose. K radiální ose je podmínka rovnováhy splněna identicky.

$$\sum F_{i,z} = 0: \quad q_r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi - \left(q_r + q_r' \cdot \mathrm{d}r\right) \cdot \left(r + \mathrm{d}r\right) \cdot \mathrm{d}\varphi - p \cdot \mathrm{d}r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi = 0$$



$$\sum M_{i,A} = 0: \quad -m_r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi + \left(m_r + m_r' \cdot \mathrm{d}r\right) \cdot \left(r + \mathrm{d}r\right) \cdot \mathrm{d}\varphi - $$
$$- m_\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi - q_r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r = 0$$

Po úpravách (viz dále) platí:

$$\left(q_r \cdot r\right)' + p \cdot r = 0 \qquad \left(m_r \cdot r\right)' - q_r \cdot r - m_\varphi = 0$$

resp.

$$\left(m_r r\right)'' - m_\varphi' + p \cdot r = 0$$

Kruhové a mezikruhové desky, podmínky rovnováhy

$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$q_r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi - \left(q_r + q_r' \cdot \mathrm{d}r\right) \cdot \left(r + \mathrm{d}r\right) \cdot \mathrm{d}\varphi - p \cdot \mathrm{d}r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi = 0$$

$$q_r \cdot r - q_r \cdot r - q_r \cdot \mathrm{d}r - q_r' \cdot r \cdot \mathrm{d}r - q_r' \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}r - p \cdot \mathrm{d}r \cdot r = 0$$

$$q_r + q_r' \cdot r + q_r' \cdot \mathrm{d}r + p \cdot r = 0$$

$$\boxed{q_r' \cdot \mathrm{d}r = 0}$$

$$\left(q_r \cdot r\right)' + p \cdot r = 0$$

$$\boxed{q_r + q_r' \cdot r = \left(q_r \cdot r\right)'}$$

obecně: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\sum M_{i,A} = 0:$$

$$-m_r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi + \left(m_r + m_r' \cdot \mathrm{d}r\right) \cdot \left(r + \mathrm{d}r\right) \cdot \mathrm{d}\varphi - m_\varphi \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi - q_r \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r = 0$$

$$-m_r \cdot r + m_r \cdot r + m_r \cdot dr + m_r' \cdot r \cdot \mathrm{d}r + m_r' \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}r - m_\varphi \cdot \mathrm{d}r - q_r \cdot r \cdot \mathrm{d}r = 0$$

$$m_r + m_r' \cdot r + m_r' \cdot \mathrm{d}r - m_\varphi - q_r \cdot r = 0$$

$$\boxed{m_r' \cdot \mathrm{d}r = 0}$$

$$\left(m_r r\right)' - m_\varphi - q_r \cdot r = 0$$

$$\boxed{m_r + m_r' \cdot r = \left(m_r r\right)'}$$

Kruhové a mezikruhové desky, desková rovnice

Do rovnice:

$$\boxed{(m_r \cdot r)'' - m'_\varphi + p \cdot r = 0}$$

se dosadí příslušné derivace radiálního a tangenciálního momentu:

$$m_r = -D \cdot \left(w'' + \mu \frac{w'}{r} \right) \qquad m_\varphi = -D \cdot \left(\frac{w'}{r} + \mu \cdot w'' \right)$$

$$\boxed{(m_r \cdot r)'' = -D \cdot (w'''' \cdot r + 2 \cdot w''' + \mu \cdot w''')} \qquad \boxed{(m_\varphi)' = -D \cdot \left(\frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} + \mu \cdot w''' \right)}$$

Po úpravě se dostane desková rovnice ve tvaru:

$$w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' - \frac{1}{r^2} \cdot w'' + \frac{1}{r^3} \cdot w' = \frac{p}{D}$$

Kruhové a mezikruhové desky, desková rovnice, odvození

$$\boxed{(m_r \cdot r)'' - m_\varphi' + p \cdot r = 0} \qquad m_r = -D \cdot \left(w'' + \mu \frac{w'}{r} \right) \qquad m_\varphi = -D \cdot \left(\frac{w'}{r} + \mu \cdot w'' \right)$$

$$(m_r \cdot r)' = m_r + r \cdot m_r' = -D \cdot \left(w'' + \mu \frac{w'}{r} + r \cdot w''' - \mu \frac{w'}{r} + \mu \cdot w' \right)$$

$$\boxed{(m_r \cdot r)'' = -D \cdot (w''' + r \cdot w'''' + w''' + \mu \cdot w') = -D \cdot (w'''' \cdot r + 2 \cdot w''' + \mu \cdot w''')}$$

$$\boxed{(m_\varphi)' = -D \cdot \left(\frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} + \mu \cdot w''' \right)}$$

$$-D \cdot (w'''' \cdot r + 2 \cdot w''' + \mu \cdot w''') + D \cdot \left(\frac{w''}{r} - \frac{w'}{r^2} + \mu \cdot w''' \right) + p \cdot r = 0$$

$$D \cdot r \cdot \left[w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' + \frac{\mu}{r} \cdot w''' - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} - \frac{\mu}{r} \cdot w''' \right] = p \cdot r$$

$$w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' - \frac{1}{r^2} \cdot w'' + \frac{1}{r^3} \cdot w' = \frac{p}{D}$$

Kruhové a mezikruhové desky, desková rovnice, obecné řešení

Desková rovnice: $$w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' - \frac{1}{r^2} \cdot w'' + \frac{1}{r^3} \cdot w' = \frac{p}{D}$$

Obecné řešení Eulerovy lineární, nehomogenní diferenciální rovnice 4. řádu:

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 \cdot r^2 + C_3 \cdot \ln r + C_4 \cdot r^2 \cdot \ln r$$

C_1, C_2, C_3, C_4 ... integrační konstanty, vyplývající z okrajových podmínek (plné kruhové desky: $C_3 = 0$; pokud není v $r = 0$ bodové zatížení nebo podepření, pak $C_4 = 0$),

w_0 ... partikulární integrál, představuje řešení úplné deskové rovnice (ostatní členy představují řešení homogenní rovnice), závisí na plošném zatížení p,

D ... desková tuhost.

Kruhové a mezikruhové desky, partikulární integrál

Deskovou rovnici: $$w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' - \frac{1}{r^2} \cdot w'' + \frac{1}{r^3} \cdot w' = \frac{p}{D}$$

lze upravit na tvar: $$\left\{ r \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot D \cdot w' \right)' \right]' \right\}' = r \cdot p$$

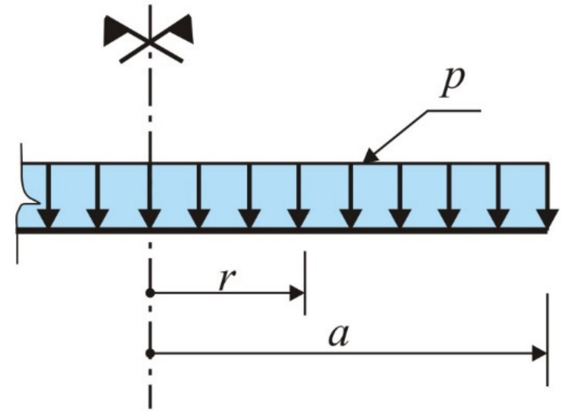
Úpravou lze získat partikulární integrál obecného řešení deskové rovnice:

$$\left\{ r \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot D \cdot w' \right)' \right]' \right\}' = r \cdot p \Rightarrow \left[\frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot D \cdot w' \right)' \right]' = \int \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot p \, \mathrm{d}r$$

$$\left(r \cdot D \cdot w' \right)' = r \cdot \int \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot p \, \mathrm{d}r \Rightarrow D \cdot w' = \frac{1}{r} \cdot \int r \, \mathrm{d}r \cdot \int \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot p \, \mathrm{d}r$$

$$w_0 = \frac{1}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \cdot \int r \, \mathrm{d}r \cdot \int \frac{1}{r} \, \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot p \, \mathrm{d}r$$

Kruhové a mezikruhové desky, partikulární integrál



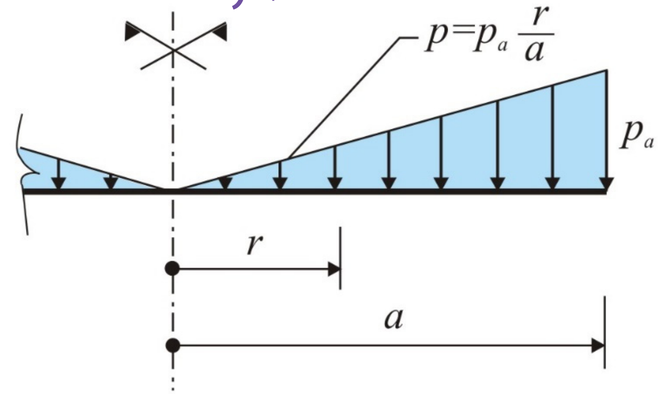
Pro $p = \mathrm{konst.}$ lze z partikulárního integrálu obecného řešení deskové rovnice odvodit:

$$w_0(r) = \frac{1}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \, \mathrm{d}r \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot p \, \mathrm{d}r$$

$$w_0(r) = \frac{p}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \, \mathrm{d}r \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{2} \mathrm{d}r = \frac{p}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot \frac{r^2}{4} \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{p}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \frac{r^4}{16} \mathrm{d}r = \frac{p}{D} \cdot \int \frac{r^3}{16} \mathrm{d}r = \boxed{\frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D}}$$

Kruhové a mezikruhové desky, partikulární integrál



Pro $p = \frac{p_a}{a} r$ lze z partikulárního integrálu obecného řešení deskové rovnice obdobně odvodit:

$$w_0(r) = \frac{1}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \,\mathrm{d}r \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r^2 \cdot \frac{p_a}{a} \mathrm{d}r$$

$$w_0(r) = \frac{p_a}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \,\mathrm{d}r \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \frac{r^3}{3 \cdot a} \mathrm{d}r = \frac{p_a}{D} \cdot \int \frac{1}{r} \mathrm{d}r \cdot \int r \cdot \frac{r^3}{9 \cdot a} \mathrm{d}r =$$

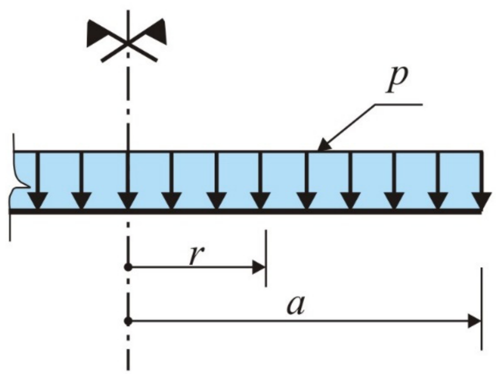
$$= \frac{p_a}{D \cdot a} \cdot \int \frac{1}{r} \cdot \frac{r^5}{45} \mathrm{d}r = \boxed{\frac{p_a \cdot r^5}{225 \cdot a \cdot D}}$$

Kruhové a mezikruhové desky, partikulární řešení deskové rovnice

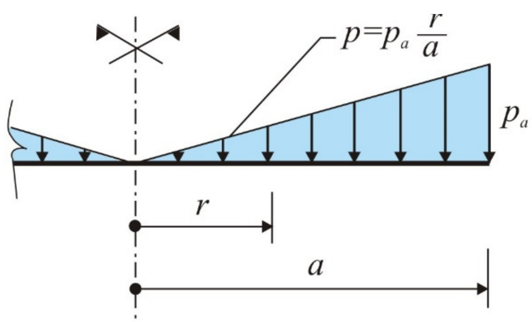
Partikulární řešení deskové rovnice pro případy podle obr.:

$$w'''' + \frac{2}{r}\cdot w''' - \frac{1}{r^2}\cdot w'' + \frac{1}{r^3}\cdot w' = \frac{p}{D}$$

$$w_0(r) = \frac{p\cdot r^4}{64\cdot D}$$



$$w_0(r) = \frac{p_a\cdot r^5}{225\cdot a\cdot D}$$

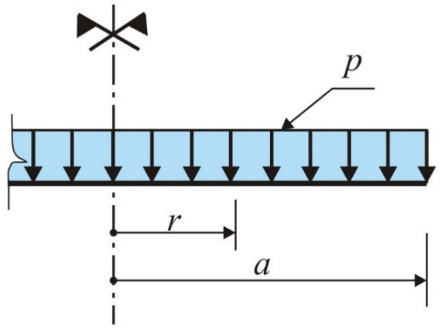


$w_0(r)$ představuje tzv. partikulární integrál, tedy libovolné řešení deskové rovnice včetně pravé strany

O správnosti těchto řešení se lze přesvědčit dosazením do deskové rovnice

Kruhové a mezikruhové desky, partikulární řešení deskové rovnice

Např.:



$$w_0(r) = \frac{p \cdot r^4}{64 \cdot D}$$

$$w_0'(r) = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} \qquad w_0''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} \qquad w_0'''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D} \qquad w_0''''(r) = \frac{3 \cdot p}{8 \cdot D}$$

$$w'''' + \frac{2}{r} \cdot w''' - \frac{1}{r^2} \cdot w'' + \frac{1}{r^3} \cdot w' = \frac{p}{D}$$

$$\frac{3 \cdot p}{8 \cdot D} + \frac{2}{r} \cdot \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} =$$

$$= \frac{p}{D} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{6}{8} - \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{p}{D} \cdot \left(\frac{6 + 12 - 3 + 1}{16} \right) = \frac{p}{D}$$

Kruhové a mezikruhové desky, měrné posouvající síly

Z rovnice:

$$\left(m_r \cdot r\right)' - q_r \cdot r - m_\varphi = 0$$

lze odvodit po dosazení za měrné ohybové momenty **měrnou posouvající sílu q_r**:

$$m_r = -D \cdot \left(w'' + \mu \frac{w'}{r} \right)$$

$$\left(m_r \cdot r\right)' = -D \cdot \left(r \cdot w''' + w'' + \mu \cdot w' \right)$$

$$m_\varphi = -D \cdot \left(\frac{w'}{r} + \mu \cdot w'' \right)$$

$$q_r = \frac{1}{r} \cdot \left[\left(m_r \cdot r\right)' - m_\varphi \right] = -D \cdot \left(w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right)$$

Kruhové a mezikruhové desky, okrajové podmínky

Integrační konstanty C_1, C_2, C_3 a C_4 vyplývají z okrajových podmínek. Opět platí:

- prosté podepření:

$$w = 0 \qquad m_r = 0$$

$$m_r = -D \cdot \left(w'' + \mu \cdot \frac{w'}{r} \right) = 0$$

- vetknutí:

$$w = 0 \qquad w' = 0$$

- volný okraj:

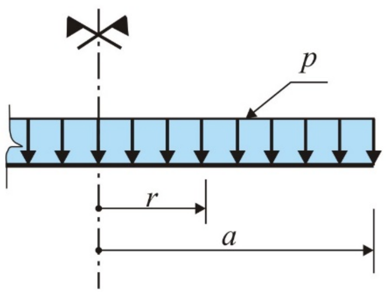
$$m_r = 0 \qquad q_r = 0$$

$$m_r = -D \cdot \left(w'' + \mu \cdot \frac{w'}{r} \right) = 0$$

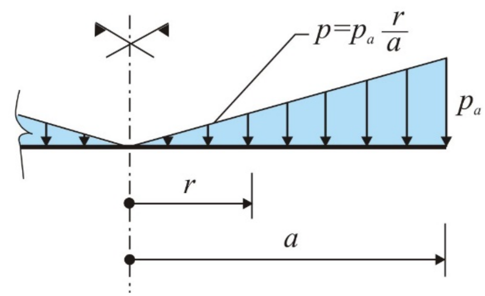
$$q_r = -D \cdot \left(w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right) = 0$$

Základní vztahy pro výpočet kruhových a mezikruhových desek

$$w(r)=w_0(r)+C_1+C_2\cdot r^2+C_3\cdot\ln r+C_4\cdot r^2\cdot\ln r \qquad r\in\langle 0,a\rangle$$



$$w_0(r)=\frac{p\cdot r^4}{64\cdot D}$$



$$w_0(r)=\frac{p_a\cdot r^5}{225\cdot a\cdot D}$$

$$m_r=-D\cdot\left(w''+\mu\cdot\frac{w'}{r}\right)$$

$$m_\varphi=-D\cdot\left(\frac{w'}{r}+\mu\cdot w''\right)$$

$$q_r=-D\cdot\left(w'''+\frac{1}{r}\cdot w''-\frac{1}{r^2}\cdot w'\right)$$

$$D=\frac{E\cdot h^3}{12\cdot\left(1-\mu^2\right)}$$

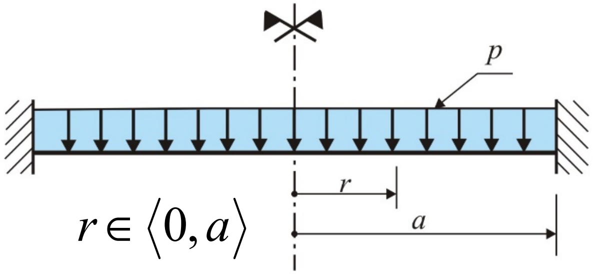
$$w'(r)=w_0'(r)+2\cdot C_2\cdot r+\frac{C_3}{r}+2\cdot C_4\cdot r\cdot\ln r+C_4\cdot r$$

$$w''(r)=w_0''(r)+2\cdot C_2-\frac{C_3}{r^2}+\left(2\cdot C_4\cdot\ln r+2\cdot C_4\right)+C_4$$

$$w'''(r)=w_0'''(r)+\frac{2\cdot C_3}{r^3}+\frac{2\cdot C_4}{r}$$

Příklad 1: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji vetknutá

$$w(r)=w_0(r)+C_1+C_2\cdot r^2+C_3\cdot\ln r+C_4\cdot r^2\cdot\ln r$$



$r\in\langle 0,a\rangle$

Řešení: $C_3=C_4=0$ $\qquad w_0(r)=\dfrac{p\cdot r^4}{64\cdot D}$

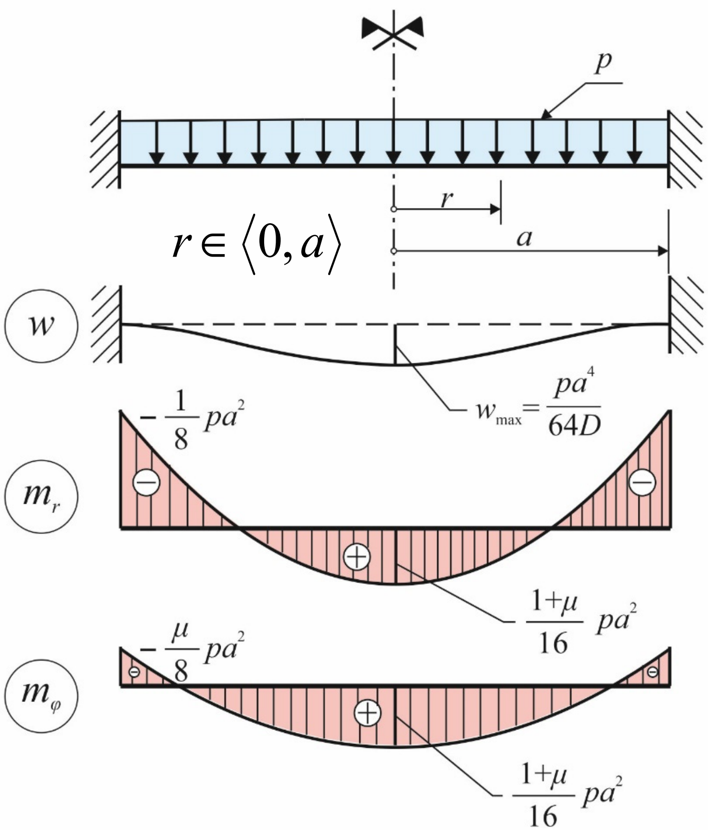
Okrajové podmínky:

$$w(r=a)=0 \qquad w(r=a)=\frac{p\cdot a^4}{64\cdot D}+C_1+C_2\cdot a^2=0 \qquad C_1=\frac{p\cdot a^4}{64\cdot D}$$

$$w'(r=a)=0 \qquad w'(r=a)=\frac{p\cdot a^3}{16\cdot D}+2\cdot C_2\cdot a=0 \qquad C_2=-\frac{p\cdot a^2}{32\cdot D}$$

$$w(r)=w_0(r)+C_1+C_2\cdot r^2=\frac{p\cdot r^4}{64\cdot D}+\frac{p\cdot a^4}{64\cdot D}-\frac{p\cdot a^2}{32\cdot D}\cdot r^2=\frac{p}{64\cdot D}\cdot\left(r^4+a^4-2\cdot a^2\cdot r^2\right)$$

Příklad 1: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji vetknutá



Funkce výsledných veličin:

$$w(r)=\frac{p}{64\cdot D}\cdot\left(a^2-r^2\right)^2$$

$$w'(r)=w_0'(r)+2\cdot C_2\cdot r$$

$$w''(r)=w_0''(r)+2\cdot C_2$$

$$w'(r)=\frac{p\cdot r^3}{16\cdot D}-2\cdot\frac{p\cdot a^2}{32\cdot D}\cdot r=\frac{p\cdot r}{16\cdot D}\cdot\left(r^2-a^2\right)$$

$$w''(r)=\frac{3\cdot p\cdot r^2}{16\cdot D}-2\cdot\frac{p\cdot a^2}{32\cdot D}=\frac{p}{32\cdot D}\cdot\left(6\cdot r^2-2\cdot a^2\right)$$

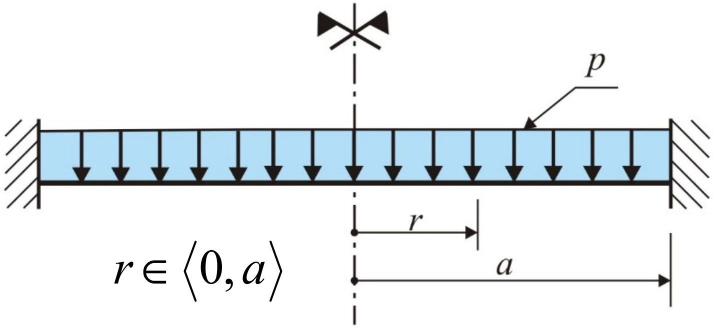
$$m_r=-D\cdot\left(w''+\mu\cdot\frac{w'}{r}\right)\qquad m_\varphi=-D\cdot\left(\frac{w'}{r}+\mu\cdot w''\right)$$

$$m_r=-D\cdot\left[\frac{p}{32\cdot D}\cdot\left(6\cdot r^2-2\cdot a^2\right)+\frac{\mu}{r}\cdot\frac{p\cdot r}{16\cdot D}\cdot\left(r^2-a^2\right)\right]$$

$$m_r=\frac{p}{16}\cdot\left[a^2\cdot(1+\mu)-r^2\cdot(3+\mu)\right]$$

$$m_\varphi=\frac{p}{16}\cdot\left[a^2\cdot(1+\mu)-r^2\cdot(1+3\cdot\mu)\right]$$

Příklad 1: kruhová deska rovnoměrně zatížená, na okraji vetknutá



$r \in \langle 0, a \rangle$

Funkce výsledných veličin:

$$q_r = -D \cdot \left(w''' + \frac{1}{r} \cdot w'' - \frac{1}{r^2} \cdot w' \right)$$

$$w'(r) = \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} - 2 \cdot \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} \cdot r = \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot \left(r^2 - a^2 \right)$$

$$w''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r^2}{16 \cdot D} - 2 \cdot \frac{p \cdot a^2}{32 \cdot D} = \frac{p}{32 \cdot D} \cdot \left(6 \cdot r^2 - 2 \cdot a^2 \right)$$

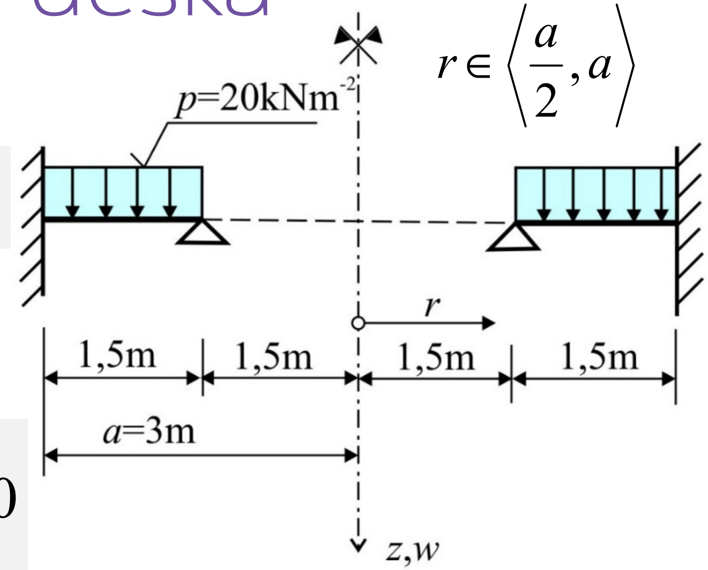
$$w'''(r) = \frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D}$$

$$q_r = -D \cdot \left[\frac{3 \cdot p \cdot r}{8 \cdot D} + \frac{1}{r} \cdot \frac{p}{32 \cdot D} \cdot \left(6 \cdot r^2 - 2 \cdot a^2 \right) - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{p \cdot r}{16 \cdot D} \cdot \left(r^2 - a^2 \right) \right]$$

$$q_r = -\frac{1}{2} \cdot p \cdot r$$

Příklad 2: mezikruhová deska

$$w(r)=w_0(r)+C_1+C_2\cdot r^2+C_3\cdot\ln r+C_4\cdot r^2\cdot\ln r$$



Okrajové podmínky:

$$w_0(r)=\frac{p\cdot r^4}{64\cdot D}$$

$$w\left(r=\frac{a}{2}\right)=0 \qquad m_r\left(r=\frac{a}{2}\right)=0$$

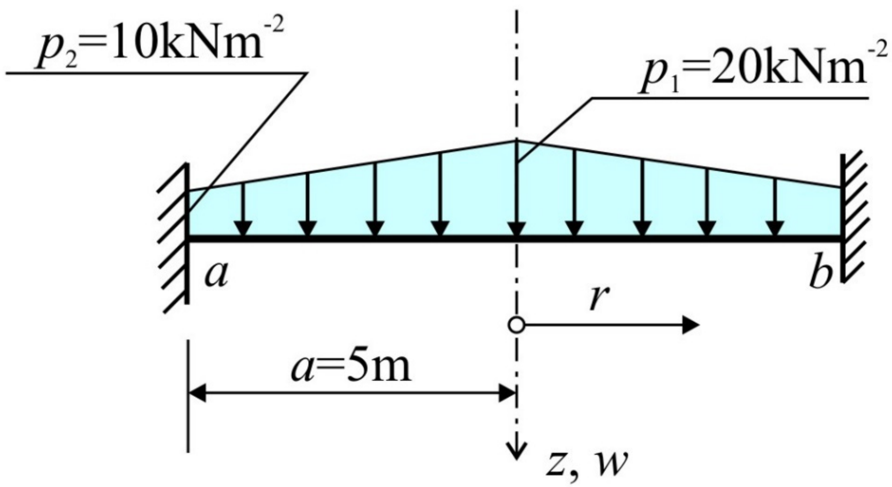
$$w(r=a)=0 \qquad w'(r=a)=0$$

$$C_1=-\frac{13{,}136}{D}[\mathrm{m}] \qquad C_2=\frac{12{,}487}{D}\left[\mathrm{m}^{-1}\right] \qquad C_3=-\frac{16{,}605}{D}[\mathrm{m}] \qquad C_4=-\frac{10{,}753}{D}\left[\mathrm{m}^{-1}\right]$$

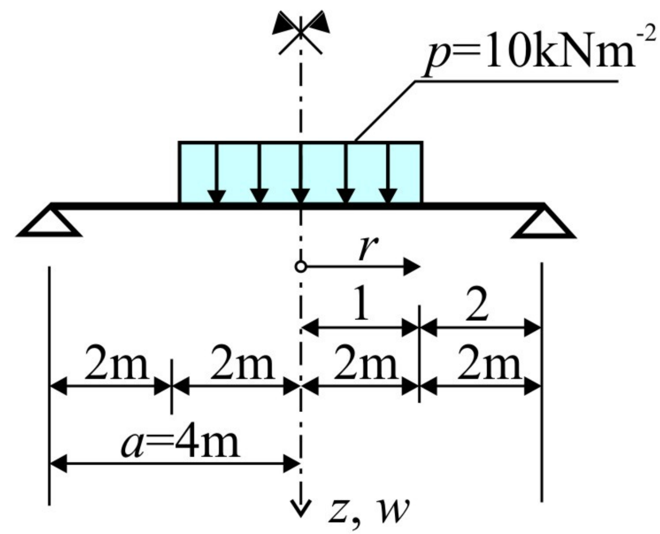
$$m_r=-D\cdot\left[\frac{3\cdot p\cdot r^2}{16\cdot D}+2\cdot C_2-\frac{C_3}{r^2}+C_4\cdot(2\cdot\ln r+3)+\frac{\mu}{r}\cdot\left(\frac{p\cdot r^3}{16\cdot D}+2\cdot r\cdot C_2+\frac{C_3}{r}+C_4\cdot r\cdot(2\cdot\ln r+1)\right)\right]$$

$$m_\varphi=-D\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{p\cdot r^3}{16\cdot D}+2\cdot r\cdot C_2+\frac{C_3}{r^2}+C_4\cdot r\cdot(2\cdot\ln r+1)\right)+\mu\cdot\left(\frac{3\cdot p\cdot r^2}{16\cdot D}+2\cdot C_2-\frac{C_3}{r^2}+C_4\cdot(2\cdot\ln r+3)\right)\right]$$

Zadání dalších příkladů k procvičení

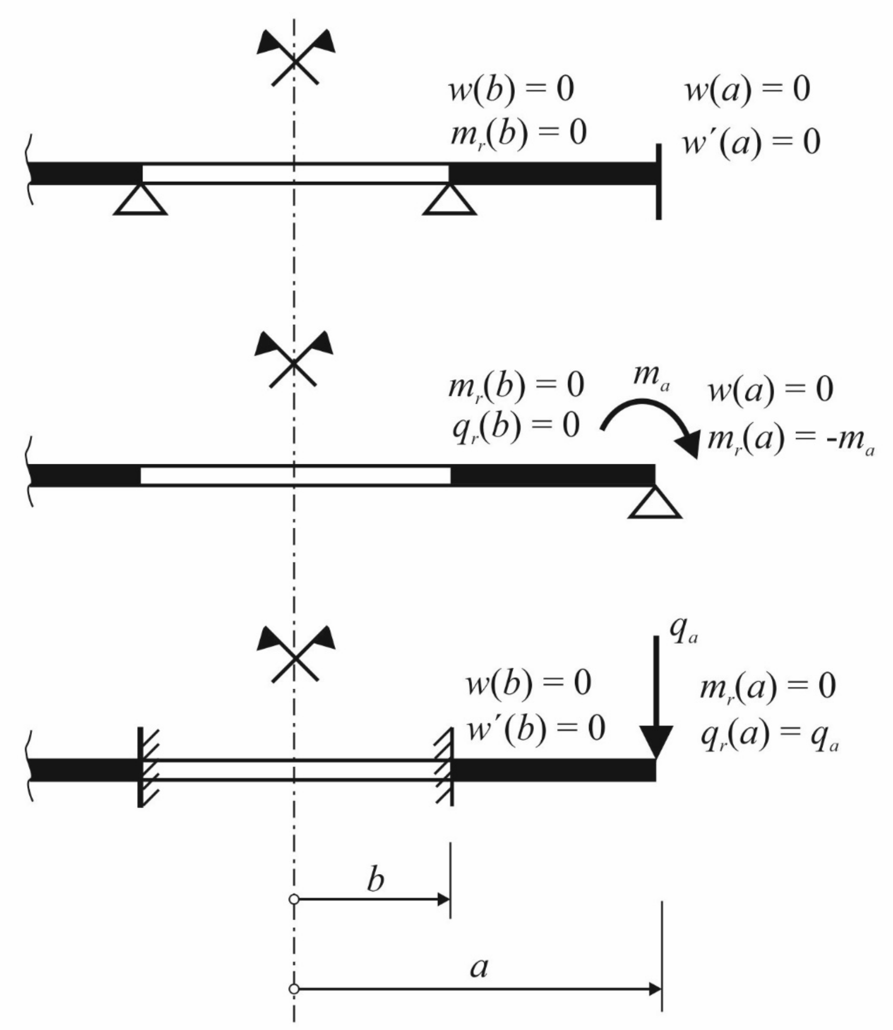


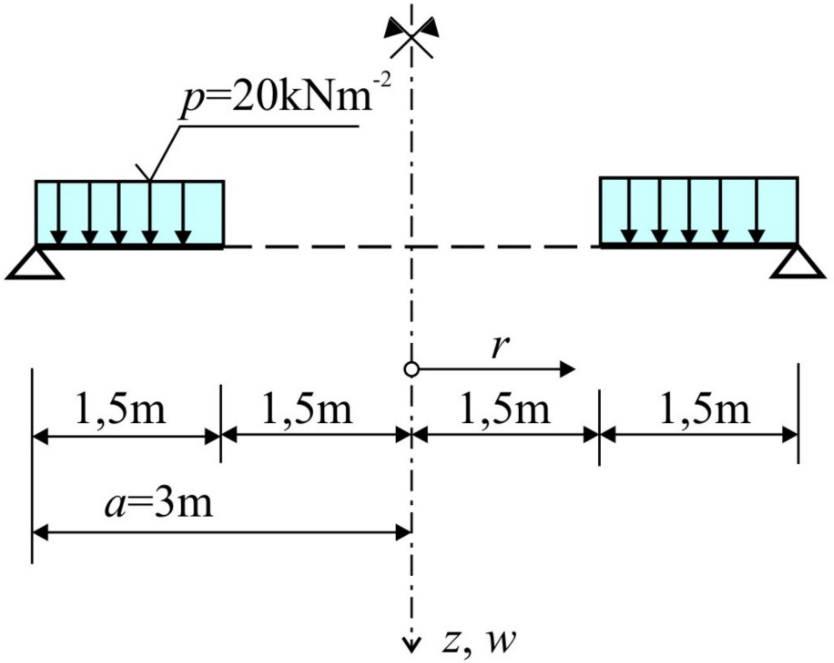
Zadání příkladu I.



Zadání příkladu II.

Zadání dalších příkladů k procvičení

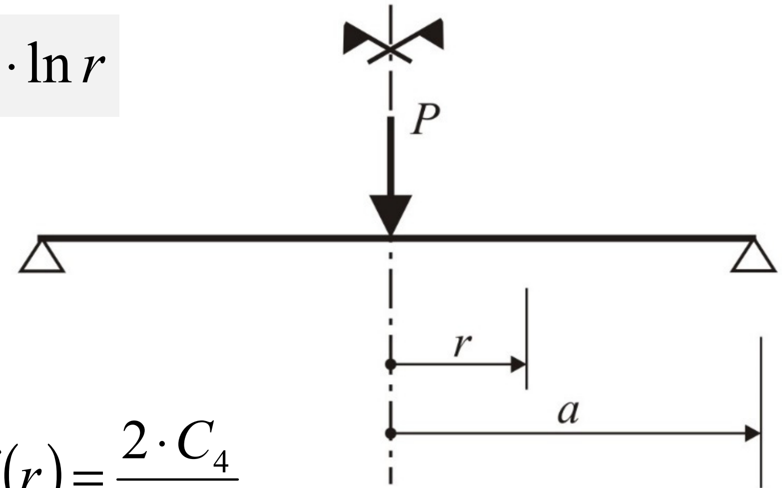




Zadání příkladu III.

Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

$$w(r)=w_0(r)+C_1+C_2\cdot r^2+C_3\cdot\ln r+C_4\cdot r^2\cdot\ln r$$



Řešení: $w_0(r)=0$ $C_3=0$

$$w(r)=C_1+C_2\cdot r^2+C_4\cdot r^2\cdot\ln r$$

$$w'(r)=2\cdot C_2\cdot r+2\cdot C_4\cdot r\cdot\ln r+C_4\cdot r$$

$$w''(r)=2\cdot C_2+2\cdot C_4\cdot\ln r+3\cdot C_4$$

$$w'''(r)=\frac{2\cdot C_4}{r}$$

$$q_r=-D\cdot\left(w'''+\frac{1}{r}\cdot w''-\frac{1}{r^2}\cdot w'\right)$$

$$q_r=-D\cdot\left[2\cdot C_4\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\cdot(2\cdot C_2+2\cdot C_4\cdot\ln r+3\cdot C_4)-\frac{1}{r^2}\cdot(2\cdot C_2\cdot r+2\cdot C_4\cdot r\cdot\ln r+C_4\cdot r)\right]$$

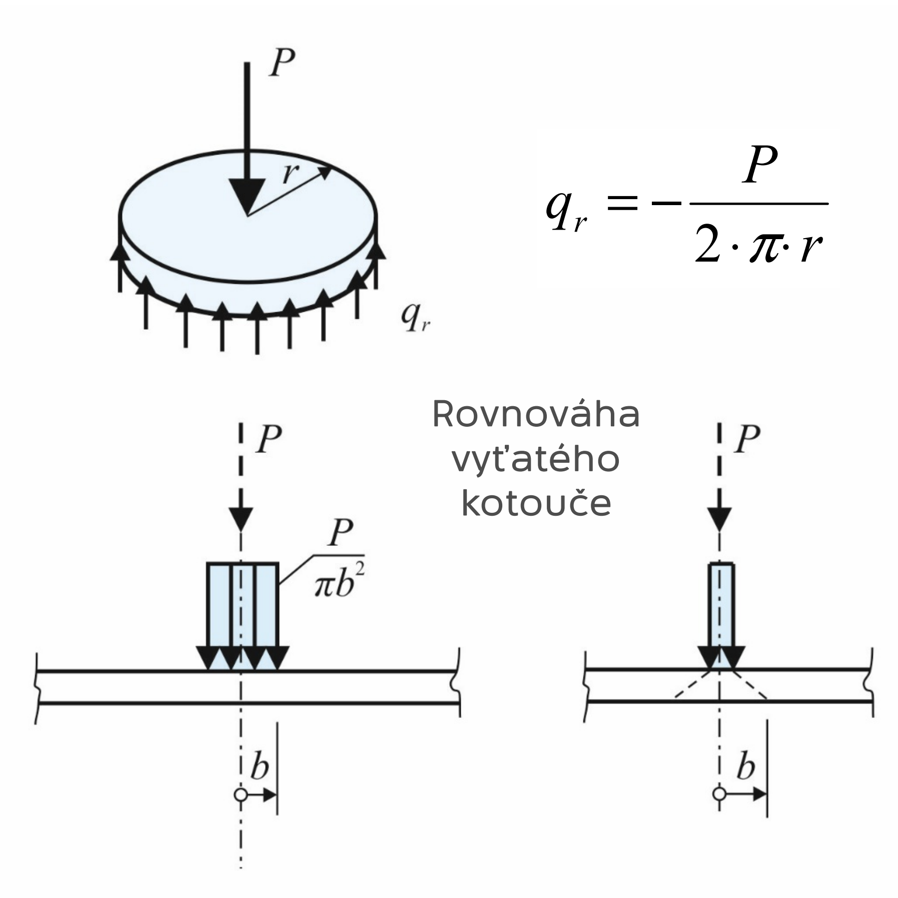
$$q_r=-4\cdot D\cdot\frac{C_4}{r}=-\frac{P}{2\cdot\pi\cdot r}\Rightarrow C_4=\frac{P}{8\cdot\pi\cdot D}$$

Rovnováha vyťatého kotouče

$$w(r)=C_1+C_2\cdot r^2+\frac{P}{8\cdot\pi\cdot D}\cdot r^2\cdot\ln r$$

Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

Rovnováha na vyťatém kotouči:



$$q_r = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Platí za předpokladu rovnoměrného rozložení síly na ploše (vyťatém kotouči) o poloměru b

Poznámka: posouvající síla q_r má ve skutečnosti záporné znaménko.

Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

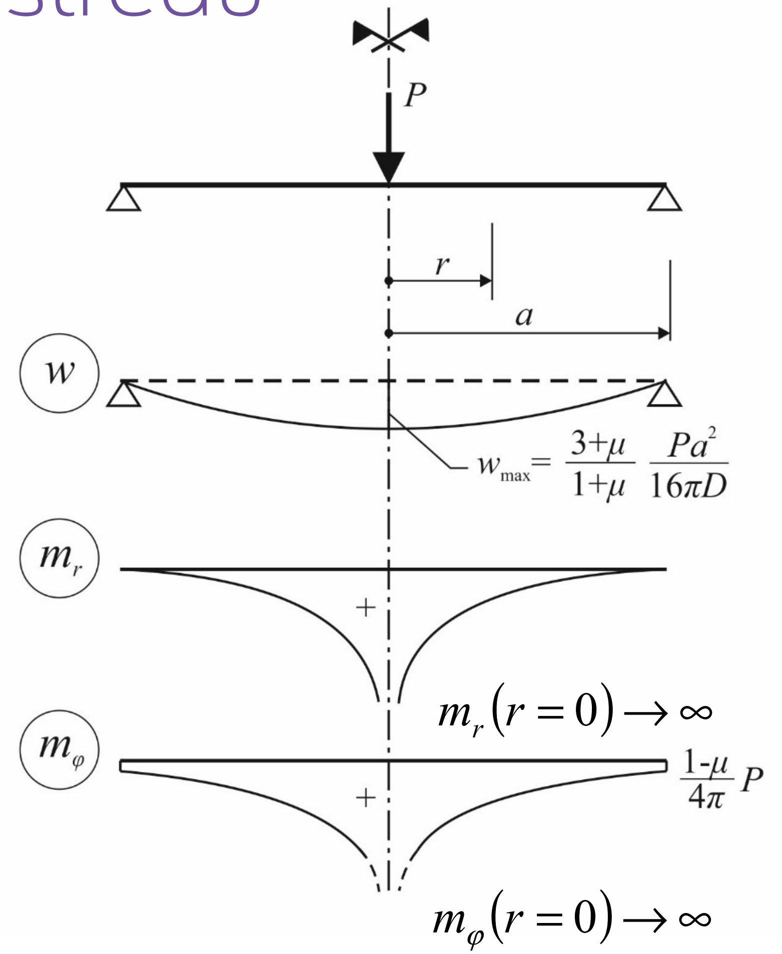
$$w(r) = C_1 + C_2 \cdot r^2 + \frac{P}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot \ln r$$

Okrajové podmínky:

$$w(r = a) = 0 \qquad m_r(r = a) = 0$$

$$C_1 = \frac{P \cdot a^2}{16 \cdot \pi \cdot D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu}$$

$$C_2 = -\frac{P}{16 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left(2 \cdot \ln a + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right)$$

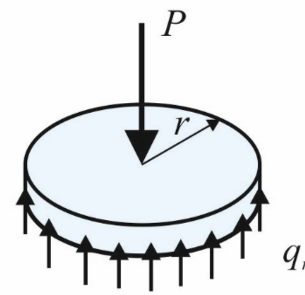


$$w(r) = \frac{P}{16 \cdot \pi \cdot D} \cdot \left[\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot \left(a^2 - r^2\right) + 2 \cdot r^2 \cdot \ln \frac{r}{a} \right]$$

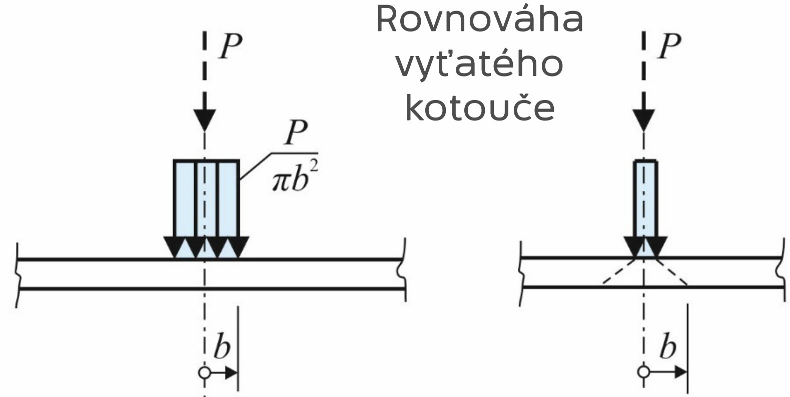
$$m_r = -\frac{P}{4 \cdot \pi} \cdot (1 + \mu) \cdot \ln \frac{r}{a} \qquad m_\varphi = \frac{P}{4 \cdot \pi} \cdot \left[(1 - \mu) - (1 + \mu) \cdot \ln \frac{r}{a} \right] \qquad q_r = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Příklad 3: kruhová deska zatížená břemenem ve svém středu

Reálné průběhy ohybových momentů v okolí středu kruhové desky:

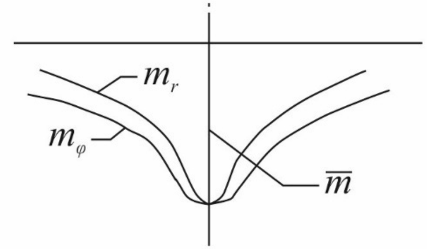


$$q_r = -\frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$



Při rovnoměrném rozložení síly na ploše (vyťatém kotouči) o poloměru b platí přibližně:

$$m_r(0) = m_\varphi(0) \approx \overline{m} = \frac{P}{4 \cdot \pi} \cdot \left[1 - (1 + \mu) \cdot \ln \frac{b}{a}\right]$$



Reálné průběhy ohybových momentů v okolí středu kruhové desky