VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

5

Řešení pravoúhlých nosných desek metodou sítí

Desková rovnice
pro pravoúhlé nosné desky

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

resp.

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}$$

Zatížení plošné

$$p\,[\mathrm{N/m^2}]$$

Desková tuhost

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$$

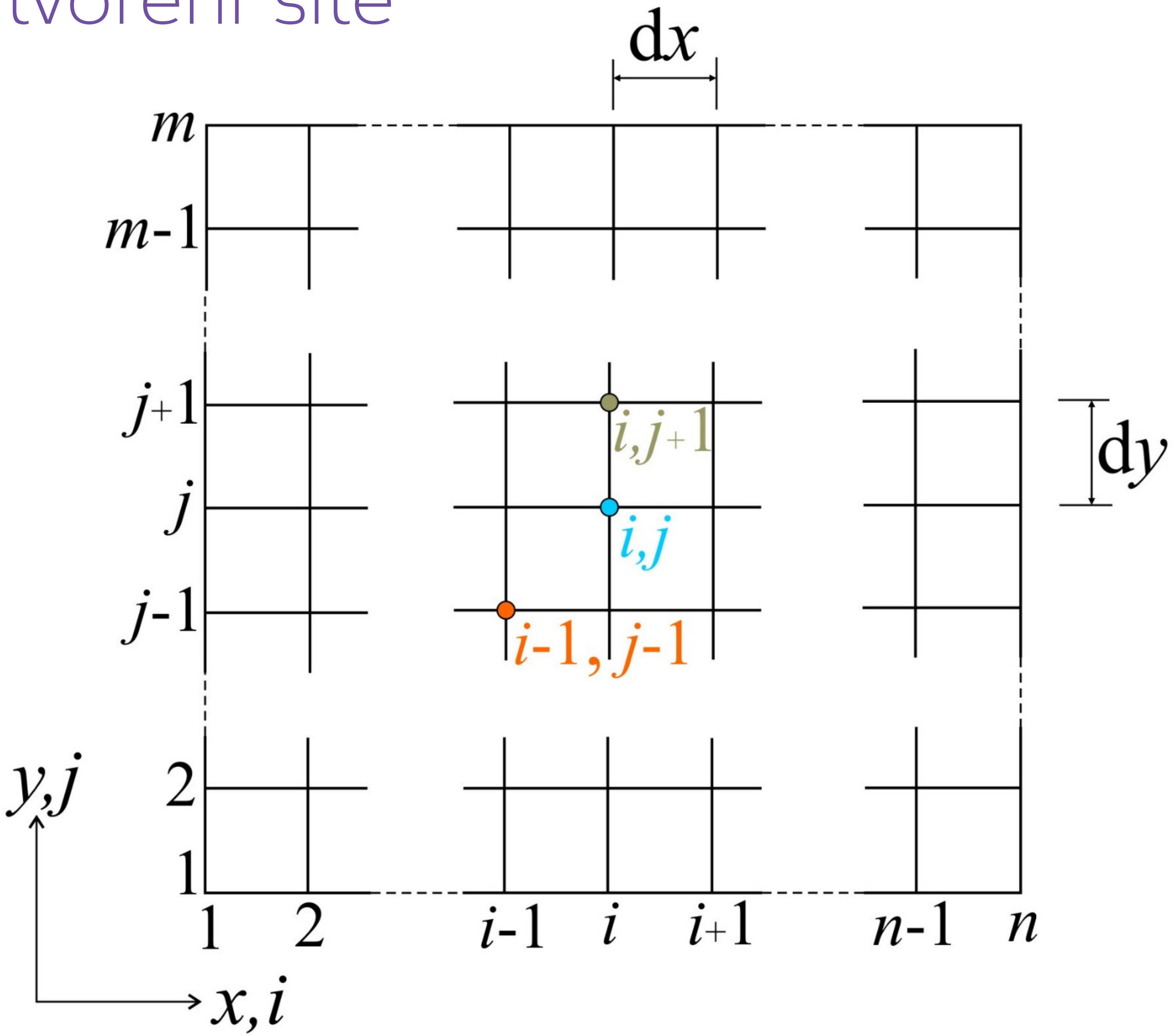
Desková rovnice:

- parciální diferenciální rovnice 4. řádu,
- lineární,
- nehomogenní (má pravou stranu),
- eliptického typu.

Pro $p = \mathbf{0}$ jde o *biharmonickou* rovnici.

Každá biharmonická funkce odpovídá průhybové ploše desky zatížené jen na okrajích.

Řešení nosných desek metodou sítí, vytvoření sítě



Řešení nosných desek metodou sítí, diferenční vztahy

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial x}=\frac{w_{i+1,j}-w_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y}=\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}=\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}=\frac{w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}\right)=\frac{\dfrac{\partial^2 w_{i+1,j}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w_{i-1,j}}{\partial x^2}}{2\Delta x}=\frac{w_{i+2,j}-2w_{i+1,j}+2w_{i-1,j}-w_{i-2,j}}{2\Delta x^3}$$

$$\frac{\partial^4 w_{i,j}}{\partial x^4}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}\right)=\frac{\dfrac{\partial^2 w_{i+1,j}}{\partial x^2}-\dfrac{2\partial^2 w_{i,j}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w_{i-1,j}}{\partial x^2}}{\Delta x^2}=$$

$$=\frac{w_{i+2,j}-4w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j}+w_{i-2,j}}{\Delta x^4}$$

Řešení nosných desek metodou sítí, diferenční vztahy

$$\frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}\right)=\frac{\dfrac{\partial^2 w_{i,j+1}}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 w_{i,j-1}}{\partial y^2}}{2\Delta y}=\frac{w_{i,j+2}-2w_{i,j+1}+2w_{i,j-1}-w_{i,j-2}}{2\Delta y^3}$$

$$\frac{\partial^4 w_{i,j}}{\partial y^4}=\frac{w_{i,j+2}-4w_{i,j+1}+6w_{i,j}-4w_{i,j-1}+w_{i,j-2}}{\Delta y^4}$$

$$\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_{i,j}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)=\frac{w_{i+1,j+1}+w_{i-1,j-1}-w_{i+1,j-1}-w_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y}$$

$$\frac{\partial^4 w_{i,j}}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{w_{i+1,j+1}-2w_{i+1,j}+w_{i+1,j-1}-2\left(w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}\right)+w_{i-1,j+1}-2w_{i-1,j}+w_{i-1,j-1}}{\Delta x^2\Delta y^2}$$

Řešení nosných desek metodou sítí, desková rovnice po dosazení diferenčních vztahů

Desková rovnice: $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Desková rovnice po dosazení diferenčních vztahů:

$$\begin{aligned}
& w_{i,j}\left(8+6\alpha^2+6\beta^2\right)- \\
& 4\cdot\left(w_{i+1,j}\left(1+\beta^2\right)+w_{i-1,j}\left(1+\beta^2\right)+w_{i,j+1}\left(1+\alpha^2\right)+w_{i,j-1}\left(1+\alpha^2\right)\right)+ \\
& 2\cdot\left(w_{i+1,j+1}+w_{i+1,j-1}+w_{i-1,j+1}+w_{i-1,j-1}\right)+ \\
& \alpha^2\left(w_{i,j+2}+w_{i,j-2}\right)+\beta^2\left(w_{i+2,j}+w_{i-2,j}\right)=\frac{p_{i,j}\cdot\Delta x^2\cdot\Delta y^2}{D}
\end{aligned}$$

kde:

$$\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2$$

$$\beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

pro $\Delta x = \Delta y$ platí :

$$20\cdot w_{i,j} - 8\cdot\left(w_{i+1,j}+w_{i\text{-}1,j}+w_{i,j+1}+w_{i,j\text{-}1}\right)+$$

$$2\cdot\left(w_{i+1,j+1}+w_{i\text{-}1,j\text{-}1}+w_{i\text{-}1,j+1}+w_{i\text{-}1,j\text{-}1}\right)+w_{i+2,j}+w_{i\text{-}2,j}+w_{i,j+2}+w_{i,j\text{-}2}=\frac{p_{i,j}\cdot\Delta x^2\cdot\Delta y^2}{D}$$

Řešení desek metodou sítí, diferenční vztahy

Pro $\Delta x \neq \Delta y$ platí :

$$\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \qquad \beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0	0	α^2	0	0
j+1	0	2	$4(-1-\alpha^2)$	2	0
j	β^2	$4(-1-\beta^2)$	$8+6\alpha^2+6\beta^2$	$4(-1-\beta^2)$	β^2
j-1	0	2	$4(-1-\alpha^2)$	2	0
j-2	0	0	α^2	0	0

Řešení desek metodou sítí, diferenční vztahy

Pro $\Delta x = \Delta y$ platí : $\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 1$ $\beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1$

	i-2	i-1	i	i+1	i+2
j+2	0	0	1	0	0
j+1	0	2	-8	2	0
j	1	-8	20	-8	1
j-1	0	2	-8	2	0
j-2	0	0	1	0	0

Výpočet složek měrných vnitřních sil

Složky merných vnitřních sil lze stanovit s pomocí diferenčních vztahů, jakmile jsou známy hodnoty průhybu $w_{i,j}$ v bodech sítě i, j:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \Rightarrow m_x = -D\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right]$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \Rightarrow m_y = -D\left[\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \mu \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right]$$

$$m_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Rightarrow m_{xy} = -D(1-\mu)\left[\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}\right]$$

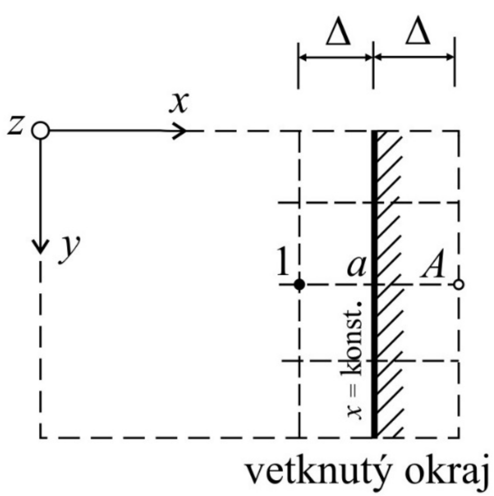
$$q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right) \Rightarrow$$

$$q_x = -D\left[\left(\frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2\Delta x^3}\right) + \left(\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta y^2 \Delta x}\right)\right]$$

$$q_y = -D\left[\left(\frac{w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}}{2\Delta y^3}\right) + \left(\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y}\right)\right]$$

Okrajové podmínky

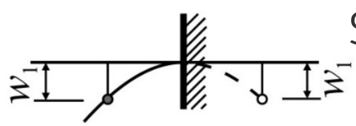
Vetknutý okraj nosné desky:



Na vetknutém okraji rovnoběžném s osou y platí:

$$w_{i,j} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} = 0 \Rightarrow w_{i+1,j} = w_{i-1,j} \Rightarrow w_A = w_1$$



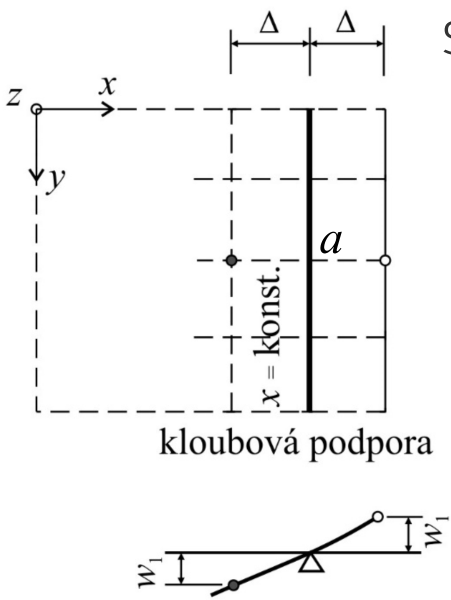
Na vetknutém okraji rovnoběžném s osou x platí:

$$w_{i,j} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y} = 0 \Rightarrow w_{i,j+1} = w_{i,j-1}$$

Okrajové podmínky

Prostě podepřený okraj nosné desky:



Na prostě podepřeném okraji rovnoběžném s osou y platí:

$$w_{i,j} = w_a = 0$$

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad w(x = \text{konst.}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{2\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_{i+1,j} = -w_{i-1,j}$$

Na prostě podepřeném okraji rovnoběžném s osou x platí:

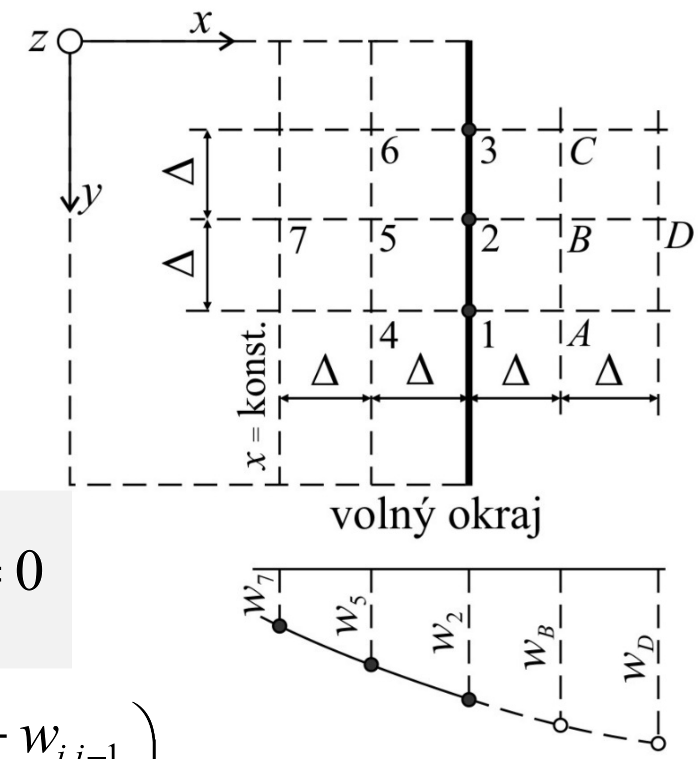
$$w_{i,j} = 0$$

$$w_{i,j+1} = -w_{i,j\text{-}1}$$

Okrajové podmínky

Volný okraj nosné desky:

Na volném okraji rovnoběžném s osou y platí:



$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$m_x = -D\left(\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)$$

Pro $\Delta x = \Delta y$:

$$w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + \mu\left(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}\right) = 0$$

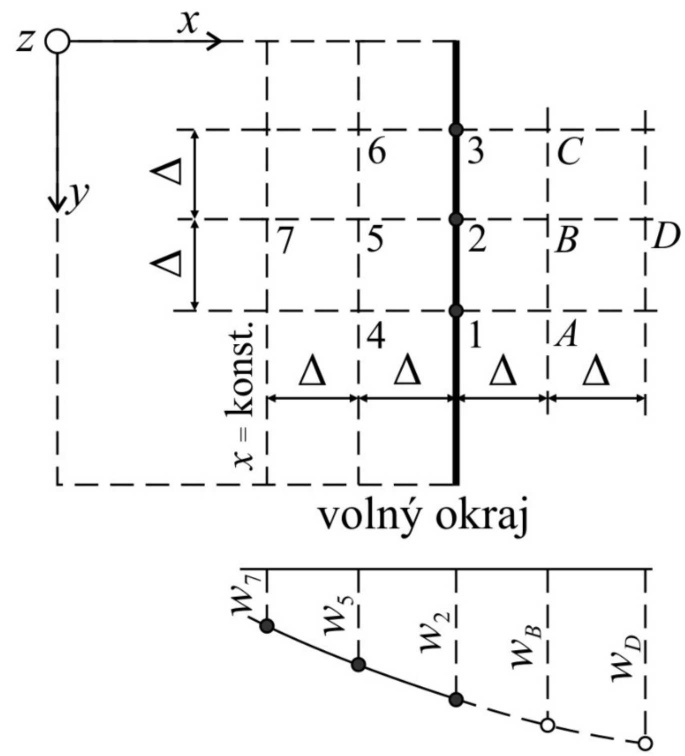
Pro bod 2 na obr.:

$$w_B - 2w_2 + w_5 + \mu\left(w_1 - 2w_2 + w_3\right) = 0$$

Okrajové podmínky

Volný okraj nosné desky:

Na volném okraji rovnoběžném s osou y platí:



$$\bar{q}_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Pro $\Delta x = \Delta y$:

$$w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j} +$$
$$+ (2-\mu)\left(w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}\right) = 0$$

Pro bod 2 na obr.:

$$w_D - 2w_B + w_5 - w_7 + (2-\mu)\left(w_A - 2w_B + w_C - w_4 + 2w_5 - w_6\right) = 0$$

Postup výpočty desky metodou sítí

1. Nakreslit výpočetní model nosné desky.
2. Označit uzly desky jako průsečíky zvolených přímek tvořících síť.
3. Určit hodnoty w pomocí okrajových podmínek i mimo obrys desky.
4. Sestavit soustavu lineárních rovnic pro výpočet hodnot průhybu w v jednotlivých bodech sítě.
5. Vyřešit soustavu lineárních rovnic. Jejich počet odpovídá počtu uzlů sítě. Výsledkem jsou hodnoty průhybu w v uzlech sítě.

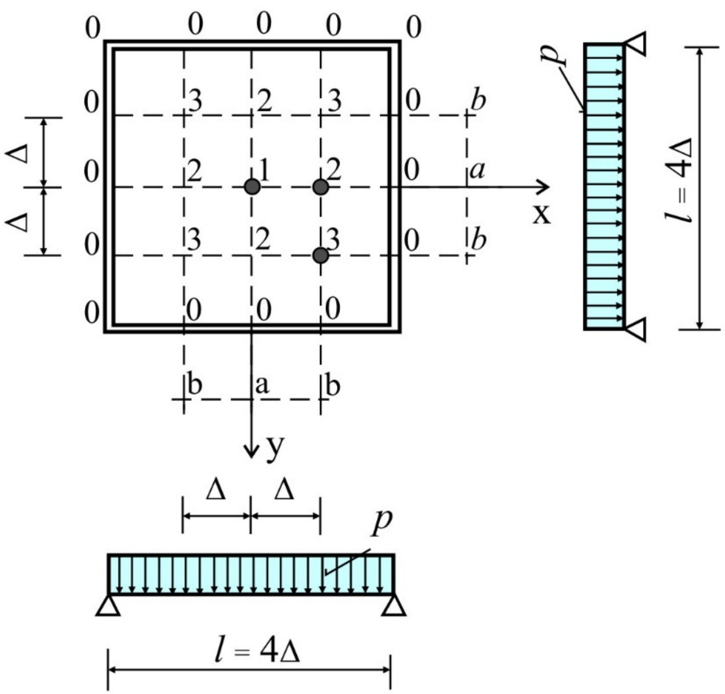
Postup výpočty stěny metodou sítí

6. Hodnoty průhybu w v jednotlivých bodech sítě jsou podkladem pro výpočet složek měrných vnitřních sil.
7. Kontrola vypočtených hodnot složek měrných vnitřních sil, zejména na okrajích desky.
8. Určit hodnoty maximálních ohybových momentů i jejich směry a maximální kroutící momenty
9. Podle potřeby stanovit příslušné hodnoty napětí.

Příklad výpočtu nosné desky metodou sítí

Prostě podepřená čtvercová deska přenáší rovnoměrné zatížení p podle obr. Vypočtěte přibližný tvar ohybové plochy a průběhy ohybových momentů v řezu y=0.

Řešení: Při uplatnění středové symetrie se neznámé úlohy zredukují na w_1, w_2 a w_3. Dále platí: w_a=-w_2, w_b=-w_3.



Soustava rovnic má tvar:

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = \frac{pl^4}{256 \cdot D}$$

$$20w_2 - 8(2w_3 + w_1 + 0) + 2(2w_2 + 2 \cdot 0) = \frac{pl^4}{256 \cdot D}$$

$$20w_3 - 8(2w_2 + 2 \cdot 0) + 2(w_1 + 3 \cdot 0) = \frac{1}{256} \frac{p}{D} l^4$$

Příklad výpočtu nosné desky metodou sítí, pokračování

Rovnice

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = \frac{pl^4}{256 \cdot D}$$

$$20w_2 - 8(2w_3 + w_1 + 0) + 2(2w_2 + 2 \cdot 0) = \frac{pl^4}{256 \cdot D}$$

$$20w_3 - 8(2w_2 + 2 \cdot 0) + 2(w_1 + 3 \cdot 0) = \frac{1}{256}\frac{p}{D}l^4$$

lze upravit:

$$20w_1 - 32w_2 + 8w_3 = \frac{1}{256}\frac{p}{D}l^4$$

$$-8w_1 + 24w_2 - 16w_3 = \frac{1}{256}\frac{p}{D}l^4$$

$$2w_1 + 16w_2 + 20w_3 = \frac{1}{256}\frac{p}{D}l^4$$

Kořeny soustavy:

$$w_1 = 0{,}00403125\frac{p}{D}l^4$$

$$w_2 = 0{,}00293125\frac{p}{D}l^4$$

$$w_3 = 0{,}0021375\frac{p}{D}l^4$$

Příklad výpočtu desky metodou sítí, pokračování

Ohybové momenty v ose x v řezu $y=0$, tj. v bodech 1 a 2:

$$m_{x,1} = -D\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right] =$$

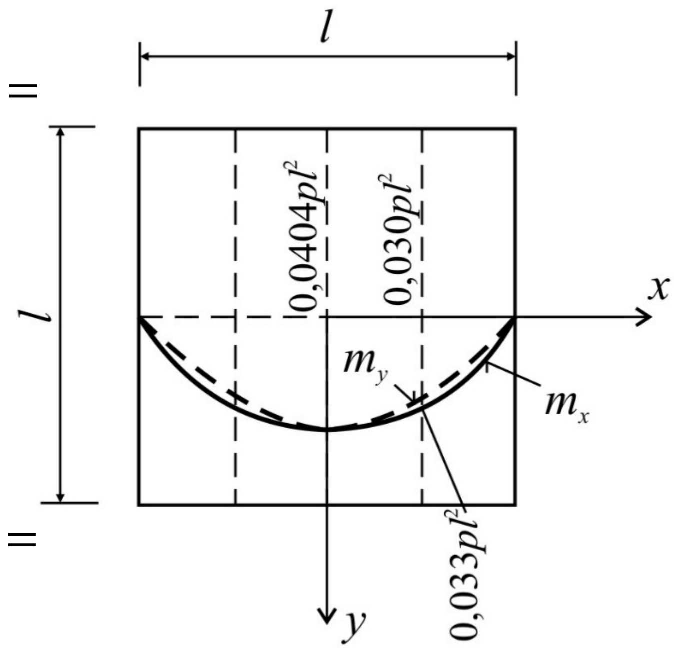
$$-D\left[(w_2 - 2w_1 + w_2) + \mu(w_2 - 2w_1 + w_2)\right]\frac{16}{l^2} =$$

$$-D(1+\mu)2(w_2 - w_1)\frac{16}{l^2} = 0{,}04048\,pl^2$$

$$m_{x,2} = -D\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right] =$$

$$-D\left[(w_3 - 2w_2 + w_3) + \mu(w_3 - 2w_2 + w_3)\right]\frac{16}{l^2} =$$

$$-D(1+\mu)2(w_3 - w_2)\frac{16}{l^2} = 0{,}03311\,pl^2$$



Platí: $m_{y,1} = m_{x,1} = 0{,}04048\,pl^2$ $\quad m_{y,2} = 0{,}029795\,pl^2$ $\quad m_{xy,1} = m_{xy,2} = 0$