VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební

Pružnost a plasticita II

3. ročník bakalářského studia

prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
Katedra stavební mechaniky

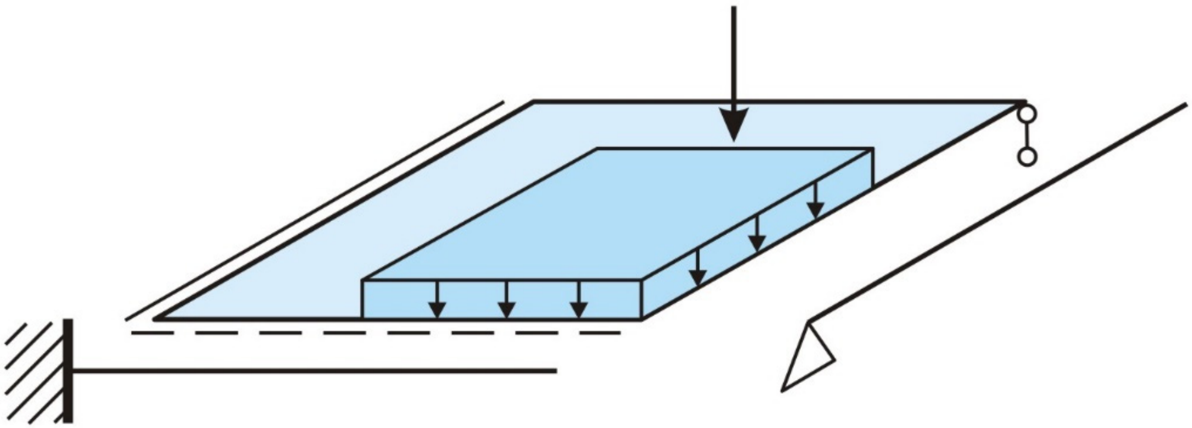
4

Plošné konstrukce, nosné desky

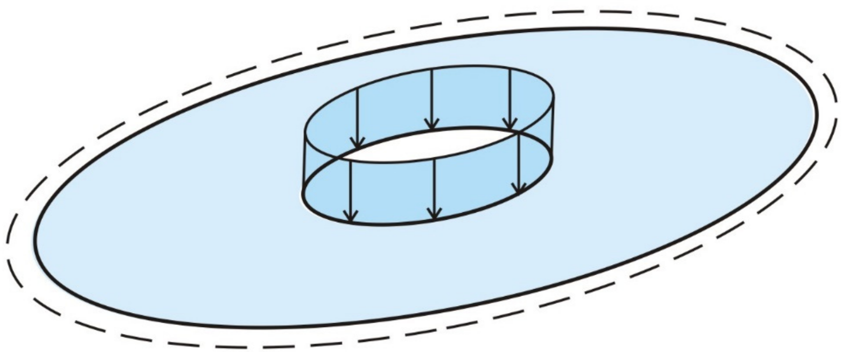
Nosné desky

- Idealizují se jako rovinný obrazec (nejčastěji ve vodorovné rovině), mohou mít otvory.
- Zatížení působí pouze kolmo ke střednicové rovině a může být vyvoláno:
  - idealizovanými bodovými silami (momenty),
  - idealizovanými liniovými silami (momenty),
  - idealizovanými plošnými silami,
  - vlastní tíhou,
  - změnou teploty.
- Vazby působí kolmo ke střednicové rovině a mohou být:
  - bodové (brání posunům),
  - liniové (brání posunům a pootočením),
  - plošné.

Nosné desky, příklady

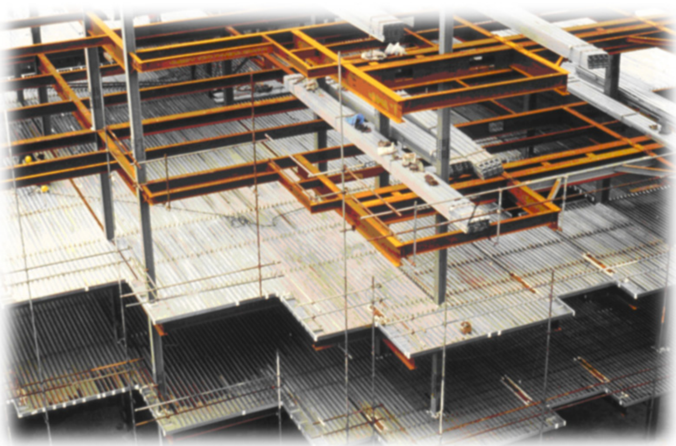


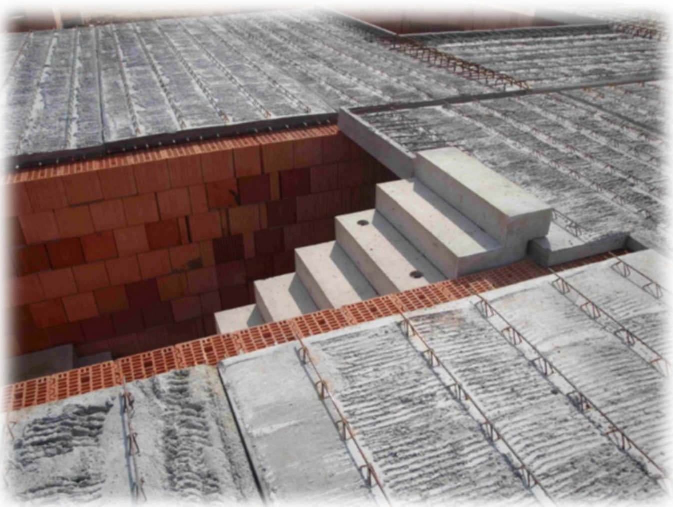
Pravoúhlá nosná deska



Rotačně symetrická nosná deska

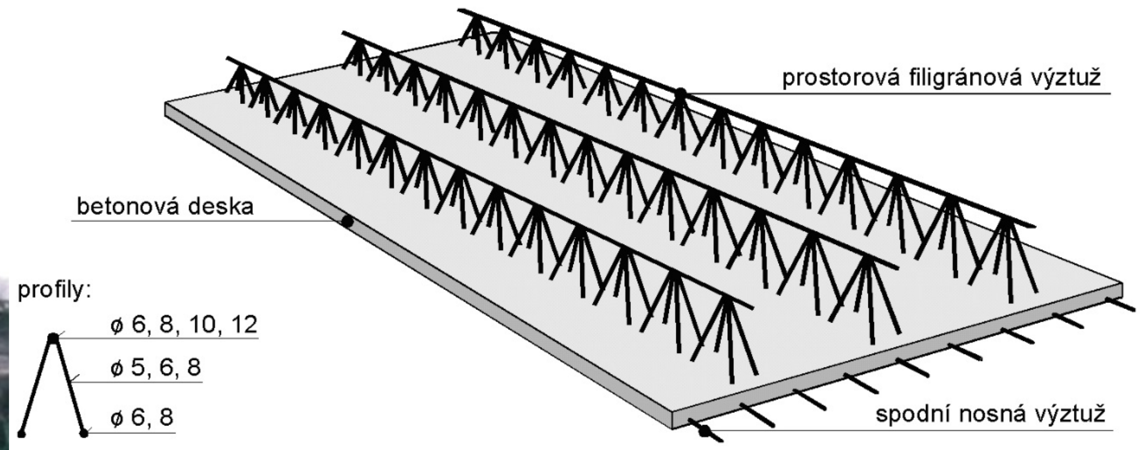
Nosné desky, příklady

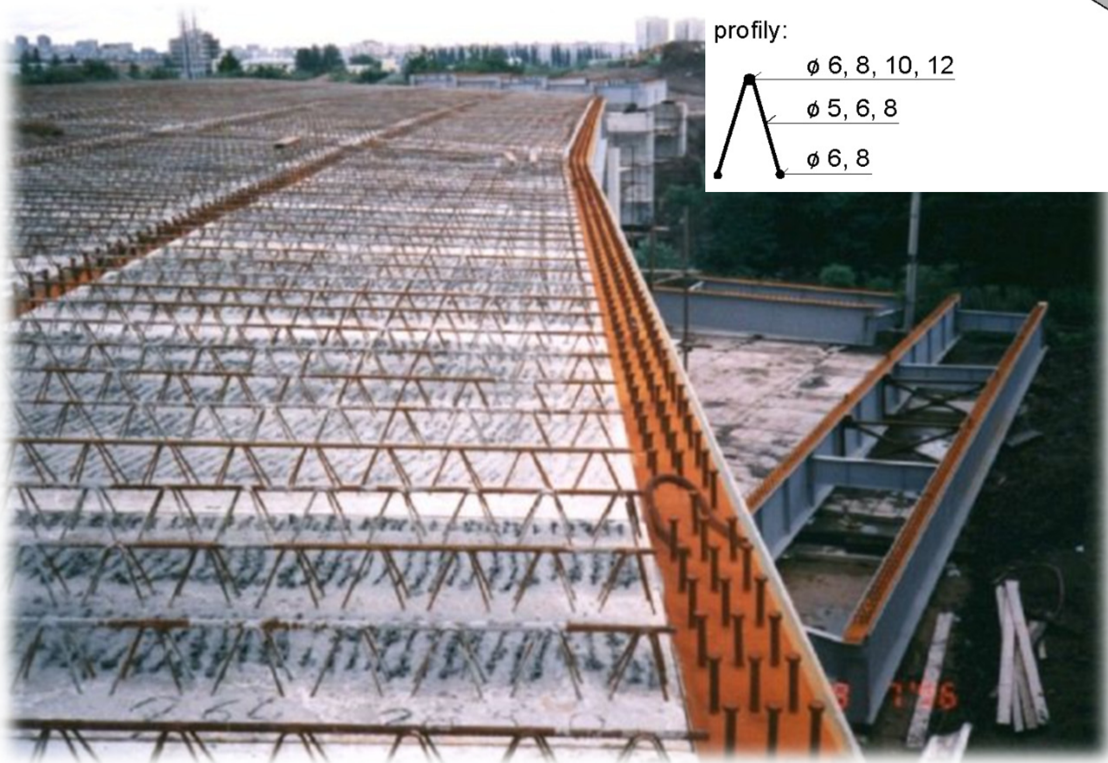


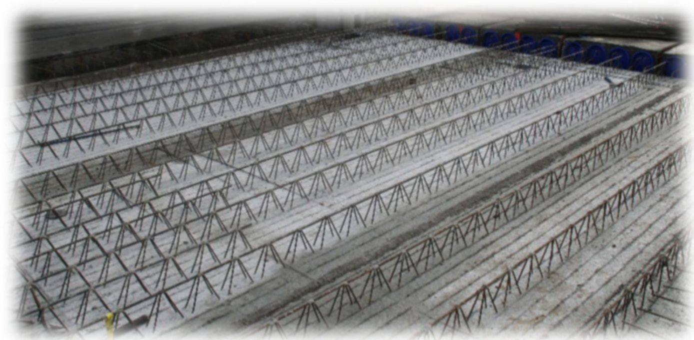


Ukázky stropních desek

Nosné desky, příklady





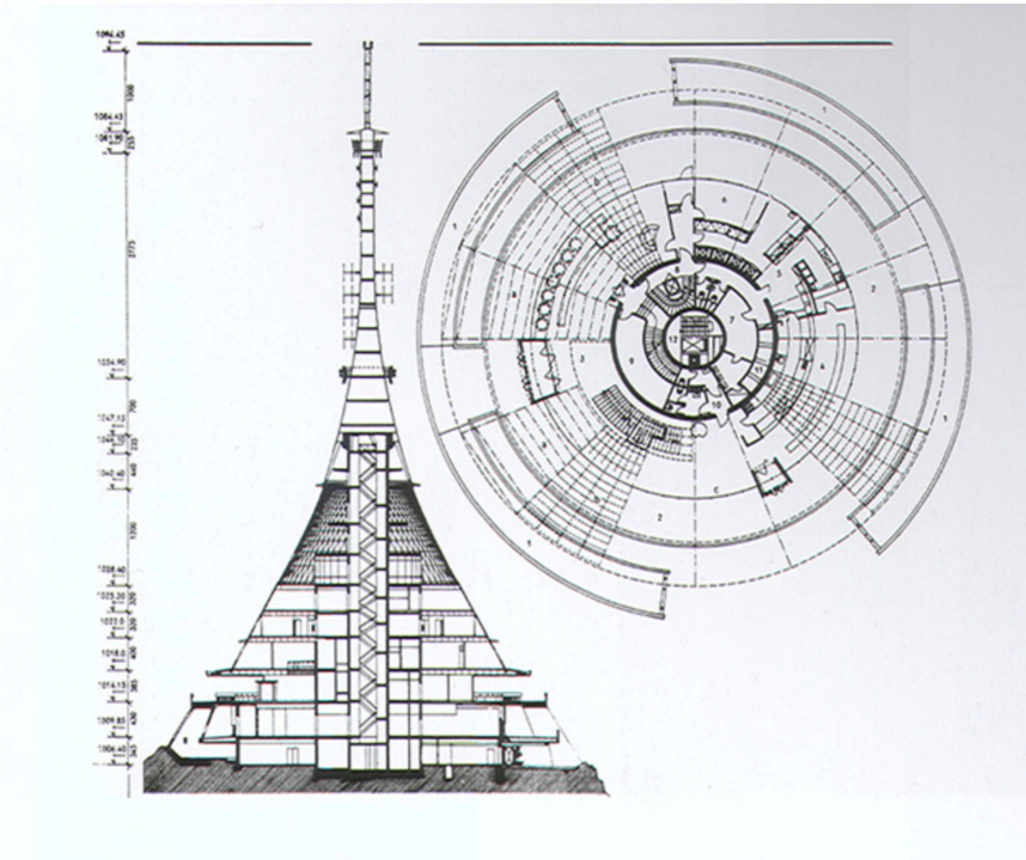


Filigránové železobetonové desky

Nosné desky, příklady

Příklady rotačně symetrických deskových konstrukcí

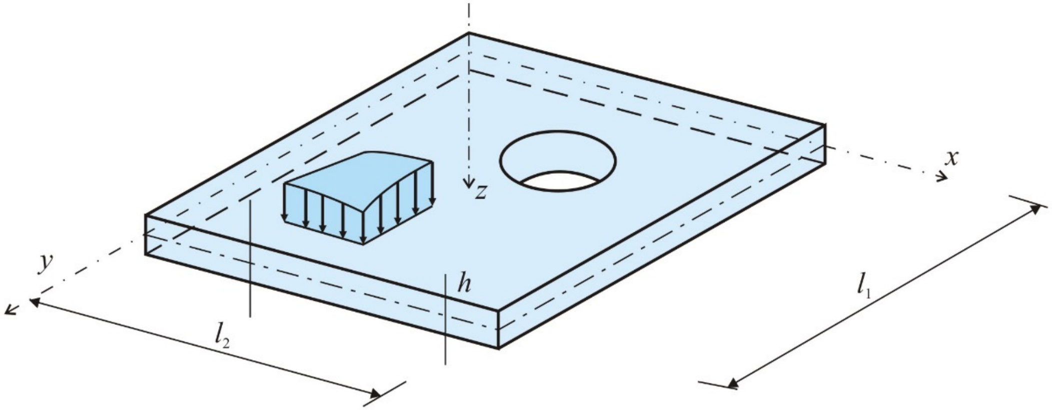
Nosné desky, příklady

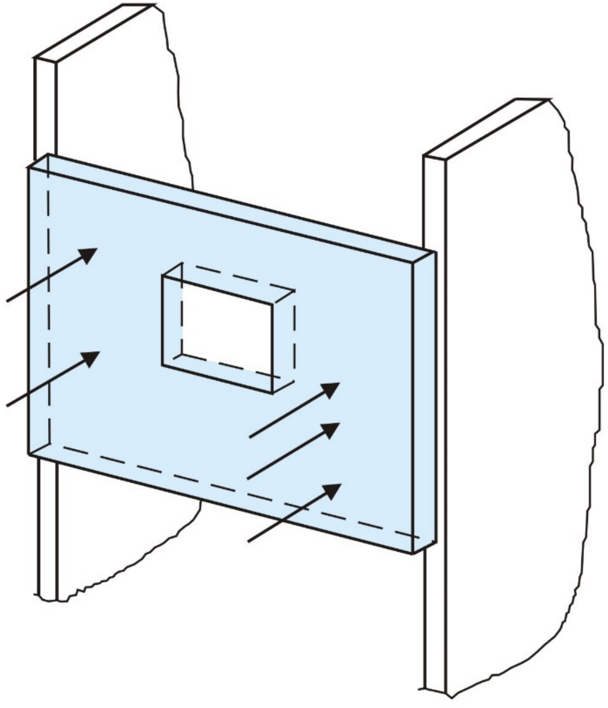


Konstrukce vysílače na Ještědu

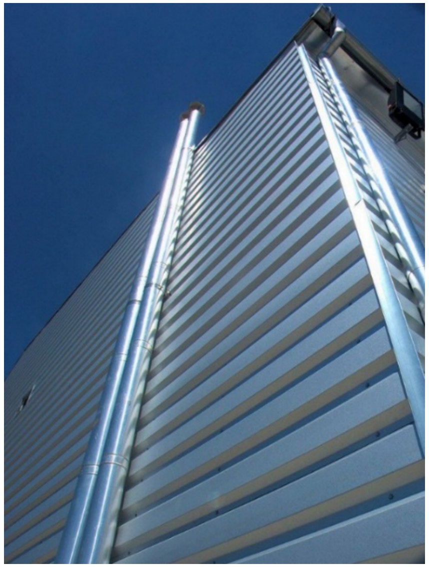
Příklady rotačně symetrických deskových konstrukcí

Nosné desky, příklady



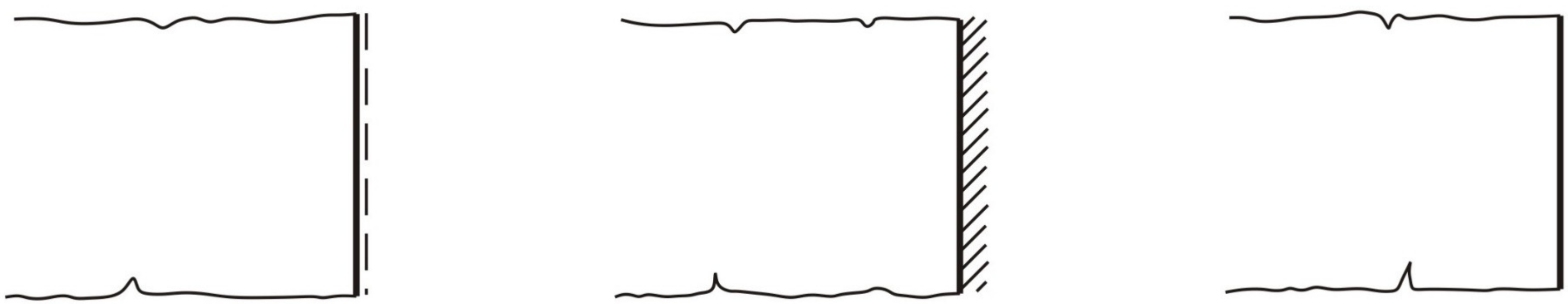


vítr

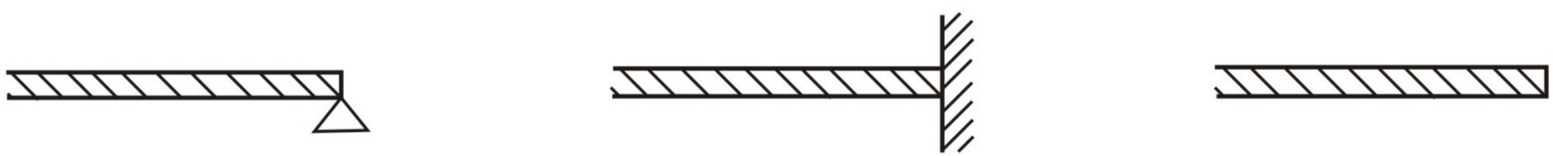


Příklady podepření nosných desek

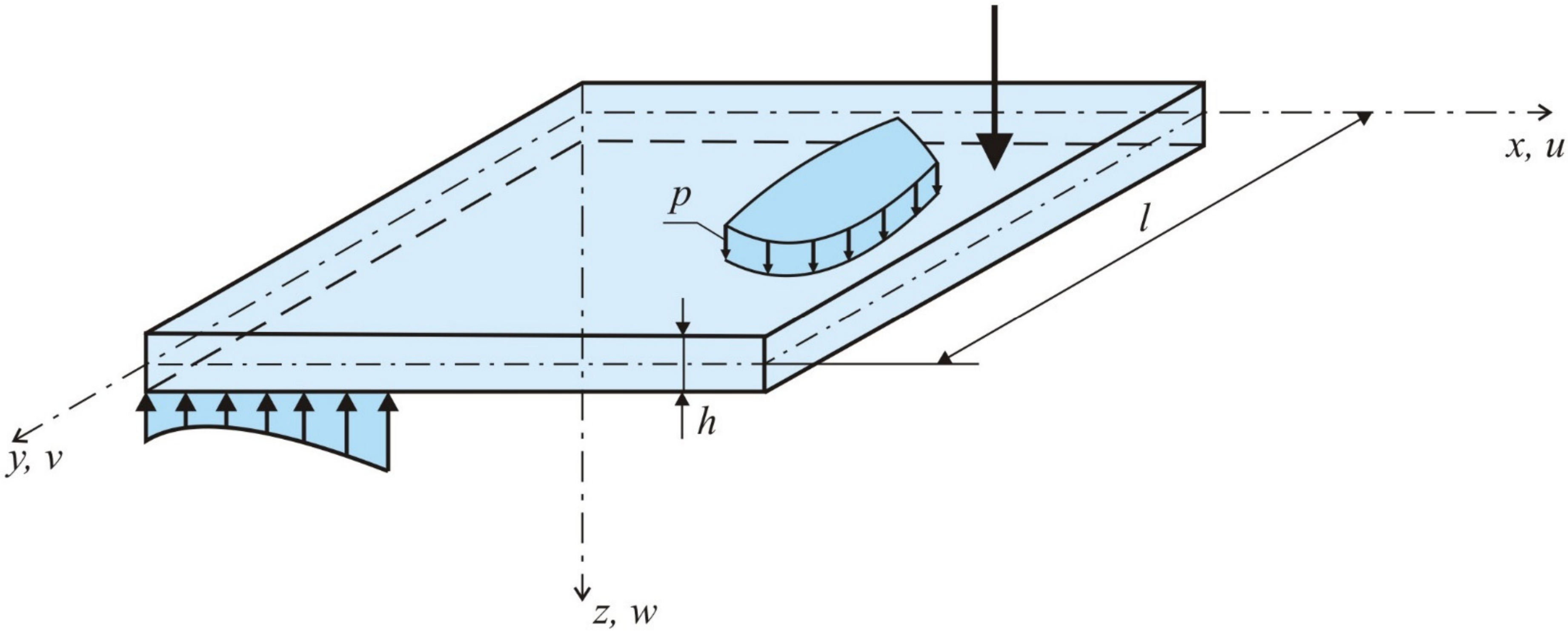
půdorys



svislý řez



Pravoúhlé nosné desky, volba souřadnicového systému



Nosná deska v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic

Rozdělení nosných desek

Nosné desky lze rozdělit:

Podle rozměrů:

- membrány: $h / l < 1/80$,
- velmi tenké desky $h / l = 1/50$ až $1/80$,
- tenké desky $h / l = 1/10$ až $1/50$,
- hrubé desky $h / l = 1/5$ až $1/10$,
- prostorová tělesa $h / l > 1/5$.

Podle deformace:

- s malými deformacemi $|w_{\max}| < l/300$ a současně $|w_{\max}| < h/4$ a $|\varphi_{\max}| < \pi/60$,
- se středními, případně velkými deformacemi $|w_{\max}| > l/300$, řešení patří k nelineárním úlohám pružnosti.

Tenké nosné desky s malými deformacemi, předpoklady řešení

Gustav Robert Kirchhoff
(1824 –1887)

Autorství lineární teorie desek se přisuzuje Kirchhoffovi.

Řešení podle Kirchhoffa je založeno na předpokladech:

1. Deformace střednicové plochy jsou malé.
2. Normálová napětí σ_z jsou v porovnání s napětím σ_x a σ_y malá a zanedbávají se.
3. Body ležící před deformací na normále ke střednici leží na ní i po deformaci (tzv. **špendlíková hypotéza**). Nemění se také jejich vzdálenost $\varepsilon_z = 0$.
   Důsledky:
   - přetvoření lze vyjádřit jako funkci ohybové plochy $w(x,y)$,
   - $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.
4. Body na střednicové ploše desky mají nulové normálové napětí a přemísťují se pouze ve směru osy z (podmínkou je symetrie tvaru a materiálu desky).

Nosné desky, příklady reálného průběhu normálového napětí σ_z

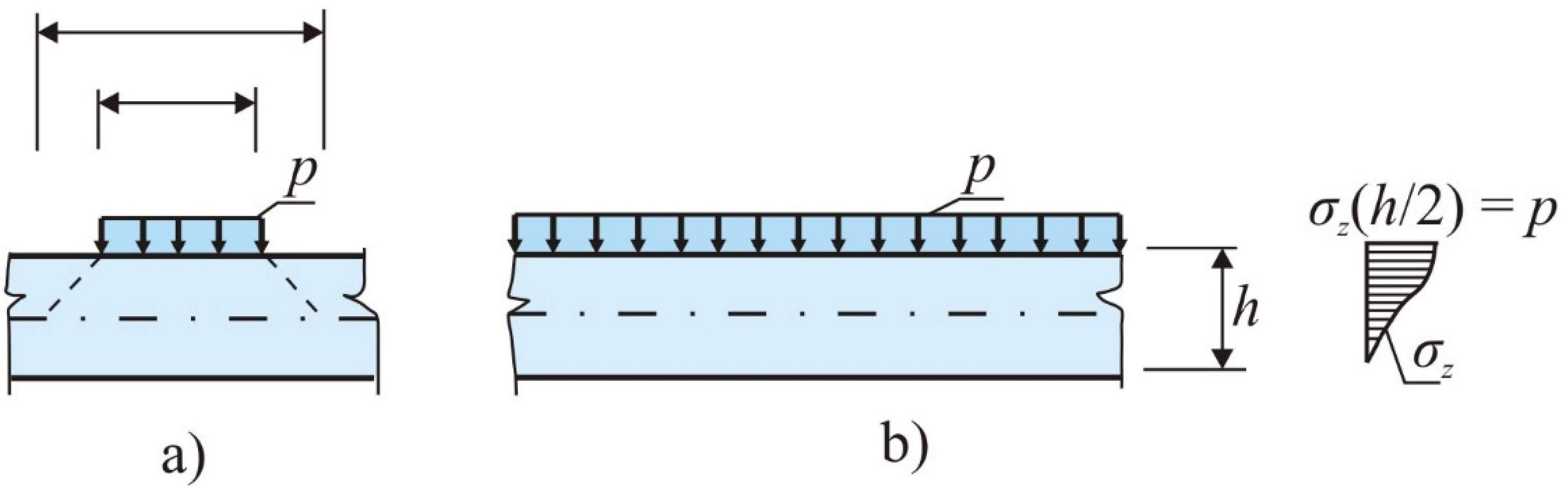
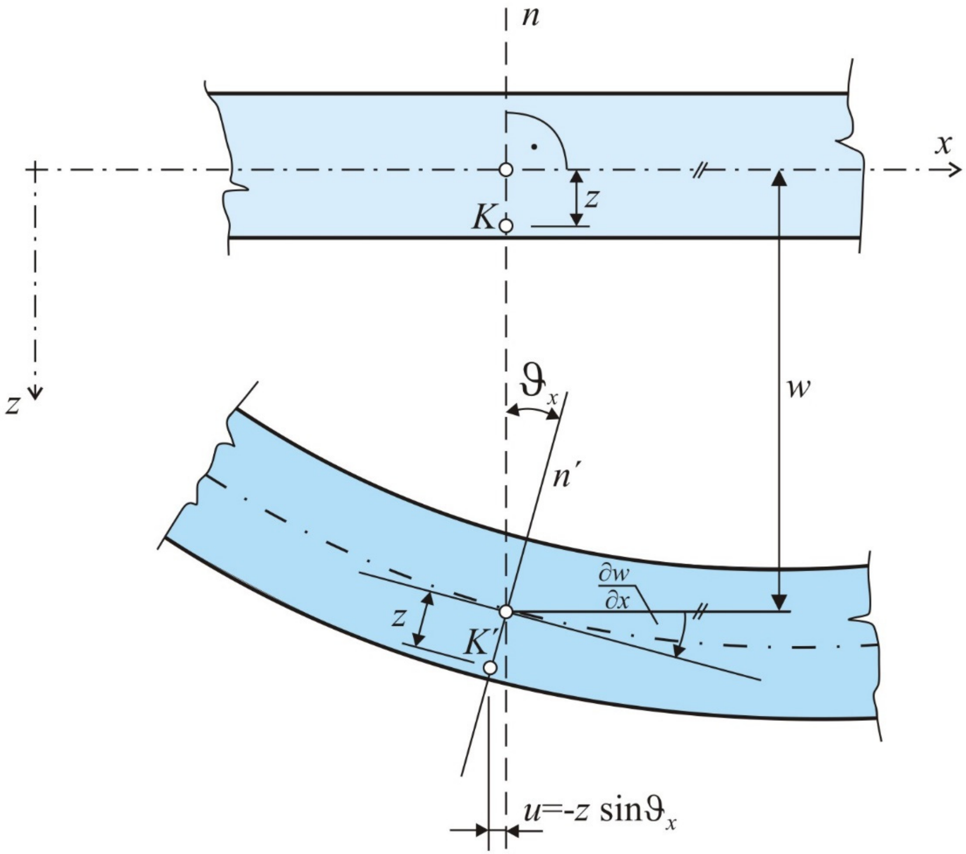


Schéma rozložení napětí při plošném zatížení **a)**, reálný průběh napětí σ_z na obr. **b)**.

Tenké nosné desky, výchozí předpoklady o deformaci



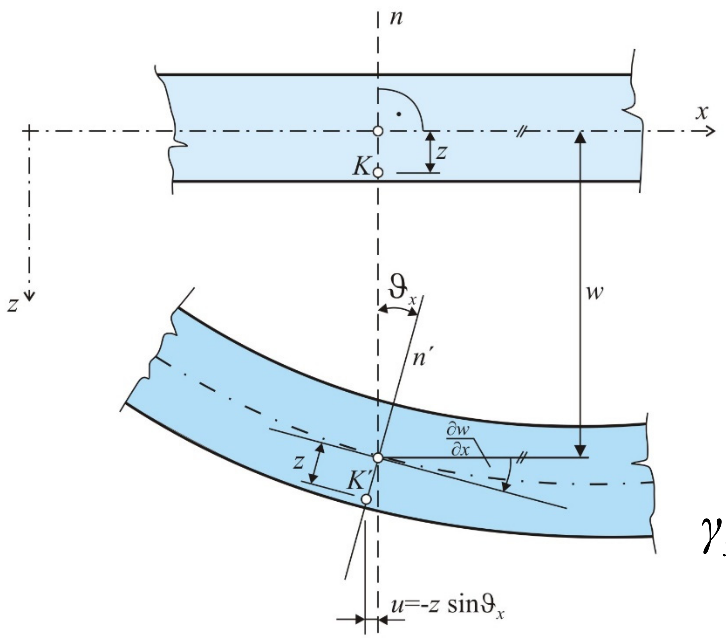
Střednice desky se pohybuje pouze ve směru osy z.

Normála ke střednici n před účinkem zatížením zůstává normálou n' i po účinku zatížení.

Posunutí bodu K v rovině xy ležícího mimo střednici do bodu K' lze vyjádřit jako funkci $u = f_1(w)$.

Obdobně $v = f_2(w)$.

Tenké nosné desky, řešení



Geometrické vztahy:

$$u = -z\vartheta_x = -z\frac{\partial w}{\partial x} \qquad v = -z\vartheta_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-z\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-z\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Šest složek deformace je vyjádřeno průhybovou funkcí $w(x,y)$.

Tenké nosné desky, řešení, pokračování

Fyzikální vztahy:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Z těchto rovnic a z geometrických vztahů lze odvodit:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Tenké nosné desky, řešení, pokračování

Je-li: $\sigma_x \neq 0 \qquad \sigma_y \neq 0 \qquad \tau_{xy} \neq 0$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Pak také platí: $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y\right) \neq 0 \qquad \tau_{yz} \neq 0 \qquad \tau_{xz} \neq 0$

Platí-li podmínky rovnováhy:

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \qquad G \Rightarrow \infty$$

Je zde určitý nesoulad s Kirchhofovou teorií.

Tenké nosné desky, řešení, pokračování

Z podmínky rovnováhy: $$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\Rightarrow \tau_{zx}=\int_{-h/2}^{z}\left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)\mathrm{d}z$$

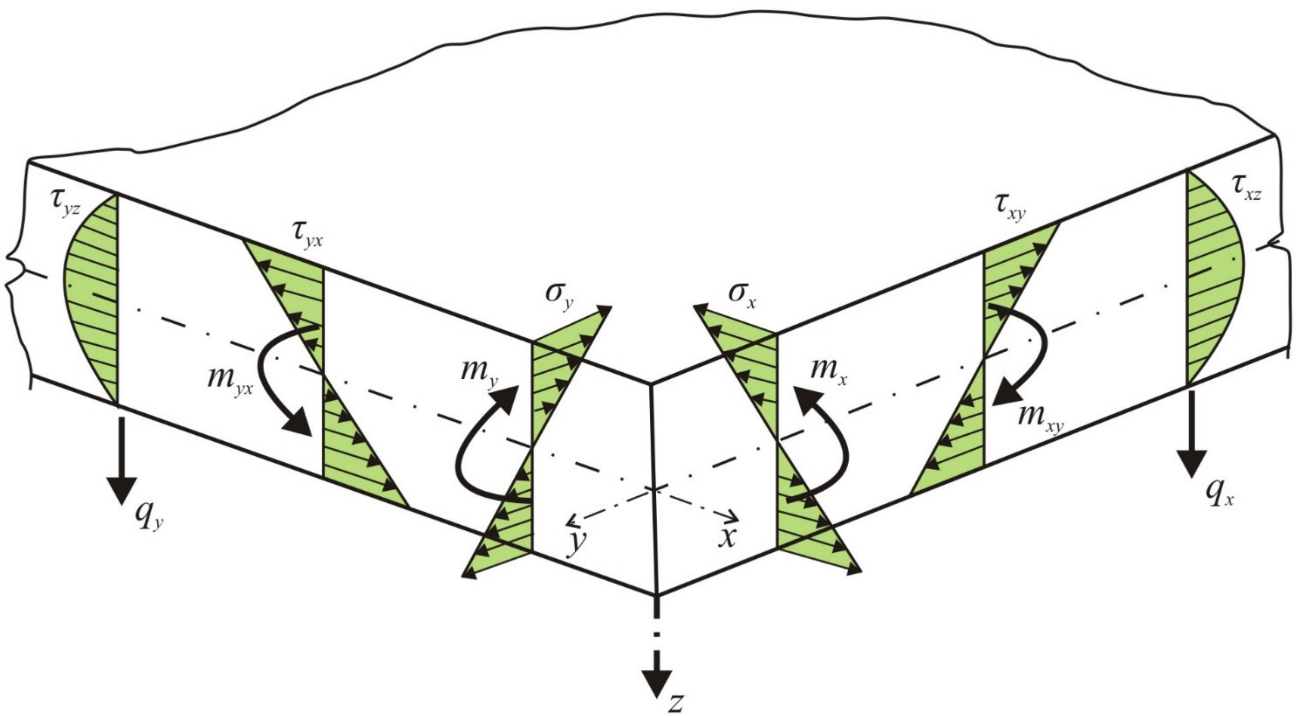
Protože $$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}\right) \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}=-\frac{Ez}{(1+\mu)}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$\tau_{zx}=\int_{-h/2}^{z}\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}+(1-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\mathrm{d}z=\int_{-h/2}^{z}\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\tau_{zx}=\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-h/2}^{z}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)=-\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)$$

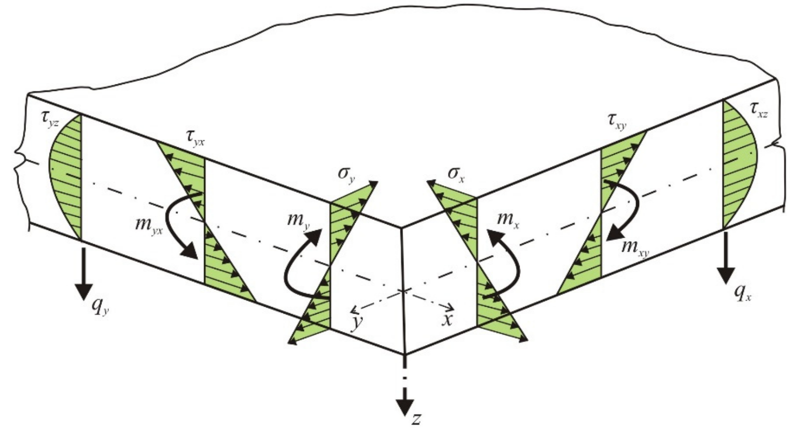
Obdobně: $$\tau_{zy}=-\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)$$

Nosné desky, průběh složek napětí a složek měrných vnitřních sil



Kladný smysl vnitřních sil je zřejmý z obr. Na tzv. kladných ploškách jsou orientovány ve směru kladných os x,y (ohybové momenty vyvolávají tah ve spodních vláknech a kladné kroutící momenty mají směr kladných tečných napětí). Na záporně orientovaných ploškách je to opačně.

Nosné desky, odvození složek měrných vnitřních sil



Měrné vnitřní síly:

- mají význam intenzity vnitřních sil,
- jsou vztaženy k jednotkové délce příslušného řezu,
- označují se malými písmeny,
- je jich celkem pět - dva měrné ohybové momenty m_x a m_y , jeden měrný kroutící moment m_{xy} a dvě měrné posouvající síly q_x a q_y .

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \,\mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}z = -\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

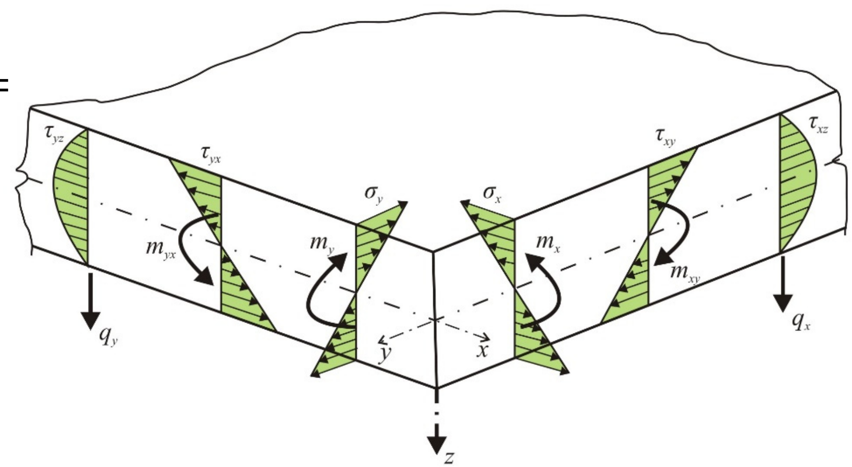
$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \,\mathrm{d}z = -\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Desková tuhost

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$$

Nosné desky, odvození složek měrných (posouvajících) vnitřních sil



$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\,\mathrm{d}z = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left[\frac{h^2 z}{4}-\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) =$$

$$= -\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left[\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}-\frac{h^3+h^3}{24}\right]\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) = -\frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\frac{h^3}{6}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}\,\mathrm{d}z = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{-E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w)\,\mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)$$

Desková tuhost $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$

Nosné desky, transformace složek měrných vnitřních sil, hlavní momenty

Měrné momenty byly odvozeny integrací složek napětí:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, \mathrm{d}z \qquad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, \mathrm{d}z \qquad m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, \mathrm{d}z$$

Maticově lze zapsat:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_x & m_{xy} & 0 \\ m_{yx} & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z \, \mathrm{d}z$$

Pootočí-li se souřadné osy x a y a úhel α, získají se tak osy x' a y'. Těm pak budou odpovídat i složky napětí σ_x', σ_y' a τ_{xy}' a momenty m_x', m_y' a m_{xy}'.

Nosné desky, transformace složek měrných vnitřních sil, hlavní momenty

Pro transformaci složek napětí a momentů lze použít identické vztahy:

$$m_{x'} = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha$$

$$m_{y'} = m_x \sin^2 \alpha + m_y \cos^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha$$

$$m_{x'y'} = m_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}\left(m_x - m_y\right)\sin 2\alpha$$

Hlavní momenty a směry normál k plochám, kde hlavní momenty působí jsou:

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + m_{xy}^2} \qquad \tan \alpha_1 = \frac{m_{xy}}{m_1 - m_y} \qquad \tan \alpha_2 = \frac{m_{xy}}{m_2 - m_y}$$

Maximální měrné kroutící momenty $m_{3,4}$ se pak určí: $m_{3,4} = \pm \frac{m_1 - m_2}{2}$

Spolupůsobí s nimi ohybové momenty: $\frac{m_x + m_y}{2}$

Výpočet složek napětí v nosné desce

Platí-li pro výpočet měrného ohybového momentu m_x a normálového napětí σ_x:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

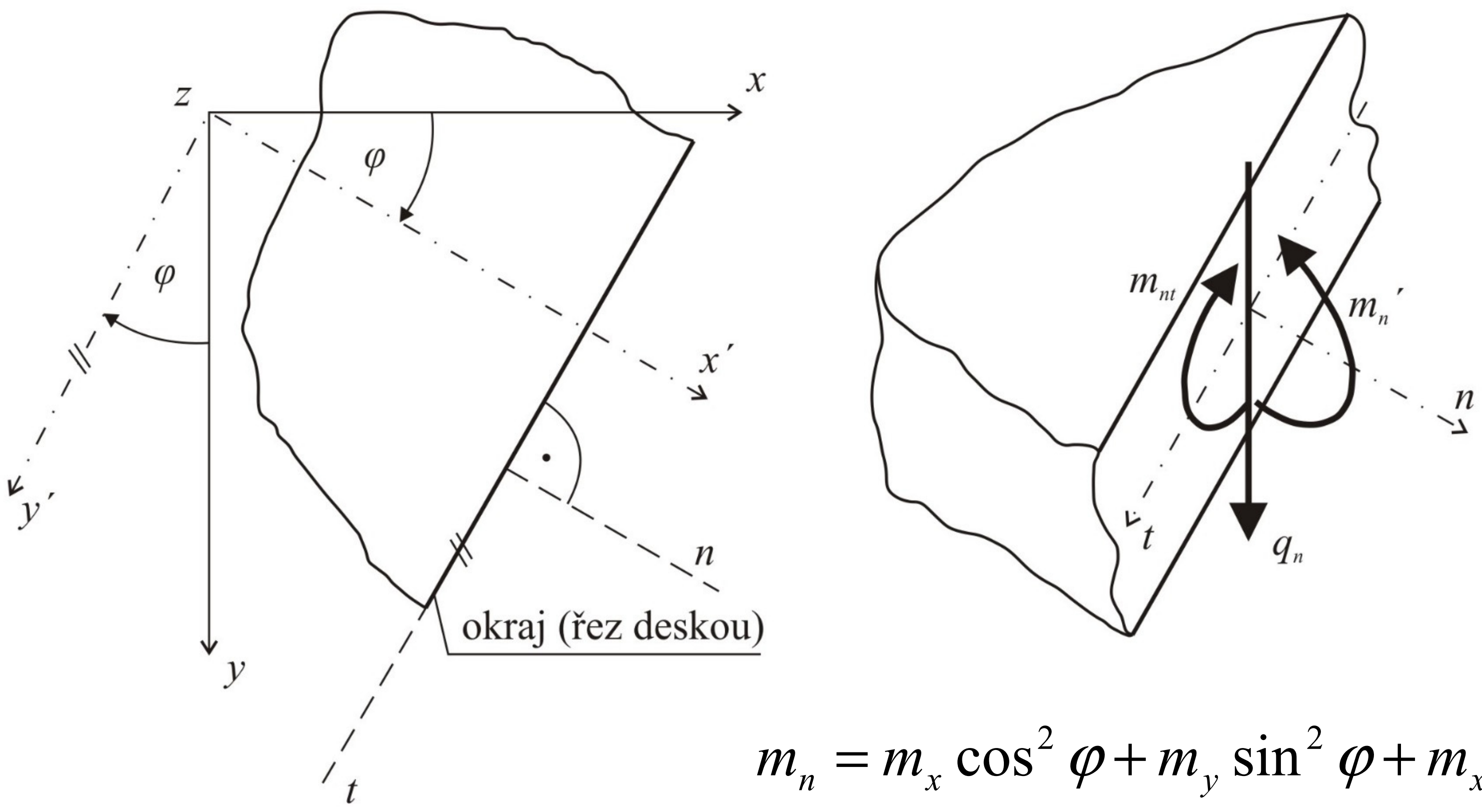
pak

$$\frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{E}{(1-\mu^2)D}z = \frac{E\cdot z\cdot 12(1-\mu^2)}{(1-\mu^2)Eh^3} \Rightarrow \sigma_x = \frac{12m_x}{h^3}z$$

Složky napětí v nosné desce lze určit s pomocí vztahů:

$$\sigma_x = \frac{12m_x}{h^3}z \qquad \sigma_y = \frac{12m_y}{h^3}z \qquad \tau_{xy} = \frac{12m_{xy}}{h^3}z$$

Nosné desky, složky měrných vnitřních sil na okraji desky



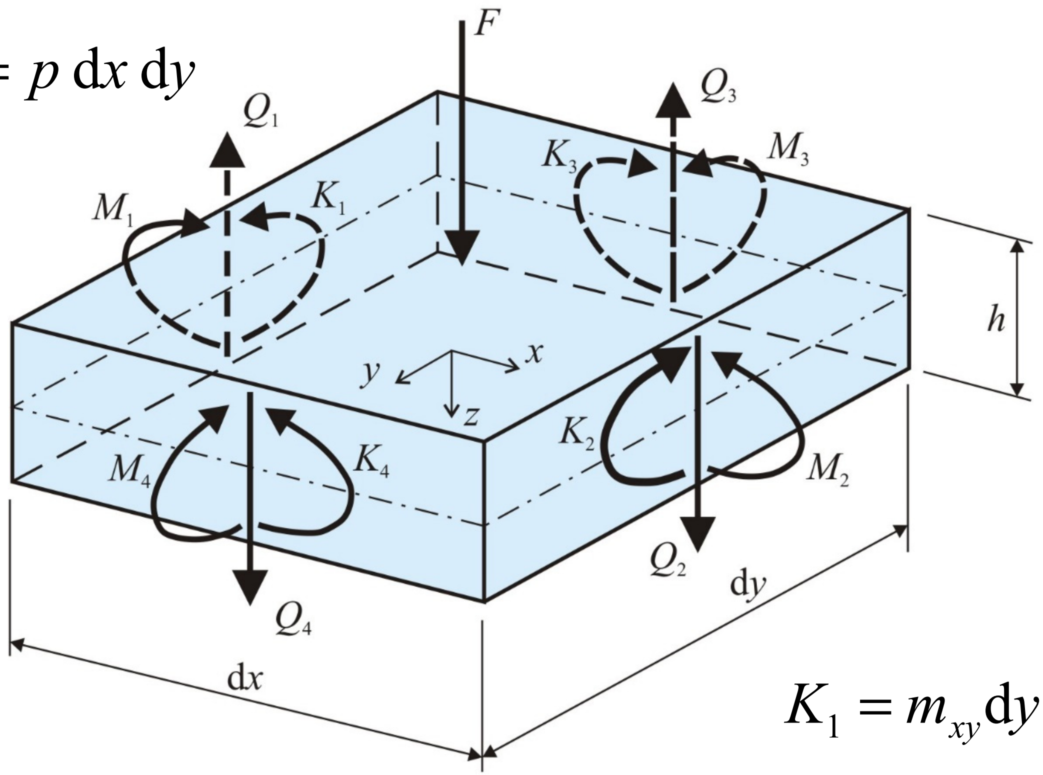
$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi$$

$$m_{n_t} = m_{xy} \cos 2\varphi - \frac{1}{2}\left(m_x - m_y\right)\sin 2\varphi$$

$$q_n = q_x \cos \varphi + q_y \sin \varphi$$

Nosné desky, podmínky rovnováhy

$$F = p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$M_1 = m_x \mathrm{d}y$$

$$M_2 = \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$M_3 = m_y \mathrm{d}x$$

$$M_4 = \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$K_1 = m_{xy} \mathrm{d}y \qquad K_2 = \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$K_3 = m_{xy} \mathrm{d}x \qquad K_4 = \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

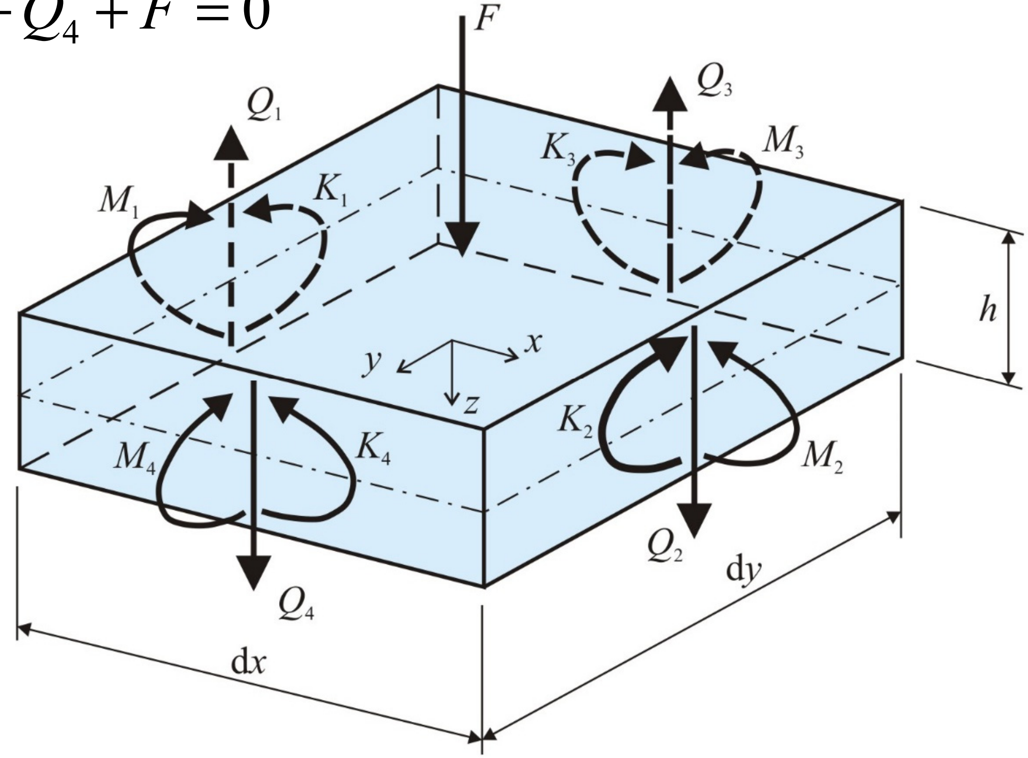
$$Q_1 = q_x \mathrm{d}y \qquad Q_2 = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \qquad Q_3 = q_y \mathrm{d}x \qquad Q_4 = \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Nosné desky, podmínky rovnováhy, pokračování

$$\sum M_{ix} = 0: \qquad M_3 - M_4 + K_1 - K_2 + Q_3 \frac{\mathrm{d}y}{2} + Q_4 \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0$$

$$\sum M_{iy} = 0: \qquad M_1 - M_2 + K_3 - K_4 + Q_1 \frac{\mathrm{d}x}{2} + Q_2 \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 + F = 0$$



Nosné desky, podmínky rovnováhy, pokračování, desková rovnice

$$\boxed{\sum M_{iy} = 0:} \qquad \boxed{M_1 - M_2 + K_3 - K_4 + Q_1 \frac{\mathrm{d}x}{2} + Q_2 \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0}$$

Po úpravě:

$$m_x \mathrm{d}y - \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + m_{xy} \mathrm{d}x - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + q_x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}x}{2} + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

$$-\frac{\partial m_x}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + q_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial q_x}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}} \qquad \boxed{\frac{\partial q_x}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}x}{2} \cong 0}$$

$$\boxed{\sum M_{ix} = 0:} \qquad \boxed{M_3 - M_4 + K_1 - K_2 + Q_3 \frac{\mathrm{d}y}{2} + Q_4 \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0}$$

Po úpravě:

$$m_y \mathrm{d}x - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + m_{xy} \mathrm{d}y - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y + q_y \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}y}{2} + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0$$

$$-\frac{\partial m_y}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + q_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial q_y}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}y}{2} \cong 0}$$

Nosné desky, podmínky rovnováhy, pokračování, desková rovnice

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 + F = 0$$

$$-q_x \mathrm{d}y + \left(q_x \mathrm{d}y + \frac{\partial q_x}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y - q_y \mathrm{d}x + \left(q_y \mathrm{d}x + \frac{\partial q_y}{\partial y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + p \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0$$

Po úpravě:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \qquad \text{resp.} \qquad \overline{p}_x + \overline{p}_{xy} + \overline{p}_y = p$$

Zatížení desky lze rozdělit na tři části:

- zatížení p_x a p_y přenášené ohybovými momenty m_x a m_y,
- zatížení p_{xy} přenášené kroutícím momentem m_{xy}.

Nosné desky, podmínky rovnováhy, pokračování, desková rovnice

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p$$

Rovnice vyjadřuje podmínky rovnováhy pomocí měrných momentů.

Po dosazení:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

$$m_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -D(1-\mu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

a úpravě lze získat odvozenou deskovou rovnici:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

resp.

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}$$

Desková rovnice pro pravoúhlé nosné desky

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

resp.

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{p(x,y)}{D}$$

Zatížení plošné

$$p\,[\mathrm{N/m^2}]$$

Desková tuhost

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$$

Desková rovnice:

- parciální diferenciální rovnice 4. řádu,
- lineární,
- nehomogenní (má pravou stranu),
- eliptického typu.

Pro $p = 0$ jde o *biharmonickou* rovnici.

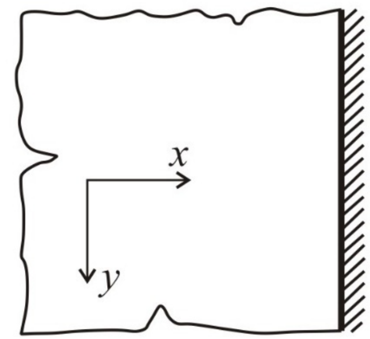
Každá biharmonická funkce odpovídá průhybové ploše desky zatížené jen na okrajích.

Okrajové podmínky nosných desek

Řešení rovnice desky musí odpovídat daným okrajovým podmínkám (vždy dvě na okraji).

Okraj vetknutý: na okraji nulový průhyb i pootočení

$$w = 0 \qquad \vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

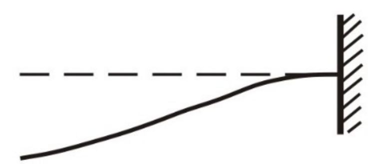


Také platí:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \ldots = \frac{\partial^i w}{\partial y^i} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

Kroutící moment m_{xy} je nulový

$$m_x = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad m_y = -D\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mu m_x$$



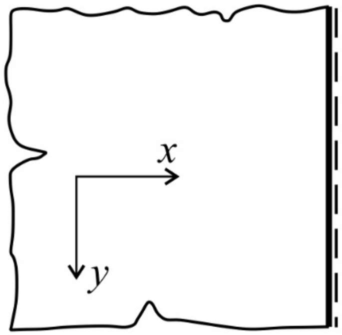
Okrajové podmínky nosných desek

Okraj prostě podepřený:

na okraji nulový průhyb a nulový moment m_x.

$$w = 0 \qquad m_x = 0$$

Také platí:



$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \ldots = \frac{\partial^i w}{\partial y^i} = 0$$

$$m_x = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

proto: $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Deformační vyjádření okrajové podmínky:

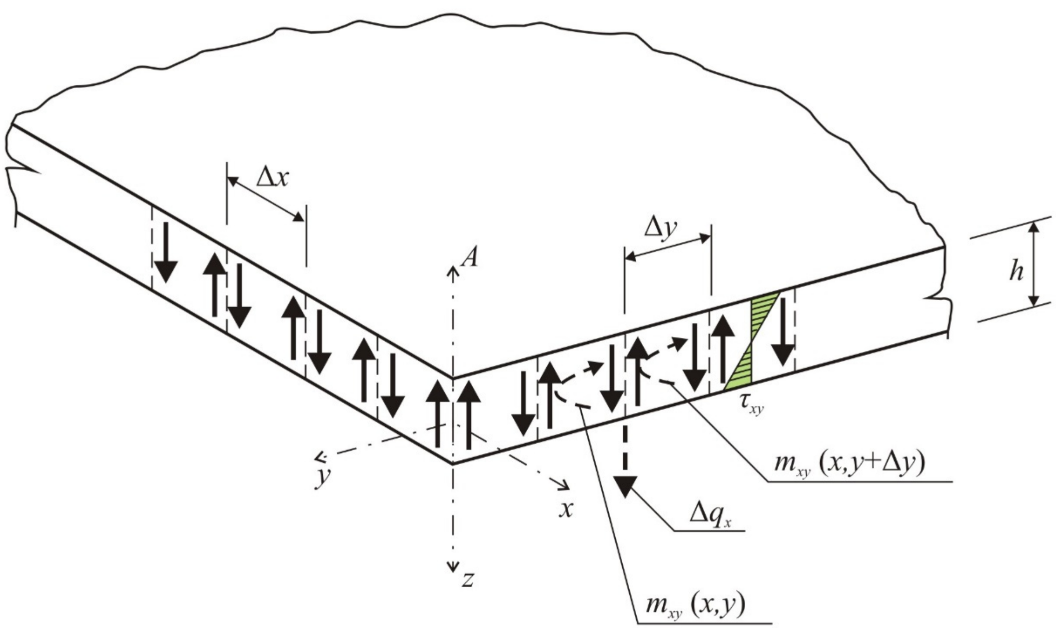
$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Okrajové podmínky nosné desky, okraj prostě podepřený, pokračování

Desková rovnice umožňuje plnit na okraji pouze dvě podmínky. Mělo by zde být ještě třetí podmínka $m_{xy}=0$.

Řeší se tzv. doplněnou posouvající silou.

$$m_{xy}+\Delta y\cdot\Delta q_x=0\Rightarrow\Delta q_x=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{m_{xy}(x,y+\Delta y)-m_{xy}(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$



Tato síla je:

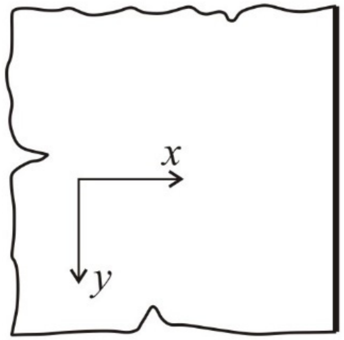
$$\bar{q}_x=q_x+\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$\bar{q}_x=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]$$

Okrajové podmínky nosné desky, okraj volný

Na nezatíženém okraji by mělo být splněno:

$$m_x = 0 \qquad q_x = 0 \qquad m_{xy} = 0$$



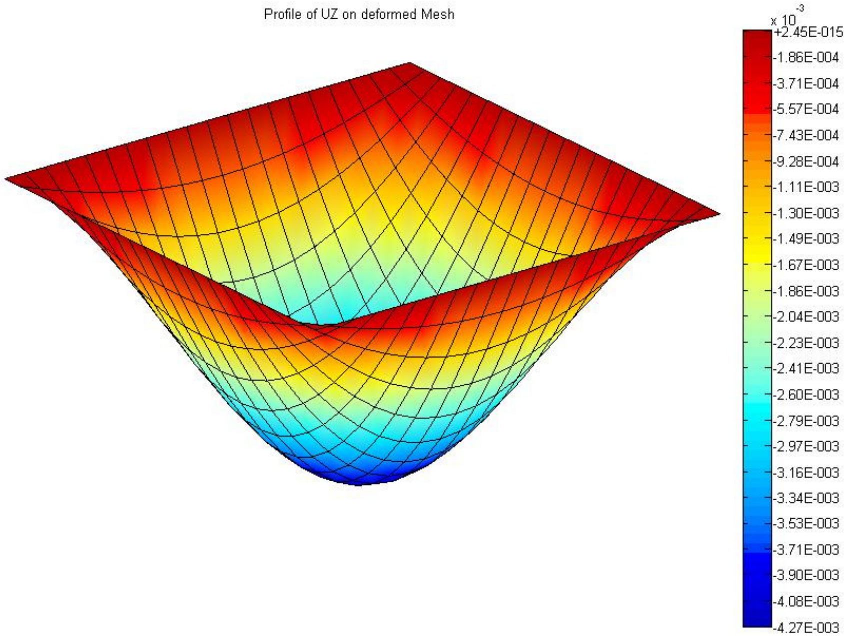
Předepisují se však jen dvě podmínky:

$$m_x = 0 \qquad \bar{q}_x = 0$$

Nosné desky, metody řešení

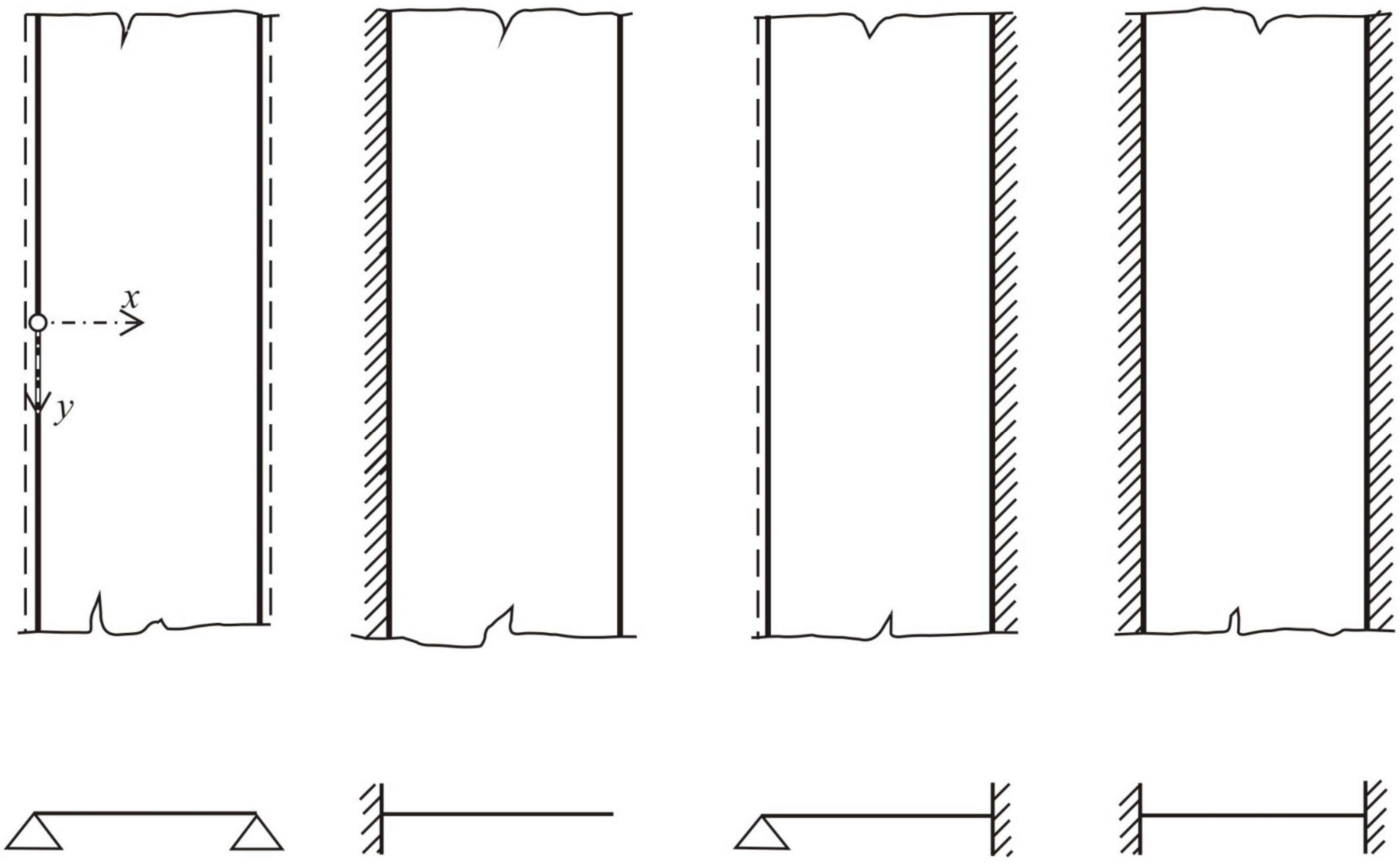
Přímé řešení deskové rovnice v uzavřeném tvaru neexistuje. Aplikují se přibližné metody, ke kterým patří např.:

- Metoda sítí,
- Ritzova metoda,
- Galerkinova metoda,
- Metoda hraničních prvků,
- Metoda konečných prvků - FEM.



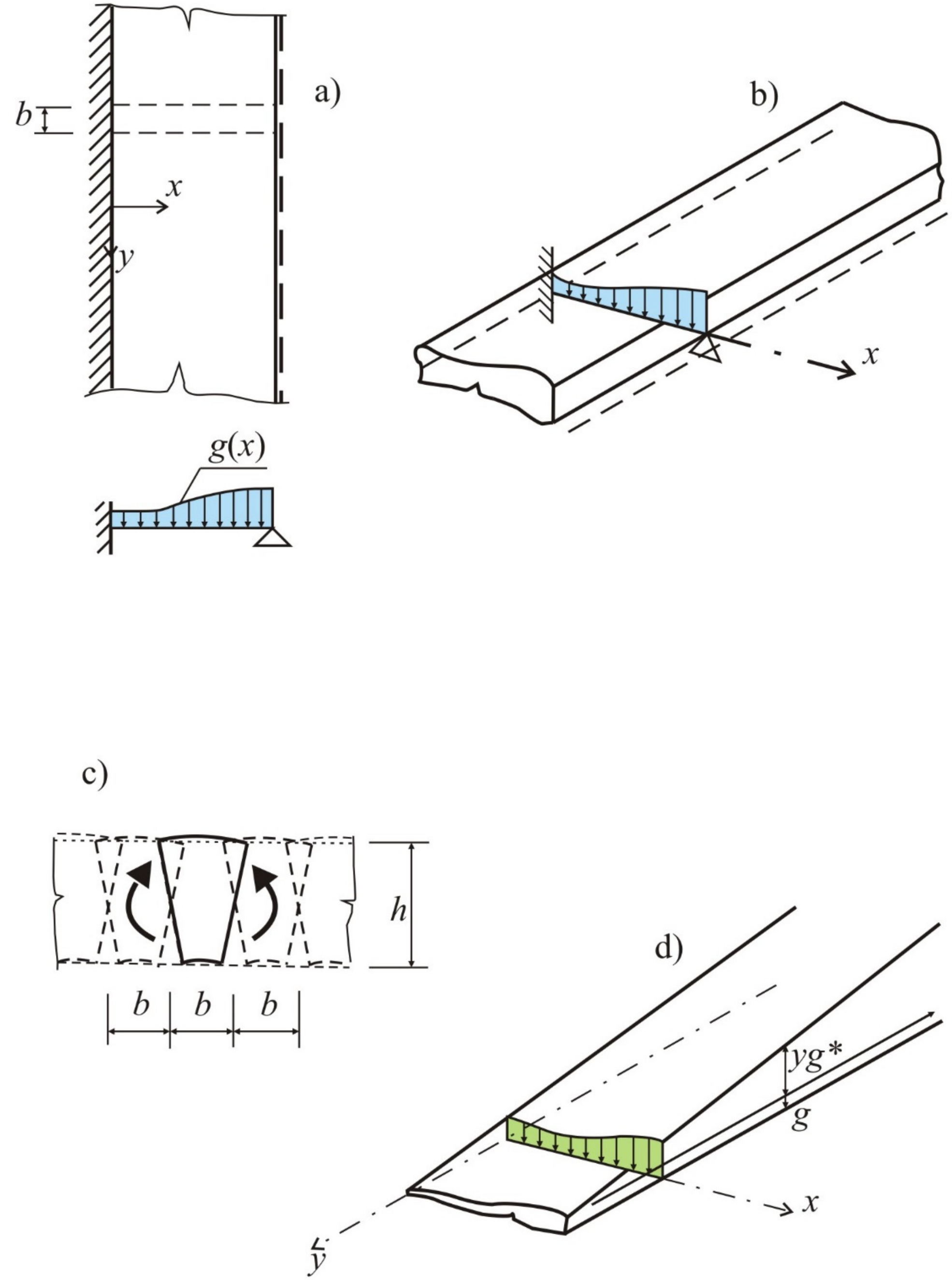
Deskový pás

Je nejjednodušší případ deskové konstrukce

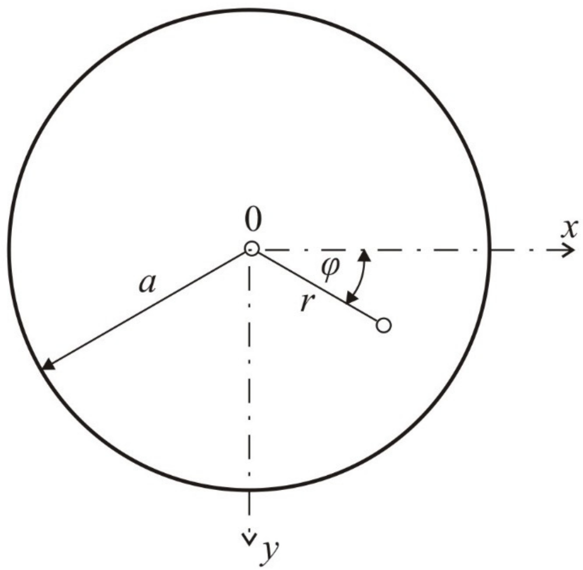


Statické schéma různých typů deskových pásů

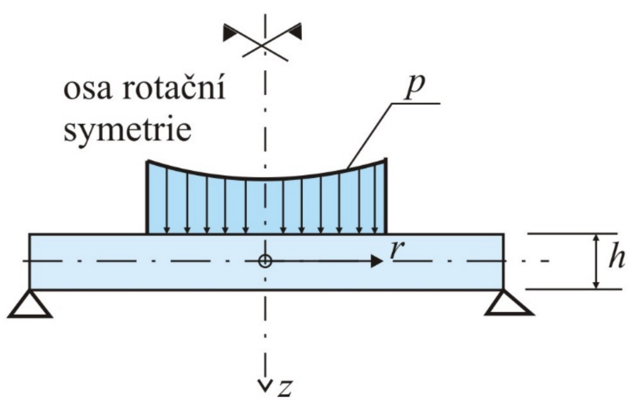
Deskové pásy, příklady



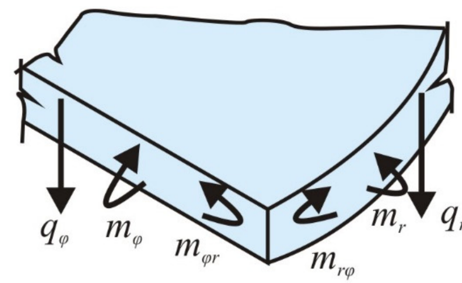
Kruhové (rotačně symetrické) nosné desky



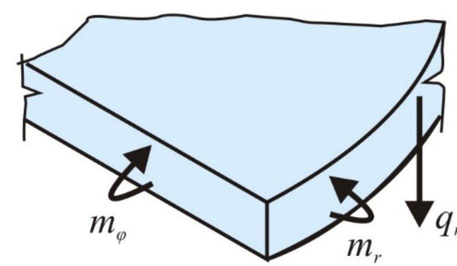
a) půdorys



b) řez



c) vnitřní síly obecně

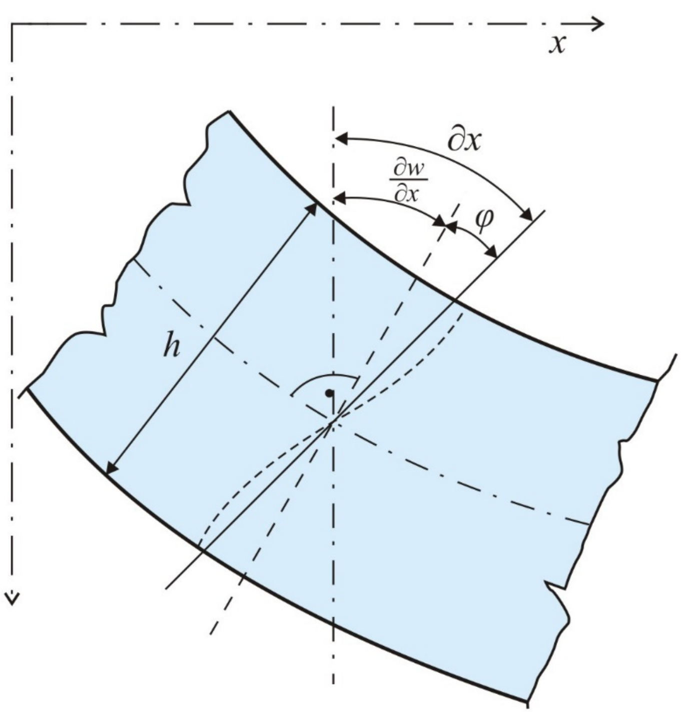


d) vnitřní síly při rotační
symetrii

Tlusté nosné desky, Mindlinova teorie

Předpoklady $\sigma_z = \varepsilon_z = 0$ a $u(x,y,0) = v(x,y,0) = 0$ zůstávají v platnosti.

Body normály ke střednicové rovině zůstávají po deformaci na přímce. Ta již obecně není normálou ke střednicové rovině.



Platí:

$$\vartheta_x(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x(x,y)$$

$$\vartheta_y(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y(x,y)$$

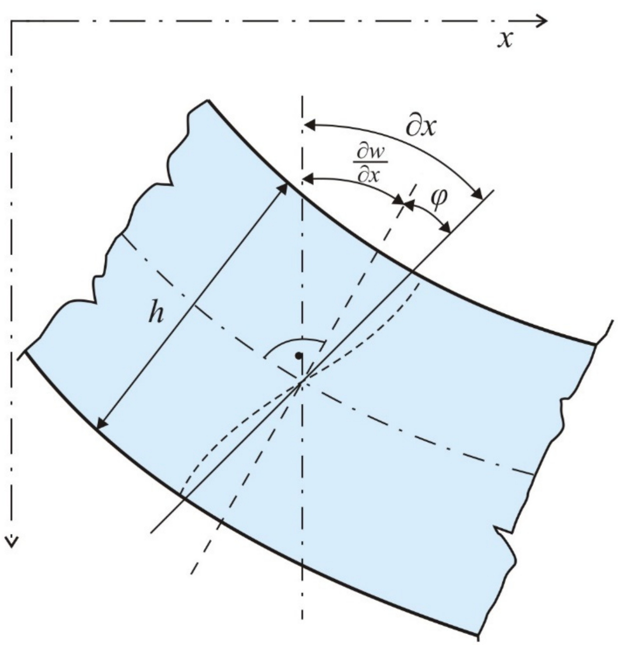
Vedle neznámé w je potřeba stanovit také hodnoty φ_x a φ_y, resp. ϑ_x a ϑ_y.

Tlusté nosné desky, Mindlinova teorie, pokračování

Při výpočtu podle Mindlinovy teorie se místo jedné neznámé musí stanovit tři neznámé parametry.

U tenkých nosných desek se momenty určovaly:

$$m_x(x,y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad m_y(x,y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad m_{xy}(x,y) = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



Pro tlusté nosné desky se stanoví:

$$m_x = -D\left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}\right) \qquad m_y = -D\left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}\right)$$

$$m_{xy} = -\frac{1-\mu}{2} D\left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y}\right)$$

Měrné posouvající síly jsou:

$$q_x = \frac{Gh}{1{,}2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta_x\right) \qquad q_y = \frac{Gh}{1{,}2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta_y\right)$$

Tlusté nosné desky, Mindlinova teorie, pokračování

Místo jedné deskové rovnice, v níž vystupovala jediná neznámá $w(x,y)$ se v daném případě z podmínek rovnováhy získají tři rovnice:

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}\right)+(1+\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{Gh}{0{,}6D}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\vartheta_x\right)=0$$

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2}\right)+(1+\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{Gh}{0{,}6D}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\vartheta_y\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\Phi=-\frac{1{,}2}{Gh}p$$

kde $\Phi=\dfrac{\partial \vartheta_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \vartheta_y}{\partial y}$

Tlusté nosné desky, okrajové podmínky

- Prosté podepření:
  - okraj $x = \text{konst}$: $\quad w = m_x = m_{xy} = 0$
  - okraj $y = \text{konst}$: $\quad w = m_y = m_{xy} = 0$
- Vetknutí:
  - okraj $x = y = \text{konst}$: $w = \vartheta_x = \vartheta_y = 0$
- Volný okraj:
  - okraj $x = \text{konst}$: $m_x = m_{xy} = q_x = 0$
  - okraj $y = \text{konst}$: $m_x = m_{xy} = q_y = 0$

Doplňkové posouvající síly se zde nezavádějí.